Examen final - MT25

La présentation, la lisibilité et la qualité de la rédaction entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.

L'utilisation de toute calculatrice, de tout matériel électronique et de tout formulaire est interdite. Les exercices 1 et 2 seront rédigés sur une même première copie. Les exercices 2 et 3 seront rendus sur deux autres copies différentes.

Exercice 1 : Vrai ou Faux - Première copie (4 points)

Indiquer pour chacune des quatre affirmations suivantes si elle est Vraie ou Fausse. Justifier chaque réponse.

1. On pose $A = \begin{pmatrix} a & c & c \\ c & a & b \\ c & b & a \end{pmatrix} \in \mathfrak{M}_3(\mathbb{R})$.
   Le déterminant de la matrice A est : $\det(A) = (a-b)(a^2+ab-2c^2)$.
2. La matrice $T = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ est diagonalisable dans $\mathfrak{M}_3(\mathbb{R})$.
3. Une matrice carrée est diagonalisable si, et seulement si, son polynôme caractéristique est scindé, à racines simples (c'est-à-dire de multiplicité égale à 1).
4. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Alors $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \sqrt{k} \leqslant n\sqrt{\frac{n+1}{2}}$

Exercice 2 : série de Fourier - Première copie (4 points)

Soit q un paramètre réel tel que $0 < q < 1$. On note $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ la fonction 2π-périodique telle que

$$\forall t \in [-\pi\,,\,\pi],\ f(t) = \cos(q\,t)$$

La série de Fourier de f en t est notée $S(f)(t) = a_0 + \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} a_n \cos(nt) + b_n \sin(nt)$.

On obtient avec le logiciel Maxima :

```
(%i2)  load(fourie)$   fourier(cos(q*t),t,%pi);
```

(%t2) $a_0 = \dfrac{\sin(\pi q)}{\pi q}$ (%t3) $a_n = \dfrac{2\left(\frac{\sin(\pi q+\pi n)}{2q+2n} + \frac{\sin(\pi q-\pi n)}{2q-2n}\right)}{\pi}$ (%t4) $b_n = \ldots\ldots$

1. Que valent les b_n pour $n \in \mathbb{N}^*$? Justifier.
2. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Écrire sous la forme d'un seul quotient simplifié, le coefficient a_n.
3. (a) Justifier que f est égale à la somme de sa série de Fourier.

   (b) En déduire la valeur exacte de la somme $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2-q^2}$

Exercice 3 : courbe paramétrée - Deuxième copie (4 points)

On rappelle que

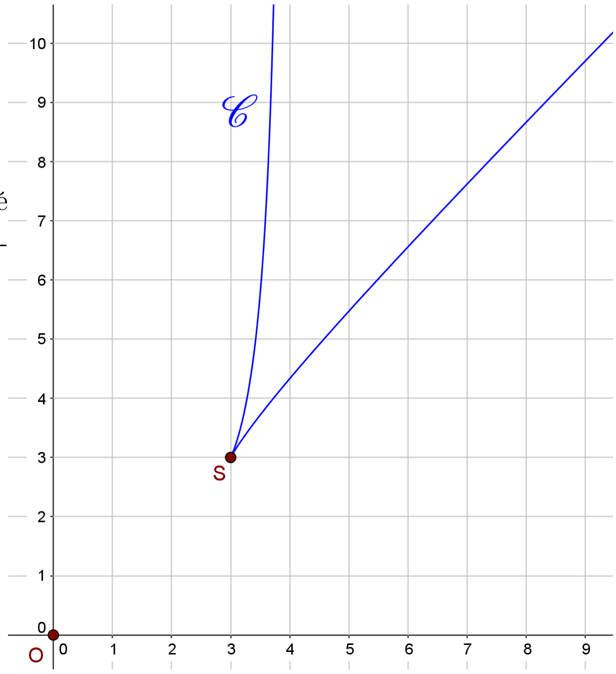
$$\frac{1}{1+u} = 1 - u + u^2 - u^3 + o(u^3)$$

Dans le plan rapporté à un repère orthonormé $\left(O\,;\overrightarrow{i}\,,\overrightarrow{j}\right)$, on considère la courbe $\mathscr{C}$ de représentation paramétrique

$$\begin{cases} x(t) &=& t - 1 + \dfrac{4}{t} \\ y(t) &=& t + \dfrac{1}{t-1} \end{cases}$$

avec $t \in]1\,,+\infty[$.

On a représenté ci-contre la courbe $\mathscr{C}$.



1. Étudier les deux branches infinies de la courbe $\mathscr{C}$.
   On donnera les équations réduites des asymptotes éventuelles.
2. Montrer que la courbe $\mathscr{C}$ admet un seul point stationnaire S.
3. On pose pour tout réel $t > 1$, $f(t) = (x(t)\,, y(t))$.
   (a) Calculer le développement limité à l'ordre 3 au voisinage de 2 de la fonction vectorielle f.
   (b) Étudier localement la courbe $\mathscr{C}$ au point S en précisant un vecteur tangent à $\mathscr{C}$ en S et la position de $\mathscr{C}$ par rapport à sa tangente en S.

Exercice 4 : matrices et espace euclidien - Troisième copie (8 points)

Soit $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 2$. On note :

- ${}^tU$ la transposée d'une matrice U,
- $\mathrm{Ker}(M) = \{X \in \mathfrak{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \mid MX = \mathbb{O}_{n,1}\}$ et $\mathrm{Im}(M) = \{MX \in \mathfrak{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \mid X \in \mathfrak{M}_{n,1}(\mathbb{R})\}$

où M est une matrice carrée appartenant à $\mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$.

On munit $\mathfrak{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ de son produit scalaire canonique $\langle X \mid Y\rangle = {}^tXY$ et on note $\|\cdot\|$ sa norme associée.
On se donne une matrice $A \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$ et on pose $B = {}^tAA$.

1. (a) Simplifier ${}^tB$ puis montrer que $\forall X \in \mathfrak{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, $\langle BX \mid X\rangle = \|AX\|^2$.
   (b) Démontrer que toutes les valeurs propres de B sont **réelles** *et* **positives**.
2. On suppose dorénavant qu'il existe un entier k supérieur ou égal à 2 tel que $\boxed{A^k = {}^tA}$.
   (a) Justifier que $A = ({}^tA)^k$. Prouver que $B^k = B$.
   (b) Quelles sont les valeurs propres possibles pour B ?
   (c) En déduire que $B^2 = B$.
3. (a) Montrer, par double inclusion, que $\mathrm{Ker}(B) = \mathrm{Ker}(A)$.
   (b) Justifier que $\mathrm{Im}(B) \subset \mathrm{Im}(A)$. En déduire que $\mathrm{Im}(B) = \mathrm{Im}(A)$.
   (c) Établir que $\forall X \in \mathrm{Im}(A)$, $\|AX\| = \|X\|$.