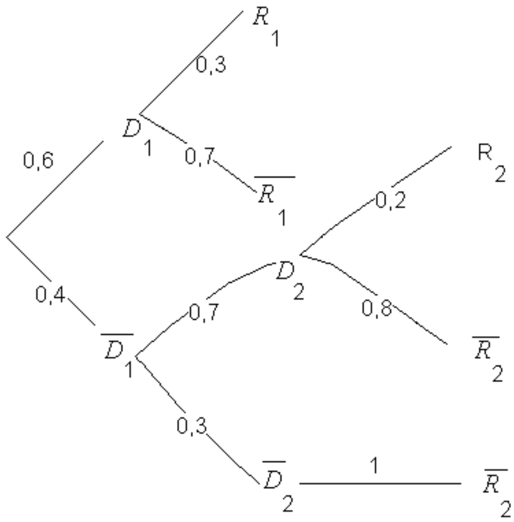
Mathématiques - baccalauréat S - juin 2005

Exercice 1

1. L'énoncé donne les probabilités suivantes : $P(\overline{D_1}) = 0,4$ et $P_{D_1}(R_1) = 0,3$.
   On a $R_1 \subset D_1$ d'où $D_1 \cap R_1 = R_1$ donc $P(R_1) = P(D_1 \cap R_1) = P(D_1)\, P_{D_1}(R_1)$
   $\boxed{P(R_1) = 0,18}$

2. $P(R) = P(R_1 \cup R_2) = P(R_1) + P(R_2) - P(R_1 \cap R_2)$
   Or les événements R_1 et R_2 sont incompatibles donc $P(R_1 \cap R_2) = 0$ puis $P(R) = P(R_1) + P(R_2)$
   De plus $R_2 \subset D_2 \subset \overline{D_1}$ d'où $P(R_2) = P(\overline{D_1} \cap D_2 \cap R_2)$
   En utilisant la formule des probabilités composées, il vient
   $$P(\overline{D_1} \cap D_2 \cap R_2) = P(\overline{D_1}) \times P_{\overline{D_1}}(D_2) \times P_{\overline{D_1} \cap D_2}(R_2)$$
   Par conséquent $P(R_2) = 0,4 \times (1 - 0,3) \times 0,2 = 0,056$



   Finalement $\boxed{P(R) = 0,18 + 0,056 = 0,236}$

3. On cherche ici $P_R(R_1) = \dfrac{P(R \cap R_1)}{P(R)}$ Comme $R_1 \subset R$, on a $R \cap R_1 = R_1$
   Donc $P_R(R_1) = \dfrac{P(R_1)}{P(R)} = \dfrac{0,18}{0,236}$ d'où $\boxed{P_R(R_1) \approx 0,763}$

4. On répète 25 fois dans des conditions identiques et indépendantes la même épreuve de Bernoulli qui consiste à sonder une personne. Les issues contraires de cette épreuve sont :
   - la personne répond au questionnaire (de probabilité $p = P(R) = 0,236$)
   - la personne ne répond pas au questionnaire (de probabilité $q = 1 - p$).
   On appelle X la variable aléatoire égale au nombre de personnes ayant répondu.
   Alors X suit la binomiale de paramètres $n = 25$ et $p = 0,236$.
   Donc $\forall k \in \{0, 1, 2, \ldots, 25\}$, $P(X = k) = \begin{pmatrix} 25 \\ k \end{pmatrix} \times 0,236^k \times (1 - 0,236)^{25-k}$
   On cherche ici $P(X = \dfrac{20}{100} 25) = P(X = 5) = \begin{pmatrix} 25 \\ 5 \end{pmatrix} \times 0,236^5 \times 0,764^{20}$ $\boxed{P(X = 5) \approx 0,179}$

Exercice 2 (spécialité)

Partie A

1. Raisonnons par contraposée. On suppose que a et b ont la même parité.

- premier cas : a et b sont pairs. Alors $a \equiv 0$ [2] et $b \equiv 0$ [2] d'où $a^2 \equiv 0$ [2] et $b^2 \equiv 0$ [2] puis $a^2 - b^2 \equiv 0$ [2] donc N est pair.
- second cas : a et b sont impairs. Alors $a \equiv 1$ [2] et $b \equiv 1$ [2] d'où $a^2 \equiv 1^2$ [2] et $b^2 \equiv 1^2$ [2] puis $a^2 - b^2 \equiv 1 - 1$ [2] c.à.d. $a^2 - b^2 \equiv 0$ [2] donc N est pair.

2. $N > 0$ donc $a^2 > b^2$ puis $a > b$. $N = (a-b)(a+b)$
En posant $p = a - b$ et $q = a + b$, nous avons $N = p\,q$ avec $(p, q) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*$, $0 < p \leq q$

3. Puisque a et b sont de parités contraires, les entiers $\boxed{p \text{ et } q \text{ sont impairs.}}$

Partie B

1. (a)

$X \equiv \ldots$ [9]	0	1	2	3	4	5	6	7	8
$X^2 \equiv \ldots$ [9]	0	1	4	0	7	7	0	4	1

(b) D'après le tableau précédent, les restes possibles modulo 9 d'un carré parfait sont 0, 1, 4 ou 7.
D'autre part $250507 = 9 \times 27834 + 1$ donc $250507 \equiv 1$ [9] et on rappelle que $a^2 = b^2 + 250507$

$b^2 \equiv \ldots$ [9]	0	1	4	7
$a^2 \equiv b^2 + 1 \equiv \ldots$ [9]	1	2	5	8

D'après la question **B**1.(a), a^2 ne peut être congru ni à 2, ni à 5, ni à 8 modulo 9. Le seul reste possible modulo 9 de a^2 est donc 1.

(c) En utilisant de nouveau la question **B**1.(a), on voit que

$$a^2 \equiv 1 \ [9] \quad \Longrightarrow \quad (a \equiv 1 \ [9] \text{ ou } a \equiv 8 \ [9])$$

2. $a^2 = b^2 + 250507$ d'où $a^2 \geq 250507$. Or $\sqrt{250507} \approx 500,5$ à $0,1$ près par défaut. Donc $a \geq 501$.
$501 \equiv 6$ [9] donc d'après **B**1.(c), il n'existe pas de solution du type $(501, b)$.

3. (a) Si $a \equiv 8$ [9] alors $a + 495 \equiv 8 + 495$ [9]. Comme $495 \equiv 0$ [9] (4+5+9=18 est divisible par 9), on obtient aussi $a + 495 \equiv a$ [9]. Ainsi $a \equiv 503$ [9].

Si $a \equiv 1$ [9] alors $a + 504 \equiv 505$ [9]. Comme $504 \equiv 0$ [9], on obtient aussi $a + 504 \equiv a$ [9].
Ainsi $a \equiv 505$ [9].

(b) Pour $k = 0$, $a^2 - 250507 = 505^2 - 250507 = 4518$ n'est pas un carré parfait. Donc $(505, b)$ n'est pas solution de (E).
Pour $k = 1$, $a^2 - 250507 = (505 + 9)^2 - 250507 = 13689 = 117^2$.
Donc $\boxed{(514, 117) \text{ est une solution de } (E)}$

Partie C

On prend dans cette partie $a = 514$ et $b = 117$

1. $250507 = a^2 - b^2 = (a-b)(a+b) = (514 - 117)(514 + 117) = 397 \times 631$

2. La calculatrice assure que 397 et 631 sont des nombres premiers (isprime(397) renvoie *true*). Vérifions par exemple que 397 est premier. On rappelle que si un entier naturel $n > 2$ n'est pas premier, alors il admet au moins un diviseur premier p tel que $p^2 \leq n$. Si 397 n'était pas premier, alors il serait divisible par l'un des nombres premiers de l'ensemble $\{2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19\}$, ce qui n'est pas le cas. Par conséquent 397 est premier.
Deux nombres premiers distincts sont premiers entre eux.

3. Cette écriture est unique (à l'ordre près des facteurs) d'après le théorème de décomposition d'un entier naturel en produit de facteurs premiers. Mais on a aussi l'écriture triviale $250507 = 1 \times 250507$.

Exercice 2 (obligatoire)

1. $\bullet M \neq N \Longleftrightarrow z \neq z^2 \Longleftrightarrow z(1-z) \neq 0 \Longleftrightarrow z \neq 0$ et $z \neq 1$

   $\bullet M \neq P \Longleftrightarrow z \neq z^3 \Longleftrightarrow z(1-z^2) \neq 0 \Longleftrightarrow z(1-z)(1+z) \neq 0 \Longleftrightarrow z \neq 0$ et $z \neq 1$ et $z \neq -1$

   $\bullet N \neq P \Longleftrightarrow z^2 \neq z^3 \Longleftrightarrow z^2(1-z) \neq 0 \Longleftrightarrow z \neq 0$ et $z \neq 1$

   Ainsi les points M, N et P sont deux à deux distincts si et seulement s'ils appartiennent à l'ensemble $\mathcal{E}$.

2. (a)
$$\begin{array}{lcc} MNP \text{ est rectangle en } P & \Longleftrightarrow & MN^2 = MP^2 + NP^2 \\ & \Longleftrightarrow & |z^2 - z|^2 = |z^3 - z|^2 + |z^3 - z^2|^2 \\ & \Longleftrightarrow & |z|^2\,|z-1|^2 = \left(|z|^2\,|z^2-1|^2\right) + \left(|z|^4\,|z-1|^2\right) \\ & \Longleftrightarrow & |z|^2\,|z-1|^2 = \left(|z|^2\,|z-1|^2\,|z+1|^2\right) + \left(|z|^4\,|z-1|^2\right) \end{array}$$
   En divisant les deux membres de l'équation précédente par $|z|^2\,|z-1|^2$ (ce qui est possible vu que $z \neq 0$ et $z \neq 1$), on obtient :
$$MNP \text{ est rectangle en } P \Longleftrightarrow 1 = |z+1|^2 + |z|^2$$
   (b) On rappelle que $\forall\, Z \in \mathbb{C},\ |Z|^2 = Z\,\overline{Z}$

   - $|z+1|^2 + |z|^2 = 1 \Leftrightarrow (z+1)\overline{(z+1)} + z\,\overline{z} = 1 \Leftrightarrow (z+1)(\overline{z}+1) + z\,\overline{z} = 1$
     $\Leftrightarrow 2\,z\,\overline{z} + z + \overline{z} + 1 = 1 \Leftrightarrow 2\,z\,\overline{z} + z + \overline{z} = 0$
   - $\left(z + \frac{1}{2}\right)\overline{\left(z + \frac{1}{2}\right)} = \frac{1}{4} \Leftrightarrow \left(z + \frac{1}{2}\right)\left(\overline{z} + \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{4} \Leftrightarrow z\,\overline{z} + \frac{z}{2} + \frac{\overline{z}}{2} + \frac{1}{4} = \frac{1}{4}$
     $\Leftrightarrow z\,\overline{z} + \frac{z}{2} + \frac{\overline{z}}{2} = 0 \Leftrightarrow 2\,z\,\overline{z} + z + \overline{z} = 0$

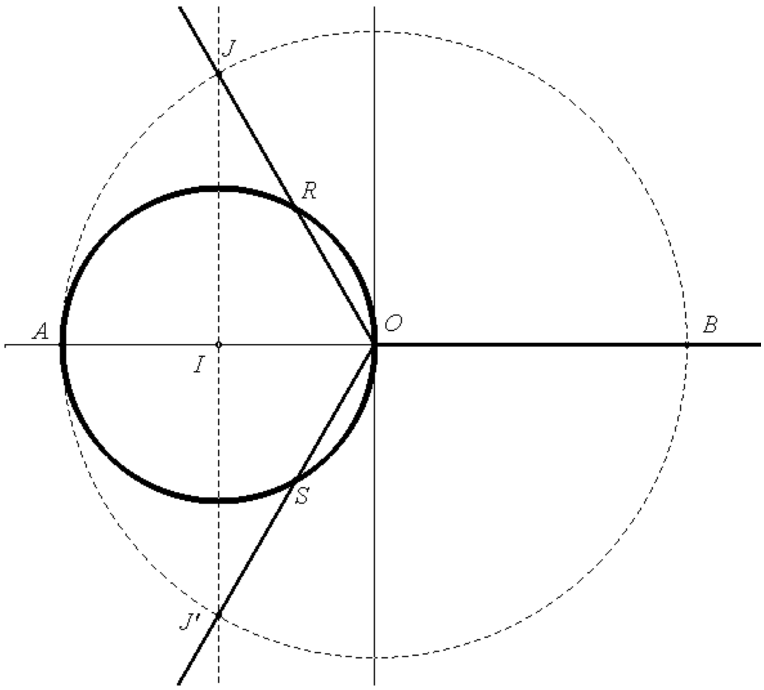
   (c) $M(z) \in \mathcal{C} \Leftrightarrow \begin{cases} z \notin \{0, 1, -1\} \\ \left(z + \frac{1}{2}\right)\overline{\left(z + \frac{1}{2}\right)} = \frac{1}{4} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z \notin \{0, 1, -1\} \\ \left|z + \frac{1}{2}\right|^2 = \frac{1}{4} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z \notin \{0, 1, -1\} \\ \left|z + \frac{1}{2}\right| = \frac{1}{2} \end{cases}$

   Notons I le point d'affixe $-\frac{1}{2}$. $\quad M \in \mathcal{C} \Leftrightarrow M \in \mathcal{E}$ et $IM = \frac{1}{2}$

   Ainsi $\boxed{\mathcal{C} \text{ est le cercle de centre } I \text{ et de rayon } \frac{1}{2} \text{ privé des points } O \text{ et } A.}$

3. (a) $z = r\mathrm{e}^{i\,\alpha}$ (avec $r > 0$ et $-\pi < \alpha \leq \pi$) donc $z^3 = r^3\mathrm{e}^{i\,3\alpha}$ (avec $r^3 > 0$) et $\arg(z^3) = 3\alpha$

   $M(z) \in \mathcal{F} \Leftrightarrow z^3 \in \mathbb{R}^{+*} \Leftrightarrow \arg(z^3) = 2k\pi\ (k \in \mathbb{Z}) \Leftrightarrow 3\alpha = 2k\pi\ (k \in \mathbb{Z}) \Leftrightarrow \alpha = k\frac{2\pi}{3}\ (k \in \mathbb{Z})$
   $\Leftrightarrow \left(\alpha = 0 \text{ ou } \alpha = \frac{2\pi}{3} \text{ ou } \alpha = -\frac{2\pi}{3}\right)$
   Notons J et J' les points d'affixes respectives $\mathrm{e}^{i2\pi/3}$ et $\mathrm{e}^{-i2\pi/3}$
   $\mathcal{F}$ est la réunion de trois demi-droites : $[OJ)$, $[OJ')$ et $[OB)$ privées des points O et B.
   $\boxed{\mathcal{F} = \left(\ [OJ) \cup [OJ') \cup [OB)\ \right) \setminus \{O, B\}}$



(b)

(c) D'après la figure, $\mathcal{C}$ et $\mathcal{F}$ ont deux points d'intersection R et S. Dès lors il existe exactement deux points M de $\mathcal{E}$ tels que le triangle MNP soit rectangle en P, l'affixe de P étant un réel strictement positif. Il s'agit des points R et S.

Le point R a pour affixe $z = r\,\mathrm{e}^{i2\pi/3}$ avec $r > 0$. Le triangle OIR est isocèle en I avec comme angle à la base $\widehat{IOR} = \pi - \dfrac{2\pi}{3} = \dfrac{\pi}{3}$. En conséquence le triangle OIR est équilatéral et $r = OR = OI = \dfrac{1}{2}$

$\boxed{\text{Les points } R \text{ et } S \text{ ont pour affixes respectives } \frac{1}{2}\mathrm{e}^{i2\pi/3} \text{ et } \frac{1}{2}\mathrm{e}^{-i2\pi/3}}$

Exercice 3

On introduit le repère orthonormal $\mathfrak{R} = (A\,; \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k})$ centré en A tel que

$$\overrightarrow{i} = \frac{1}{\left\|\overrightarrow{AB}\right\|}\overrightarrow{AB}\,, \qquad \overrightarrow{j} = \frac{1}{\left\|\overrightarrow{AC}\right\|}\overrightarrow{AC}\,, \qquad \overrightarrow{k} = \frac{1}{\left\|\overrightarrow{AD}\right\|}\overrightarrow{AD}$$

Dans ce repère, on a $A(0,0,0)\,,\ B(a,0,0)\,,\ C(0,a,0)\,,\ D(0,0,a)\,.$

1. Comme A_1 est le centre de gravité du triangle BCD, on a $\overrightarrow{AA_1} = \dfrac{1}{3}\left(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD}\right).$

   Donc $A_1(a/3, a/3, a/3)$. On a $\overrightarrow{CD}(0, -a, a)$ et $\overrightarrow{BC}(-a, a, 0)\,.$

   Donc $\overrightarrow{AA_1} \cdot \overrightarrow{CD} = (a/3)(0) + (a/3)(-a) + (a/3)(a) = 0$

   et $\overrightarrow{AA_1} \cdot \overrightarrow{BC} = (a/3)(-a) + (a/3)(a) + (a/3)(0) = 0.$

   Il en résulte que la droite (AA_1) est orthogonale aux droites (CD) et (BC) sécantes en C.

   $\boxed{(AA_1) \text{ est donc perpendiculaire au plan } (BCD)\,.}$

2. On note v le volume du tétraèdre $ABCD$. Alors $v = \dfrac{1}{3}\mathcal{A}_{BCD} \times AA_1 = \dfrac{1}{3}\mathcal{A}_{ABC} \times DA.$

   BCD est un triangle équilatéral de côté $BC = a\sqrt{2}$. Donc $\mathcal{A}_{BCD} = \dfrac{1}{2}BC \times BD \times \sin\dfrac{\pi}{3}$

   et $\mathcal{A}_{BCD} = \dfrac{1}{2}a\sqrt{2} \times a\sqrt{2} \times \dfrac{\sqrt{3}}{2} = \dfrac{1}{2}a^2\sqrt{3}.$ D'où $v = \dfrac{1}{3} \times \dfrac{1}{2}a^2\sqrt{3} \times AA_1 = \dfrac{1}{6}a^2\sqrt{3} \times AA_1$

De plus $\mathcal{A}_{ABC} = \dfrac{1}{2}a^2$. Donc $v = \dfrac{1}{3}\dfrac{1}{2}a^2 \times a = \dfrac{1}{6}a^3$. Ainsi $\dfrac{1}{6}a^2\sqrt{3} \times AA_1 = \dfrac{1}{6}a^3$.

Il en résulte que $AA_1 = \dfrac{\frac{1}{6}a^3}{\frac{1}{6}a^2\sqrt{3}} = \dfrac{1}{3}a\sqrt{3}$. Finalement $\boxed{AA_1 = \dfrac{1}{3}a\sqrt{3}}$

REMARQUE : le lecteur vérifiera que le point A_1 a, dans le repère $\mathfrak{R}$, pour coordonnées $A_1\left(a/3, a/3, a/3\right)$.

et simplement $AA_1 = \sqrt{\left(\dfrac{a}{3}\right)^2 + \left(\dfrac{a}{3}\right)^2 + \left(\dfrac{a}{3}\right)^2} = \sqrt{\dfrac{3}{9}a^2} = \dfrac{1}{3}a\sqrt{3}$

3. Soit G l'isobarycentre des points A, B, C et D. Soit I le milieu de $[BC]$.

   (a) On a G barycentre de $(A,1)$, $(B,1)$, $(C,1)$, $(D,1)$. De plus A_1 est barycentre de $(B,1)$, $(C,1)$, $(D,1)$. Donc par associativité du barycentre, G est barycentre de $(A,1)$, $(A_1, 3)$
   D'où $\overrightarrow{AG} = \dfrac{3}{1+3}\overrightarrow{AA_1} = \dfrac{3}{4}\overrightarrow{AA_1}$

   Il en résulte que $G \in [AA_1]$ et que $AG = \dfrac{3}{4}AA_1 = \dfrac{3}{4}\dfrac{1}{3}a\sqrt{3}$ $\boxed{AG = \dfrac{1}{4}a\sqrt{3}}$

   (b) Soit $E = \left\{M \ ; \ \left\|\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MD}\right\| = 2\left\|\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}\right\|\right\}$
   On sait, d'après le théorème de réduction vectorielle, que pour tout point M de l'espace, $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MD} = 4\overrightarrow{MG}$ et que $\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} = 2\overrightarrow{MI}$.
   Donc $\left\|\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MD}\right\| = 2\left\|\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}\right\| \iff 4MG = 4MI \iff MG = MI$.

   $\boxed{E \text{ est donc le plan médiateur du segment } [GI].}$

4. H est le symétrique de A par rapport à G.

   (a) $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} + \overrightarrow{GD} = \overrightarrow{0} \Longrightarrow 4\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{0} \Longrightarrow 4\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD} = -\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{BA}$

   (b) $HC^2 - HD^2 = \overrightarrow{HC}^2 - \overrightarrow{HD}^2 = \left(\overrightarrow{HC} - \overrightarrow{HD}\right)\left(\overrightarrow{HC} + \overrightarrow{HD}\right)$
   avec $\overrightarrow{HC} - \overrightarrow{HD} = \overrightarrow{DC}$ et $\overrightarrow{HC} + \overrightarrow{HD} = \left(\overrightarrow{HA} + \overrightarrow{AC}\right) + \left(\overrightarrow{HA} + \overrightarrow{AD}\right)$
   $\overrightarrow{HC} + \overrightarrow{HD} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD} + 2\overrightarrow{HA} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD} + 4\overrightarrow{GA}$ car $\overrightarrow{HA} = 2\overrightarrow{GA}$.
   $\overrightarrow{HC} + \overrightarrow{HD} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD} + 4\overrightarrow{GA} = \overrightarrow{BA}$ d'après 4.(a)
   Donc $\boxed{HC^2 - HD^2 = \overrightarrow{DC} \cdot \overrightarrow{BA}}$

   (c) $\overrightarrow{DC} \cdot \overrightarrow{BA} = \left(\overrightarrow{DA} + \overrightarrow{AC}\right) \cdot \overrightarrow{BA} = \overrightarrow{DA} \cdot \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{BA} = 0 + 0$ puisque $(DA) \perp (BA)$ et $(AC) \perp (BA)$.
   Il en résulte que $HC^2 = HD^2$ et donc que $\boxed{HC = HD}$

REMARQUES :

i) On a $AB = AC$ et $AC = AD$. Donc A appartient aux plans médiateurs des segments $[BC]$ et $[CD]$.

Le centre de gravité A_1 du triangle équilatéral BCD est aussi le centre du cercle circonscrit à ce triangle.

On a donc $A_1B = A_1C$ et $A_1C = A_1D$. Donc A_1 appartient aux plans médiateurs des segments $[BC]$ et $[CD]$.

Il en résulte que la droite (AA_1) est la droite d'intersection de ces deux plans médiateurs et que tout point de cette droite (dont le point H) est équidistant des points B, C et D.
On a donc $HB = HC = HD$

ii) Le lecteur pourra vérifier que dans le repère $\mathfrak{R}$ introduit, le point H a pour coordonnées $H\left(a/2, a/2, a/2\right)$ et que $HB = HC = HD = \dfrac{\sqrt{3}}{2}a$

Exercice 4

Partie A

Posons $I = [0;+\infty[$. $\forall x \in I,\ f(x) = \ln(1+x) - x$ et $g(x) = \ln(1+x) - x + \dfrac{x^2}{2}$

1. f et g sont dérivables sur I comme somme de deux fonctions dérivables sur I :
   $x \longmapsto \ln(1+x)$, $x \longmapsto -x$ et $x \longmapsto -x + \dfrac{x^2}{2}$, et on a pour tout $x \in I$,
   $f'(x) = \dfrac{1}{x+1} - 1 = -\dfrac{x}{x+1}$ et $g'(x) = \dfrac{1}{x+1} - 1 + x = \dfrac{x^2}{x+1}$.
   Pour $x \in I$, on a $x+1 > 0$ et $-x \leq 0$. Plus précisément $\forall x > 0,\ f'(x) < 0$ avec $f'(0) = 0$
   Pour $x \in I,\ x \neq 0$, on a $\dfrac{x^2}{x+1} > 0$ et donc $\forall x > 0,\ g'(x) > 0$ avec $g'(0) = 0$.
   En conséquence, la fonction f est strictement décroissante sur I et g est strictement croissante sur I.
2. Il en résulte que pour $x \geq 0$, $f(x) \leq f(0)$ et $g(x) \geq g(0)$ avec $f(0) = \ln(1+0) - 0 = 0$ et $g(0) = 0$.
   D'où $\forall x \geq 0,\ f(x) \leq 0$ et $\forall x \geq 0,\ g(x) \geq 0$
   On a donc la double inégalité $\boxed{\forall x \geq 0,\ x - \dfrac{x^2}{2} \leq \ln(1+x) \leq x}$

Partie B

Soit u la suite définie par $\begin{cases} u_1 = \dfrac{3}{2} \\ u_{n+1} = u_n\left(1 + \dfrac{1}{2^{n+1}}\right) \end{cases}$

1. Montrons par récurrence sur $n \in \mathbb{N}^*$ que $u_n > 0$.
   i) $u_1 = \dfrac{3}{2} > 0$. L'inégalité est donc vraie pour $n = 1$.
   ii) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On suppose que $u_n > 0$. Montrons alors sous cette hypothèse, que $u_{n+1} > 0$.
   $u_{n+1} = u_n\left(1 + \dfrac{1}{2^{n+1}}\right)$ est strictement positif comme produit de deux nombres strictement positifs.
   iii) Conclusion : d'après le principe de récurrence, $u_n > 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$
2. Montrons par récurrence sur $n \in \mathbb{N}^*$ que

$$\ln(u_n) = \sum_{k=1}^{n} \ln\left(1 + \frac{1}{2^k}\right) \tag{1}$$

   i) $\ln(u_1) = \ln\left(\dfrac{3}{2}\right) = \ln\left(1 + \dfrac{1}{2}\right)$. L'égalité est donc vraie pour $n = 1$.

   ii) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On suppose que $\ln(u_n) = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \ln\left(1 + \dfrac{1}{2^k}\right)$

   $\ln(u_{n+1}) = \ln\left(u_n\left(1 + \dfrac{1}{2^{n+1}}\right)\right) = \ln(u_n) + \ln\left(1 + \dfrac{1}{2^{n+1}}\right)$ car $u_n > 0$ et $1 + \dfrac{1}{2^{n+1}} > 0$.

   $\ln(u_{n+1}) = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \ln\left(1 + \dfrac{1}{2^k}\right) + \ln\left(1 + \dfrac{1}{2^{n+1}}\right)$ d'après l'hypothèse de récurrence.

   $\ln(u_{n+1}) = \displaystyle\sum_{k=1}^{n+1} \ln\left(1 + \dfrac{1}{2^k}\right)$. L'égalité est récurrente.

   iii) Conclusion : d'après le principe de récurrence, $\ln(u_n) = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \ln\left(1 + \dfrac{1}{2^k}\right)$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$

3. Soit $n \in \mathbb{N}^*$, n fixé. On a posé $S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2^k}$ et $T_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{4^k}$.

   En appliquant la double inégalité de la question **A**.2. avec $x = \dfrac{1}{2^k}$ réel positif, il vient :

$$\forall\, k \in \{1, 2, \dots, n\}, \quad \frac{1}{2^k} - \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2^k}\right)^2 \leq \ln\left(1 + \frac{1}{2^k}\right) \leq \frac{1}{2^k}$$

   Par sommation membre à membre de ces n encadrements, on obtient

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2^k} - \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{2^k}\right)^2 \leq \sum_{k=1}^{n} \ln\left(1 + \frac{1}{2^k}\right) \leq \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2^k}$$

   Or $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{2^k}\right)^2 = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2^{2k}} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{4^k}$.

   Donc l'encadrement $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2^k} - \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{4^k} \leq \sum_{k=1}^{n} \ln\left(1 + \frac{1}{2^k}\right) \leq \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2^k}$ s'écrit aussi

$$S_n - \frac{1}{2}T_n \leq \ln(u_n) \leq S_n$$

4. S_n (resp. T_n) est la somme de n termes consécutifs d'une suite géométrique de raison $\dfrac{1}{2}$ $\left(\text{resp. } \dfrac{1}{4}\right)$.

   On sait (résultat du cours) que $S_n = \dfrac{1}{2} \times \dfrac{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n}{1 - \frac{1}{2}} = 1 - \left(\dfrac{1}{2}\right)^n$ et $T_n = \dfrac{1}{4} \times \dfrac{1 - \left(\frac{1}{4}\right)^n}{1 - \frac{1}{4}} = \dfrac{1}{3}\left[1 - \left(\dfrac{1}{4}\right)^n\right]$

   Comme $0 < \dfrac{1}{2} < 1$ et $0 < \dfrac{1}{4} < 1$, on a $\displaystyle\lim_{n \to +\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n = 0$ et $\displaystyle\lim_{n \to +\infty} \left(\frac{1}{4}\right)^n = 0$

   Par conséquent $\boxed{\displaystyle\lim_{n \to +\infty} S_n = 1 \text{ et } \lim_{n \to +\infty} T_n = \frac{1}{3}}$

5. (a) Les termes de la suite (u_n) étant strictement positifs, on peut comparer $\dfrac{u_{n+1}}{u_n}$ à 1.

   $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} = 1 + \dfrac{1}{2^{n+1}}$. Donc $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} > 1$, il en résulte que $u_{n+1} > u_n$ car $u_n > 0$.
   La suite $(u_n)_{n \geq 1}$ est donc strictement croissante.

   (b) On sait que $\forall\, n \in \mathbb{N}^*$, $\ln(u_n) \leq S_n \leq 1 - \dfrac{1}{2^n} < 1$. Donc $\forall\, n \in \mathbb{N}^*$, $u_n < e$.

   La suite $(u_n)_{n \geq 1}$ est croissante et majorée par e. Elle est donc convergente (théorème de convergence des suites monotones). On note ℓ sa limite.

   (c) $\left.\begin{array}{l} \displaystyle\lim_{n \to +\infty} u_n = \ell \\ \displaystyle\lim_{x \to \ell} \ln x = \ln \ell \end{array}\right\}$ donc par composition $\displaystyle\lim_{n \to +\infty} \ln(u_n) = \ln \ell$

   en raison de la continuité de la fonction ln en ℓ ($\ell \geq u_1 > 0$ par croissance de la suite (u_n)).

   D'après le résultat admis (passage à la limite dans une inégalité) et la question **B**.3., on a :

   $\displaystyle\lim_{n \to +\infty} \left(S_n - \frac{1}{2}T_n\right) \leq \lim_{n \to +\infty} \ln(u_n) \leq \lim_{n \to +\infty} S_n$

   soit $1 - \dfrac{1}{2}\dfrac{1}{3} \leq \ln \ell \leq 1$ d'où $\dfrac{5}{6} \leq \ln \ell \leq 1$ puis par croissance de la fonction exp sur $\mathbb{R}$,

   $\boxed{e^{5/6} \leq \ell \leq e}$