Final - MT25

La présentation, la lisibilité et la qualité de la rédaction entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.

L'utilisation de toute calculatrice, de tout matériel électronique et de tout formulaire est interdite.

Exercice 1 : Vrai ou Faux (5 points)

Indiquer pour chacune des cinq affirmations suivantes si elle est Vraie ou Fausse. Justifier chaque réponse.

1. Il existe une matrice carrée $A \in \mathfrak{M}_3(\mathbb{R})$ telle que $A^2 = -I_3$.

2. La matrice $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ est diagonalisable dans $\mathfrak{M}_3(\mathbb{R})$.

3. Dans l'espace vectoriel $\mathbb{R}^3$ muni du produit scalaire usuel, le projeté orthogonal du vecteur $\overrightarrow{u} = (1\,,2\,,3)$ sur le plan F d'équation $x+y+z=0$, est le vecteur $\overrightarrow{w} = (1\,,-2\,,1)$.

4. On note $\mathscr{B}_0$ la base canonique de l'espace euclidien orienté $\mathbb{R}^3$. Dans la base $\mathscr{B}_0$, la matrice $A = \dfrac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 & \sqrt{2} \\ 1 & 1 & -\sqrt{2} \\ -\sqrt{2} & \sqrt{2} & 0 \end{pmatrix}$ représente une rotation d'axe dirigé par $\overrightarrow{n} = (1\,,1\,,0)$.

5. Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ la fonction $2\pi-$périodique définie par : $\forall\, x \in]-\pi\,,\,\pi],\ f(x) = x^2$.
Alors f est partout égale à la somme de sa série de Fourier.

Exercice 2 : série exponentielle (4 points)

On pose pour tout entier naturel n, $\quad u_n = \dfrac{(n+1)^2}{n!}2^n$

1. Établir la convergence de la série $\sum u_n$.
2. Déterminer les trois constantes réelles a, b et c telles que pour tout entier naturel n,
$$(n+1)^2 = a\,n(n-1) + b\,n + c$$
3. Calculer la somme $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(n+1)^2}{n!}2^n$

Exercice 3 : courbe paramétrée (5 points)

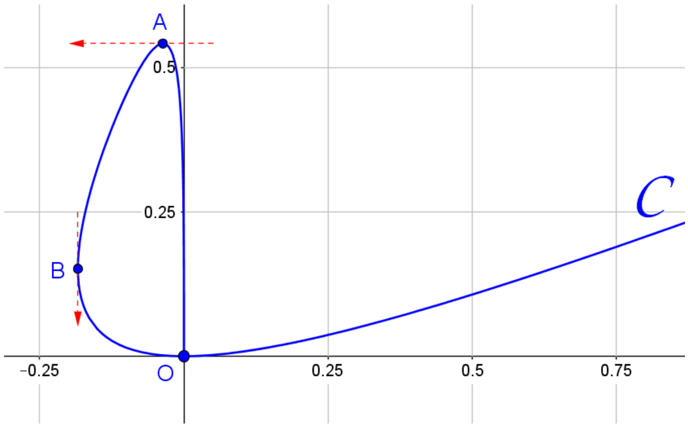
On admet que $\lim\limits_{t\to 0} t\,\ln t = 0$ et que $\lim\limits_{t\to 0} t\,(\ln t)^2 = 0$.

Dans le plan rapporté à un repère orthonormé $\left(O\,;\vec{i}\,,\vec{j}\right)$, on considère la courbe $\mathscr{C}$ de représentation paramétrique

$$\begin{cases} x(t) &= t^2\,\ln t \\ y(t) &= t\,(\ln t)^2 \end{cases} \qquad \text{avec} \qquad t \in]0\,,+\infty[.$$

On note $M(t)$ le point de la courbe $\mathscr{C}$ associé au paramètre t.

1. Calculer les dérivées des fonctions x et y sur l'intervalle $]0\,,+\infty[$.
2. Dresser le tableau des variations conjointes de $t \longmapsto \big(x(t)\,,\,y(t)\big)$.
3. On a représenté ci-dessous la courbe $\mathscr{C}$.



Préciser les coordonnées des points A et B de $\mathscr{C}$, en lesquels les tangentes sont parallèles respectivement à l'axe $(O;\vec{i}\,)$ et à l'axe $(O;\vec{j}\,)$.

4. Montrer que la courbe $\mathscr{C}$ admet une branche infinie dont on précisera la nature (*asymptote* ou *branche parabolique*).

Exercice 4 : symétrie orthogonale (7 points)

On munit $\mathbb{R}^3$ de sa structure euclidienne canonique. Soit $\mathscr{B}_0 = (e_1\,,e_2\,,e_3)$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$. On désigne par F le sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$ engendré par les vecteurs $u = (1,1,1)$ et $v = (1,2,3)$.

1. Construire une base orthonormale $(\varepsilon_1\,,\varepsilon_2)$ de F.
   Compléter cette base en une base orthonormale directe $\mathscr{B}'$ de $\mathbb{R}^3$.
2. Soit p la projection orthogonale sur F.
   (a) Déterminer la matrice A de p dans la base canonique $\mathscr{B}_0$.
   (b) Calculer la distance du vecteur e_1 au sous-espace F.
3. Soit s la symétrie orthogonale par rapport à F.
   (a) Exprimer s en fonction de p et de l'application identité de $\mathbb{R}^3$.
   (b) En déduire la matrice B de s dans la base canonique $\mathscr{B}_0$.
   (c) Donner une matrice diagonale D et une matrice orthogonale P telles que
   $$B = P\,D\,{}^{\mathbf{t}}P$$
4. Soit k un nombre réel. On considère la matrice $M = \begin{pmatrix} k+2 & 2 & -1 \\ 2 & k-1 & 2 \\ -1 & 2 & k+2 \end{pmatrix}$.
   (a) Exprimer M comme combinaison linéaire des matrices B et I_3.
   (b) Diagonaliser sans calcul la matrice M.
   (c) En déduire le déterminant de M. Pour quels réels k la matrice M est-elle inversible ?