Exercice 1 (a)

1. Il existe une matrice carrée $A \in \mathfrak{M}_3(\mathbb{R})$ telle que $A^2 = -I_3$. FAUX

   sinon on aurait $\det(A^2) = \det(-I_3)$ d'où $\big(\det(A)\big)^2 = (-1)^3 \det(I_3) = -1$ ce qui est impossible car $\det(A) \in \mathbb{R}$ et $\big(\det(A)\big)^2 \geqslant 0$.

2. La matrice $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ est diagonalisable dans $\mathfrak{M}_3(\mathbb{R})$. VRAI

   car elle est symétrique à coefficients réels.

3. Dans $\mathbb{R}^3$ muni du produit scalaire usuel, le projeté orthogonal de $\overrightarrow{u} = (1\,,2\,,3)$ sur le plan F d'équation $x+y+z=0$, est $\overrightarrow{w} = (1\,,-2\,,1)$. FAUX

   car $\overrightarrow{u} - \overrightarrow{w} = (0, 4, 2)$ n'est pas colinéaire à $\overrightarrow{n} = (1, 1, 1)$.
   Donc $\overrightarrow{u} - \overrightarrow{w}$ n'appartient pas à $F^\perp$.

4. Dans la base canonique $\mathscr{B}_0$ de $\mathbb{R}^3$, la matrice $A = \dfrac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 & \sqrt{2} \\ 1 & 1 & -\sqrt{2} \\ -\sqrt{2} & \sqrt{2} & 0 \end{pmatrix}$ représente une rotation d'axe dirigé par $\overrightarrow{n} = (1\,,1\,,0)$. VRAI

   Notons C_1, C_2 et C_3 les colonnes de A. On vérifie que :

   - $\langle C_1 \mid C_2 \rangle = 0$
   - $\|C_1\|^2 = \|C_2\|^2 = 1$
   - $C_1 \wedge C_2 = C_3$

   Donc les vecteurs colonnes de A forment une base orthonormale directe de $\mathfrak{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ ce qui signifie que la matrice A est orthogonale directe et représente bien une rotation de $\mathbb{R}^3$ dont l'angle n'est pas égal à zéro modulo π car $A \neq I_3$ et A n'est pas symétrique.

   Posons $X = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ la matrice colonne des coordonnées de $\overrightarrow{n}$ dans $\mathscr{B}_0$.

   On vérifie que $AX = X$ ce qui signifie que $\overrightarrow{n}$ est invariant par la rotation de matrice A dans $\mathscr{B}_0$.

5. Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ la fonction $2\pi-$périodique définie par :
   $\forall\, x \in]-\pi\,,\,\pi]$, $f(x) = x^2$. Alors f est partout égale à la somme de sa série de Fourier. VRAI

   Conséquence du théorème de Dirichlet dans le cas d'une fonction f, continue sur $\mathbb{R}$, $2\pi-$périodique et de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux sur $\mathbb{R}$.

Exercice 1 (b)

1. Soit $A \in \mathfrak{M}_3(\mathbb{C})$ une matrice carrée d'ordre 3 à coefficients complexes telle que $A^3 = I_3$. Alors le déterminant de A est nécessairement égal à 1. FAUX

   Comme $A^3 = I_3$, on a $\det(A^3) = \det(I_3) = 1$ d'où $(\det(A))^3 = 1$. Or $\det(A) \in \mathbb{C}$.
   Donc $\det(A)$ est une racine cubique de l'unité :
   $\det(A) = 1$ ou $\det(A) = \mathrm{e}^{i\frac{2\pi}{3}}$ ou $\det(A) = \mathrm{e}^{-i\frac{2\pi}{3}}$

2. La matrice $\begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 5 & 1 & 0 \\ -8 & 3 & 0 \end{pmatrix}$ est diagonalisable dans $\mathfrak{M}_3(\mathbb{R})$. VRAI.

   cette matrice étant triangulaire inférieure, ses valeurs propres sont les coefficients de sa diagonale : 4, 1 et 0. Comme elle est d'ordre 3, et admet 3 valeurs propres 2 à 2 distinctes, cette matrice est diagonalisable.

3. Dans $\mathbb{R}^3$ muni du produit scalaire usuel, le projeté orthogonal du vecteur $\overrightarrow{u} = (1\,,2\,,3)$ sur le plan F d'équation $x+y+z=0$, est le vecteur $\overrightarrow{w} = (-1\,,0\,,1)$. VRAI

   car $\overrightarrow{w} \in F$ et $\overrightarrow{u} - \overrightarrow{w} = (2, 2, 2) \in F^\perp$.

4. Dans la base canonique $\mathscr{B}_0$ de $\mathbb{R}^3$, la matrice $A = \dfrac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 2 & -2 & -1 \\ -1 & -2 & 2 \end{pmatrix}$ représente une symétrie orthogonale par rapport à un plan. FAUX

   car la matrice d'une symétrie orthogonale doit être à la fois orthogonale et symétrique. Mais A n'est pas symétrique.

5. Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $2\pi-$périodique définie par $f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in [0\,,\,\pi] \\ -1 & \text{si } x \in]-\pi\,,\,0[\end{cases}$
   Alors f est partout égale à la somme de sa série de Fourier. FAUX

   D'après le théorème de Dirichlet, la série de Fourier de f converge en tout point vers **la régularisée** de f qui est la fonction $x \longmapsto \dfrac{1}{2}\big(f(x^-) + f(x^+)\big)$

$$\forall\, x \in \mathbb{R},\ a_0(f) + \sum_{n=0}^{+\infty} \big(a_n(f)\,\cos(nx) + b_n(f)\,\sin(nx)\big) = \frac{1}{2}\left(\lim_{t \to x^-} f(t) + \lim_{t \to x^+} f(t)\right)$$

   Mais ici, $1 = f(0) \neq \dfrac{1}{2}\left(\lim\limits_{t \to 0^-} f(t) + \lim\limits_{t \to 0^+} f(t)\right) = 0$

Exercice 2

$\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = \dfrac{(n+1)^2}{n!} 2^n$

1. $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n > 0$ et pour tout entier $n \in \mathbb{N}$,

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{(n+2)^2}{(n+1)!}2^{n+1} \times \frac{n!}{(n+1)^2\,2^n} = \frac{2\,(n+2)^2}{(n+1)^3} \underset{(n\to+\infty)}{\sim} \frac{2\,n^2}{n^3} = \frac{2}{n}$$

Or $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{2}{n} = 0$. D'où $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{u_{n+1}}{u_n} = 0$ avec $0 < 1$.

La **règle de d'Alembert** permet de conclure que la série $\sum u_n$ est convergente.

2. On suppose qu'il existe trois constantes réelles $a,\ b$ et c telles que pour tout entier naturel n, $(n+1)^2 = a\,n(n-1) + b\,n + c$.

Alors $\forall n \in \mathbb{N},\ n^2 + 2\,n + 1 = a\,n^2 + (b-a)\,n + c$. Donc, par identification, $\begin{cases} a = 1 \\ b - a = 2 \\ c = 1 \end{cases}$. Puis $a = 1,\ b = 3$ et $c = 1$.

On vérifie ensuite que $\forall n \in \mathbb{N},\ n(n-1) + 3\,n + 1 = n^2 + 2\,n + 1 = (n+1)^2$.

3. Les séries exponentielles $\sum \dfrac{1}{n!}2^n$, $\sum \dfrac{n}{n!}2^n$ et $\sum \dfrac{n(n-1)}{n!}2^n$ sont convergentes et on rappelle que $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!}2^n = \mathrm{e}^2$

$$\begin{aligned}
\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(n+1)^2}{n!}2^n &= \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{n(n-1)+3\,n+1}{n!}\right) 2^n \quad \text{d'après 2.} \\
&= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n(n-1)}{n!}2^n + 3\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n}{n!}2^n + \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!}2^n \\
&= \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{n(n-1)}{n(n-1)(n-2)!}2^n + 3\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n}{n(n-1)!}2^n + \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!}2^n \\
&= \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{(n-2)!}2^n + 3\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(n-1)!}2^n + \mathrm{e}^2 \\
&= 4\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{(n-2)!}2^{n-2} + 3\times 2\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(n-1)}2^{n-1} + \mathrm{e}^2 \\
&= 4\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{k!}2^k + 6\sum_{j=0}^{+\infty} \frac{1}{j!}2^j + \mathrm{e}^2 \\
&= 4\,\mathrm{e}^2 + 6\,\mathrm{e}^2 + \mathrm{e}^2
\end{aligned}$$

Ainsi $\boxed{\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(n+1)^2}{n!}2^n = 11\,\mathrm{e}^2}$

Exercice 3

On pose pour tout réel $t > 0$, $\begin{cases} x(t) = t^2\,\ln t \\ y(t) = t\,(\ln t)^2 \end{cases}$

1. Les fonctions x et y sont dérivables sur l'intervalle $]0\,,\,+\infty[$

et $\forall\, t > 0$, $\begin{cases} x'(t) = 2t\ln t + t^2\,\dfrac{1}{t} = t\,(1 + 2\ln t) \\[2ex] y'(t) = (\ln t)^2 + t(2\ln t)\dfrac{1}{t} = (2 + \ln t)\,\ln t \end{cases}$

2. • Pour $t > 0$, $x'(t)$ est du signe $1 + 2\ln t$.

$x'(t) > 0 \iff 1 + 2\ln t > 0 \iff \ln t > -1/2 \iff t > \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}}$

• $y'(t) = 0 \iff 2 + \ln t = 0$ ou $\ln t = 0 \iff t = \mathrm{e}^{-2}$ ou $t = 1$

• Tableau de signes pour obtenir le signe de $y'(t)$:

t	0		e^{-2}		1		$+\infty$
$2+\ln t$	$\Vert$	$-$	0	$+$	$\vert$	$+$	
$\ln t$	$\Vert$	$-$	$\vert$	$-$	0	$+$	
$y'(t)$	$\Vert$	$+$	0	$-$	0	$+$	

• Calculons les images par les fonctions x et y des réels : 1 , e^{-2} , $e^{-1/2}$

$x(1) = y(1) = 0$; $x(e^{-2}) = e^{-4}\ln(e^{-2}) = -2e^{-4}$;

$y(e^{-2}) = e^{-2}\left(\ln(e^{-2})\right)^2 = 4e^{-2}$; $x\left(e^{-1/2}\right) = e^{-1}\ln\left(e^{-1/2}\right) = -\dfrac{1}{2}e^{-1} = -\dfrac{1}{2e}$;

$y\left(e^{-1/2}\right) = e^{-1/2}\left(\ln e^{-1/2}\right)^2 = e^{-1/2}\,\dfrac{1}{4} = \dfrac{1}{4\sqrt{e}}$

• On a admis que $\lim\limits_{t\to 0} t\,\ln t = 0$ et que $\lim\limits_{t\to 0} t\,(\ln t)^2 = 0$.

Alors $\lim\limits_{t\to 0} x(t) = 0$ et $\lim\limits_{t\to 0} y(t) = 0$. On prolonge donc par continuité en zéro les fonctions x et y en posant $x(0) = y(0) = 0$.

Étudions à présent la dérivabilité en zéro des fonctions x et y.

$$\forall t>0,\ \frac{x(t)-x(0)}{t-0} = t\,\ln t \underset{(t\to 0)}{\longrightarrow} 0$$

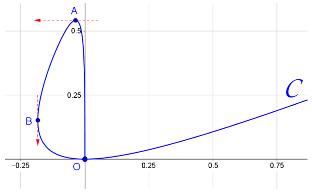
La fonction x est donc dérivable en 0 et $x'(0) = 0$.

$$\forall t>0,\ \frac{y(t)-y(0)}{t-0} = (\ln t)^2 \underset{(t\to 0)}{\longrightarrow} +\infty$$

La fonction y n'est donc pas dérivable en 0.

t	0		e^{-2}		$e^{-1/2}$		1		$+\infty$
$x'(t)$	0	$-$		$-$	0	$+$		$+$	
$x(t)$	0	$\searrow$	$-2e^{-4}$	$\searrow$	$-\dfrac{1}{2e}$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$
$y(t)$	0	$\nearrow$	$4e^{-2}$	$\searrow$	$\dfrac{1}{4\sqrt{e}}$	$\searrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$
$y'(t)$	$\Vert$	$+$	0	$-$		$-$	0	$+$	

3. On a représenté ci-dessous la courbe $\mathscr{C}$.



$A = M(e^{-2})$ et $B = M\left(e^{-1/2}\right)$. Donc

$$A\left(-2e^{-4}\,,\,4e^{-2}\right) \text{ et } B\left(-\frac{1}{2e}\,,\,\frac{1}{4\sqrt{e}}\right)$$

4. $\lim\limits_{t\to+\infty} x(t) = +\infty$ et $\lim\limits_{t\to+\infty} y(t) = +\infty$.
Donc la courbe $\mathscr{C}$ présente une branche infinie en $+\infty$.

$$\forall t>1,\ \frac{y(t)}{x(t)} = \frac{t\,(\ln t)^2}{t^2\,\ln t} = \frac{\ln t}{t} \underset{(t\to+\infty)}{\longrightarrow} 0$$

Par conséquent la courbe paramétrée $\mathscr{C}$ présente au voisinage de $+\infty$ une branche parabolique de direction horizontale $\left(O\,;\,\vec{i}\right)$.

Exercice 4

Soit $\mathscr{B}_0 = (e_1\,,\,e_2\,,\,e_3)$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$.
On pose $u = (1,1,1)$, $v = (1,2,3)$ et $F = \text{Vect}(u,v)$.

1. • On applique le procédé d'orthonormalisation de Gram-Schmidt.

On pose $g_1 = u = (1,1,1)$ et $g_2 = v - \dfrac{\langle v \mid g_1\rangle}{\|g_1\|^2}\,g_1 = v - \dfrac{6}{3}u = v - 2u = (-1,0,1)$.

Alors (g_1, g_2) est une base orthogonale de F.

En prenant $\varepsilon_1 = \dfrac{1}{\|g_1\|}\,g_1 = \dfrac{1}{\sqrt{3}}(1,1,1)$ et $\varepsilon_2 = \dfrac{1}{\|g_2\|}\,g_2 = \dfrac{1}{\sqrt{2}}(-1,0,1)$,

on obtient $(\varepsilon_1\,,\,\varepsilon_2)$ comme base orthonormale du plan vectoriel F.

• Posons $\varepsilon_3 = \varepsilon_1 \wedge \varepsilon_2 = \dfrac{1}{\sqrt{6}}\,g_1 \wedge g_2$. Alors ε_3 a pour coordonnées dans la base $\mathscr{B}_0$,

$$\frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix}1\\-2\\1\end{pmatrix}$$

Donc $\varepsilon_3 = \dfrac{1}{\sqrt{6}}(1,-2,1)$ et la famille $\mathscr{B}' = (\varepsilon_1\,,\,\varepsilon_2\,,\,\varepsilon_3)$ est une base orthonormale directe de $\mathbb{R}^3$.

2. Soit p la projection orthogonale sur F.

(a) • **1ère méthode** utilisant une base orthonormale de F.

On sait d'après le cours (thm8 - ch3) que

$$\forall\, x \in \mathbb{R}^3,\ p(x) = \langle x \mid \varepsilon_1\rangle\ \varepsilon_1 + \langle x \mid \varepsilon_2\rangle\ \varepsilon_2 = \frac{1}{3}\langle x \mid g_1\rangle\ g_1 + \frac{1}{2}\langle x \mid g_2\rangle\ g_2$$

$$\text{D'où}\ \begin{cases} p(e_1) = \frac{1}{3}g_1 - \frac{1}{2}g_2 = \left(\frac{1}{3},\frac{1}{3},\frac{1}{3}\right) - \left(-\frac{1}{2},0,\frac{1}{2}\right) = \left(\frac{5}{6},\frac{1}{3},-\frac{1}{6}\right) \\ p(e_2) = \frac{1}{3}g_1 = \left(\frac{1}{3},\frac{1}{3},\frac{1}{3}\right) \\ p(e_3) = \frac{1}{3}g_1 + \frac{1}{2}g_2 = \left(\frac{1}{3},\frac{1}{3},\frac{1}{3}\right) + \left(-\frac{1}{2},0,\frac{1}{2}\right) = \left(-\frac{1}{6},\frac{1}{3},\frac{5}{6}\right) \end{cases}$$

$$\text{Ainsi}\ \ A = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}_0}(p) = \begin{pmatrix} 5/6 & 1/3 & -1/6 \\ 1/3 & 1/3 & 1/3 \\ -1/6 & 1/3 & 5/6 \end{pmatrix} = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} 5 & 2 & -1 \\ 2 & 2 & 2 \\ -1 & 2 & 5 \end{pmatrix}$$

• **2ème méthode** utilisant la droite vectorielle $F^\perp = \mathrm{Vect}(\varepsilon_3)$.

On désigne par $p_{F^\perp}$ la projection orthogonale sur $F^\perp$.

On sait que $\mathbb{R}^3 = F \oplus F^\perp$ d'où $\forall\, x \in \mathbb{R}^3,\ x = p(x) + p_{F^\perp}(x)$.

Donc $p = \mathrm{id}_{\mathbb{R}^3} - p_{F^\perp}$ puis en passant aux matrices dans la base canonique $\mathscr{B}_0$, $\quad A = I_3 - \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}_0}(p_{F^\perp})$

Or $\forall\, x \in \mathbb{R}^3,\ p_{F^\perp}(x) = \langle x \mid \varepsilon_3\rangle\ \varepsilon_3 = \frac{1}{6}\langle x \mid g_3\rangle\ g_3$ où $g_3 = (1,-2,1)$.

$$\text{Donc}\ \begin{cases} p_{F^\perp}(e_1) = \frac{1}{6}\,g_3 \\ p_{F^\perp}(e_2) = -\frac{1}{3}\,g_3 \\ p_{F^\perp}(e_3) = \frac{1}{6}\,g_3 \end{cases}$$

$$\text{Ainsi}\ \ A = I_3 - \frac{1}{6}\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ -2 & 4 & -2 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} 5 & 2 & -1 \\ 2 & 2 & 2 \\ -1 & 2 & 5 \end{pmatrix}$$

• **3ème méthode** utilisant les formules de changement de base.

Posons $A' = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}'}(p)$. Puisque $p(\varepsilon_1) = \varepsilon_1$, $p(\varepsilon_2) = \varepsilon_2$ et $p(\varepsilon_3) = 0_{\mathbb{R}^3}$,

$$A' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

On sait que $A' = P^{-1} A\, P$ où P désigne la matrice de passage de la base canonique $\mathscr{B}_0$ vers la base $\mathscr{B}'$.

$$P = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{3} & -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{6} \\ 1/\sqrt{3} & 0 & -2/\sqrt{6} \\ 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{6} \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix} \sqrt{2} & -\sqrt{3} & 1 \\ \sqrt{2} & 0 & -2 \\ \sqrt{2} & \sqrt{3} & 1 \end{pmatrix}$$

Comme $\mathscr{B}_0$ et $\mathscr{B}'$ sont des bases orthonormales de $\mathbb{R}^3$, la matrice P est orthogonale : $P \in \mathcal{O}_3(\mathbb{R})$ et $P^{-1} = {}^{\mathbf{t}} P$.

$$\text{Ainsi}\ \ A' = P^{-1} A\, P \Longrightarrow\ A = P\, A'\, P^{-1} = (P\, A')\, {}^{\mathbf{t}}P = \frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix} \sqrt{2} & -\sqrt{3} & 0 \\ \sqrt{2} & 0 & 0 \\ \sqrt{2} & \sqrt{3} & 0 \end{pmatrix} {}^{\mathbf{t}}P = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} 5 & 2 & -1 \\ 2 & 2 & 2 \\ -1 & 2 & 5 \end{pmatrix}$$

Cette méthode n'est envisageable qui si l'on dispose d'un logiciel de calcul matriciel.

(b) La distance du vecteur e_1 au sous-espace F est :

$$d(e_1, F) = \|e_1 - p(e_1)\| = \left\|\left(\frac{1}{6}, -\frac{1}{3}, \frac{1}{6}\right)\right\| = \frac{1}{6}\,\|(1,-2,1)\| = \frac{\sqrt{6}}{6}$$

3. Soit s la symétrie orthogonale par rapport à F.

(a) D'après le cours (prop5 - ch4), $\quad s = 2p - \mathrm{id}_{\mathbb{R}^3}$.

(b) $B = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}_0}(s) = 2\,\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}_0}(p) - \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}_0}(\mathrm{id}_{\mathbb{R}^3}) = 2\,A - I_3$.

$$\text{D'où}\quad B = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 5 & 2 & -1 \\ 2 & 2 & 2 \\ -1 & 2 & 5 \end{pmatrix} - \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

(c) $s(\varepsilon_1) = \varepsilon_1$, $s(\varepsilon_2) = \varepsilon_2$, et $s(\varepsilon_3) = -\varepsilon_3$.
Donc la matrice de s dans la base $\mathscr{B}'$ est diagonale. On la note D : $D = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}'}(s) = \mathrm{diag}(1,1,-1)$. On désigne par P la matrice de passage de la base canonique $\mathscr{B}_0$ vers la base $\mathscr{B}'$. D'après les formules de changement de base, $D = P^{-1}\, B\, P$ d'où $B = P\, D\, P^{-1}$. Or, comme $\mathscr{B}_0$ et $\mathscr{B}'$ sont des bases orthonormales de $\mathbb{R}^3$, la matrice P est orthogonale et $P^{-1} = {}^{\mathbf{t}} P$.

Ainsi $B = P\,D\,{}^{\mathbf{t}}P$ avec

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad P = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} \sqrt{2} & -\sqrt{3} & 1 \\ \sqrt{2} & 0 & -2 \\ \sqrt{2} & \sqrt{3} & 1 \end{pmatrix}$$

4. Soit $k \in \mathbb{R}$. On considère la matrice $M = \begin{pmatrix} k+2 & 2 & -1 \\ 2 & k-1 & 2 \\ -1 & 2 & k+2 \end{pmatrix}$.

(a) $M = \begin{pmatrix} 2 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & 2 \end{pmatrix} + k\,I_3 = 3\,B + k\,I_3$.

(b)
$$\begin{aligned} M &= 3(PD\,{}^{\mathbf{t}}P) + k(P\,{}^{\mathbf{t}}P) \\ &= P(3\,D)\,{}^{\mathbf{t}}P + P(k\,I_3)\,{}^{\mathbf{t}}P \\ &= (P\,3D + P\,kI_3)\,{}^{\mathbf{t}}P \\ &= P\,(3\,D + k\,I_3)\,{}^{\mathbf{t}}P \\ &= P\,\Delta\,{}^{\mathbf{t}}P \end{aligned}$$

où $\Delta = 3\,D + k\,I_3 = \begin{pmatrix} 3+k & 0 & 0 \\ 0 & 3+k & 0 \\ 0 & 0 & -3+k \end{pmatrix}$

(c)
- M est semblable à la matrice diagonale $\Delta = \mathrm{diag}(3+k, 3+k, k-3)$.
  Donc $\det(M) = \det(\Delta) = (3+k)^2(k-3)$.
- M est inversible ssi $\det(M) \neq 0$ c.à.d. $k \neq -3$ et $k \neq 3$.

$$M \in GL_3(\mathbb{R}) \iff k \in \mathbb{R} \setminus \{-3\,,\,3\}$$