

Exercice 1

1. **Vrai.** $\det(A) = \begin{vmatrix} a & c & c \\ c & a & b \\ c & b & a \end{vmatrix} \stackrel{C_3 \leftarrow C_3 - C_2}{=} \begin{vmatrix} a & c & 0 \\ c & a & b-a \\ c & b & a-b \end{vmatrix} \stackrel{\text{par linéarité}}{=} (a-b) \begin{vmatrix} a & c & 0 \\ c & a & -1 \\ c & b & 1 \end{vmatrix}$

$\stackrel{L_2 \leftarrow L_2 + L_3}{=} (a-b) \begin{vmatrix} a & c & 0 \\ 2c & a+b & 0 \\ c & b & 1 \end{vmatrix} = (a-b) \begin{vmatrix} a & c & 0 \\ 2c & a+b & 0 \\ c & b & \boxed{1} \end{vmatrix} = (a-b) \times 1 \begin{vmatrix} a & c \\ 2c & a+b \end{vmatrix}$

$= (a-b)(a(a+b) - 2cc) = (a-b)(a^2 + ab - 2c^2)$

2. **Faux.** La matrice $T = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ est triangulaire supérieure. Ses valeurs

propres sont donc les coefficients situés sur sa diagonale, à savoir 0 (de multiplicité 2) et 2 (de multiplicité 1). Le sous-espace propre associé à la valeur propre zéro est aussi le noyau de la matrice $T : \text{Ker}(T) = \{U \in \mathfrak{M}_{3,1}(\mathbb{R}) \mid TU = \mathbf{0}_{3,1}\}$. Or la matrice T est clairement de rang égal à 2 et d'après le *théorème du rang* : $\dim(\text{Ker } T) + \text{rg}(T) = \dim(\mathbb{R}^3)$. Par conséquent $\dim(\text{Ker } T) = 3 - 2 = 1$.

La dimension du sous-espace propre associé à la valeur propre zéro, n'est pas égale à l'ordre de multiplicité de zéro en tant que racine du polynôme caractéristique de T . Ainsi T n'est pas diagonalisable dans $\mathfrak{M}_3(\mathbb{R})$.

3. **Faux.** La matrice identité I_2 est diagonale donc diagonalisable. Son polynôme caractéristique est $(1 - X)^2$. Il est scindé mais admet une seule racine qui est double.

4. **Vrai.** On se place dans l'espace euclidien \mathbb{R}^n muni du produit scalaire canonique. On pose $\vec{u} = (1, 1, 1, \dots, 1)$ et $\vec{w} = (\sqrt{1}, \sqrt{2}, \sqrt{3}, \dots, \sqrt{n})$.

Alors d'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz, $|\langle \vec{u} \mid \vec{w} \rangle| \leq \|\vec{u}\| \times \|\vec{w}\|$

avec $\begin{cases} \langle \vec{u} \mid \vec{w} \rangle = \sum_{k=1}^n \sqrt{k} \\ \|\vec{u}\| = \sqrt{\langle \vec{u} \mid \vec{u} \rangle} = \sqrt{n} \\ \|\vec{w}\| = \sqrt{1 + 2 + 3 + \dots + n} = \sqrt{\frac{n(n+1)}{2}} \end{cases}$

Donc $\sum_{k=1}^n \sqrt{k} \leq \sqrt{n} \sqrt{\frac{n(n+1)}{2}} = n \sqrt{\frac{n+1}{2}}$

Exercice 2 Soit $q \in \mathbb{R}$ tel que $0 < q < 1$.

1. La fonction f étant paire, nous avons $\forall n \in \mathbb{N}^*, b_n = 0$.

2. Soit $n \in \mathbb{N}^*$.
$$a_n = \frac{2 \left(\frac{\sin(\pi q + \pi n)}{2q + 2n} + \frac{\sin(\pi q - \pi n)}{2q - 2n} \right)}{\pi}$$

Or $\forall x \in \mathbb{R}, \sin(x + \pi n) = \sin(x - \pi n) = (-1)^n \sin x$. Donc en prenant $x = \pi q$,

$$a_n = \frac{2}{\pi} \left(\frac{(-1)^n \sin(\pi q)}{2q + 2n} + \frac{(-1)^n \sin(\pi q)}{2q - 2n} \right) = \frac{2(-1)^n \sin(\pi q)}{2\pi} \left(\frac{1}{q+n} + \frac{1}{q-n} \right)$$

$$= \frac{(-1)^n \sin(\pi q)}{\pi} \left(\frac{(q-n) + (q+n)}{(q+n)(q-n)} \right) = \frac{(-1)^n \sin(\pi q)}{\pi} \left(\frac{2q}{q^2 - n^2} \right)$$

Ainsi
$$a_n = \frac{-2q \sin(\pi q) (-1)^n}{\pi(n^2 - q^2)}$$

3. (a) La fonction f est 2π -périodique. Sa restriction au segment $[-\pi, \pi]$ est de classe \mathcal{C}^1 . Donc f est de classe \mathcal{C}^1 par morceaux sur \mathbb{R} .

De plus f est continue en π car $\lim_{t \rightarrow \pi^-} f(t) = \lim_{t \rightarrow \pi^+} f(t) = f(\pi) = \cos(q\pi)$.

Par conséquent f est continue sur \mathbb{R} et le corollaire du *théorème de Dirichlet* assure que f est développable en série de Fourier et que pour tout réel t ,

$$\begin{aligned} f(t) &= S(f)(t) \\ &= a_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} [a_n \cos(nt) + b_n \sin(nt)] \\ &= \frac{\sin(\pi q)}{\pi q} - \frac{2q \sin(\pi q)}{\pi} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n^2 - q^2} \cos(nt) \end{aligned}$$

(b) En remplaçant t par π dans l'égalité ci-dessus, on obtient :

$$f(\pi) = \frac{\sin(\pi q)}{\pi q} - \frac{2q \sin(\pi q)}{\pi} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n^2 - q^2} \cos(n\pi)$$

c'est-à-dire $\cos(q\pi) = \frac{\sin(\pi q)}{\pi q} - \frac{2q \sin(\pi q)}{\pi} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2 - q^2}$

et enfin $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2 - q^2} = - \left(\cos(q\pi) - \frac{\sin(\pi q)}{\pi q} \right) \frac{\pi}{2q \sin(\pi q)}$

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2 - q^2} = \frac{1}{2q} \left(\frac{1}{q} - \frac{\pi \cos(q\pi)}{\sin(q\pi)} \right)$$

Exercice 3 $\begin{cases} x(t) = t - 1 + \frac{4}{t} \\ y(t) = t + \frac{1}{t-1} \end{cases}$ avec $t \in]1, +\infty[$.

1. • **Au voisinage de 1.** $\lim_{t \rightarrow 1^+} x(t) = 1 - 1 + 4 = 4$ et $\lim_{t \rightarrow 1^+} y(t) = +\infty$.
Par conséquent la droite d_1 d'équation $x = 4$ est asymptote verticale à la courbe \mathcal{C} .

• **Au voisinage de $+\infty$.** $\lim_{t \rightarrow +\infty} x(t) = +\infty$ et $\lim_{t \rightarrow +\infty} y(t) = +\infty$.
Donc la courbe \mathcal{C} présente une branche infinie en $+\infty$.
 $x(t) \underset{(t \rightarrow +\infty)}{\sim} t$ et $y(t) \underset{(t \rightarrow +\infty)}{\sim} t$.

D'où $\frac{y(t)}{x(t)} \underset{(t \rightarrow +\infty)}{\sim} \frac{t}{t} = 1$.

De plus $\forall t > 1, y(t) - 1 \times x(t) = \frac{1}{t-1} + 1 - \frac{4}{t} \xrightarrow{(t \rightarrow +\infty)} 1$

Par conséquent la droite d_2 d'équation $y = x + 1$ est asymptote oblique à la courbe \mathcal{C} .

2. On rappelle que le point M de paramètre t est un point stationnaire de \mathcal{C} ssi $x'(t) = 0$ et $y'(t) = 0$.

Les fonctions rationnelles x et y sont dérivables sur $]1, +\infty[$ et pour tout $t > 1$,

$$\begin{cases} x'(t) = 1 - \frac{4}{t^2} \\ y'(t) = 1 - \frac{1}{(t-1)^2} \end{cases}$$

Donc $M(t)$ est un point stationnaire ssi $1 = \frac{4}{t^2}$ et $1 = \frac{1}{(t-1)^2}$

c.à.d $t^2 = 4$ et $(t-1)^2 = 1$ c.à.d $t = 2$.

Ainsi le point S de paramètre 2, et de coordonnées $(3, 3)$ est le seul point stationnaire de \mathcal{C} .

3. On pose pour tout réel $t > 1, f(t) = (x(t), y(t))$.

(a) On calcule les développements limités à l'ordre 3 au voisinage de 2 de chacune des fonctions coordonnées x et y , ce qui revient à calculer les développements limités à l'ordre 3 au voisinage de 0 des fonctions $h \mapsto x(2+h)$ et

$h \mapsto y(2+h)$. Pour tout réel $h \in]-1, 1[$,

$$\begin{cases} x(2+h) = 1+h + \frac{4}{2+h} = 1+h + \frac{2}{1+(h/2)} \\ y(2+h) = 2+h + \frac{1}{1+h} \end{cases}$$

Or pour tout réel u voisin de 0, $\frac{1}{1+u} = 1 - u + u^2 - u^3 + o(u^3)$.

Donc par composition,

$$\begin{cases} x(2+h) = 1+h + 2 \left(1 - \frac{h}{2} + \frac{h^2}{4} - \frac{h^3}{8} + o(h) \right) = 3 + \frac{h^2}{2} - \frac{h^3}{4} + o(h^3) \\ y(2+h) = 2+h + 1 - h + h^2 - h^3 + o(h^3) = 3 + h^2 - h^3 + o(h^3) \end{cases}$$

On en déduit qu'au voisinage de 2,

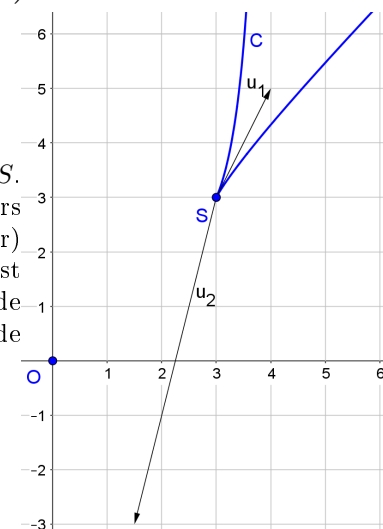
$$\begin{cases} x(t) = 3 + \frac{(t-2)^2}{2} - \frac{(t-2)^3}{4} + o((t-2)^3) \\ y(t) = 3 + (t-2)^2 - (t-2)^3 + o((t-2)^3) \end{cases}$$

Le développement limité à l'ordre 3 au voisinage de 2 de la fonction f est donné par :

$$f(t) = f(2) + \frac{(t-2)^2}{2!} \vec{u}_1 + \frac{(t-2)^3}{3!} \vec{u}_2 + (t-2)^3 \varepsilon(t)$$

avec $\vec{u}_1 = (1, 2)$, $\vec{u}_2 = \left(-\frac{3}{2}, -6\right)$ et $\lim_{t \rightarrow 2} \varepsilon(t) = (0, 0)$.

\vec{u}_1 est un vecteur tangent à \mathcal{C} en S .
En reprenant les notations du cours (ch6 II.4), nous avons ici $p = 2$ (pair) et $q = 3$ (impair). Le point S est donc un point de rebroussement de première espèce : la courbe passe de part et d'autre de sa tangente en S .



Exercice 4

1. (a) • ${}^t B = {}^t ({}^t A A) = ({}^t A) {}^t ({}^t A) = {}^t A A = B$.
 Donc B est une matrice symétrique de $\mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$.
 • Soit $X \in \mathfrak{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.

$$\langle BX | X \rangle = {}^t (BX) X = {}^t X {}^t B X = {}^t X B X = {}^t X ({}^t A A) X \\ = ({}^t X {}^t A) (A X) = {}^t (A X) (A X) = \langle A X | A X \rangle = \|AX\|^2$$

- (b) Puisque B est une matrice symétrique à coefficients réels, d'après le *théorème spectral*, ses valeurs propres sont réelles. Soit λ une valeur propre de B et X un vecteur propre associé. Alors par définition, $X \neq \mathbf{0}_{n,1}$ et $BX = \lambda X$.
 D'après la question précédente,

$$\|AX\|^2 = \langle BX | X \rangle = \langle \lambda X | X \rangle = \lambda \langle X | X \rangle = \lambda \|X\|^2$$

Or $\|X\|^2 \neq 0$ car $X \neq \mathbf{0}_{n,1}$.

Donc $\lambda = \frac{\|AX\|^2}{\|X\|^2}$ est un réel positif ou nul.

2. On suppose que $\exists k \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$; $A^k = {}^t A$.

- (a) • $A = {}^t ({}^t A) = {}^t (A^k) = ({}^t A)^k$.
 • De plus $B = {}^t A A = A^k A = A^{k+1}$. On en déduit que

$$B^k = (A^{k+1})^k = (A^k)^{k+1} = ({}^t A)^{k+1} = {}^t A ({}^t A)^k = {}^t A A = B$$

- (b) $X^k - X$ est un polynôme annulateur de la matrice B . Donc les valeurs propres de B , qui sont des réels positifs ou nuls, sont aussi des racines du polynôme $X^k - X = X(X^{k-1} - 1)$ sachant que $k \geq 2$.

Or les racines réelles positives ou nulles de $X(X^{k-1} - 1)$ sont 0 et 1.

Par conséquent les valeurs propres possibles pour B sont 0 et 1.

- (c) $B \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$ est une matrice symétrique réelle. Donc, d'après le *théorème spectral*, il existe une matrice orthogonale $P \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ et une matrice diagonale $D \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$ telles que $B = P D P^{-1} = P D {}^t P$.

Posons $D = \text{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n)$.

Alors les λ_k sont les valeurs propres de B .

Par conséquent $\forall k \in \llbracket 1, n \rrbracket$, $\lambda_k \in \{0, 1\}$. D'où $\forall k \in \llbracket 1, n \rrbracket$, $\lambda_k^2 = \lambda_k$

$$\text{puis } D^2 = \text{diag}(\lambda_1^2, \lambda_2^2, \dots, \lambda_n^2) = \text{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n) = D$$

$$\text{Enfin } B^2 = (P D P^{-1})^2 = P D^2 P^{-1} = P D P^{-1} = B$$

3. (a) • Soit $X \in \text{Ker}(B)$. Alors $BX = \mathbf{0}_{n,1}$. Donc, d'après 1.(a),

$$\|AX\|^2 = \langle BX | X \rangle = \langle \mathbf{0}_{n,1} | X \rangle = 0$$

D'où $\|AX\| = 0$ puis $AX = \mathbf{0}_{n,1}$. Ainsi $X \in \text{Ker}(A)$.

On vient de prouver que $\text{Ker}(B) \subset \text{Ker}(A)$.

- Réciproquement, soit $X \in \text{Ker}(A)$. Alors $AX = \mathbf{0}_{n,1}$.

$$\text{Donc } BX = ({}^t A A)X = {}^t A (A X) = {}^t A \mathbf{0}_{n,1} = \mathbf{0}_{n,1}$$

Ainsi $X \in \text{Ker}(B)$.

On vient de prouver que $\text{Ker}(A) \subset \text{Ker}(B)$.

Finalement $\text{Ker}(B) = \text{Ker}(A)$.

- (b) • Soit $Y \in \text{Im}(B)$. Alors $\exists X \in \mathfrak{M}_{n,1}(\mathbb{R})$; $Y = BX$.

D'où $Y = BX = ({}^t A A)X = A^k A A = A(A^k X) = AZ$
 en posant $Z = A^k X \in \mathfrak{M}_{n,1}(\mathbb{R})$. . Donc $y \in \text{Im}(A)$. Ainsi $\text{Im}(B) \subset \text{Im}(A)$.

- $\text{Im}(B)$ et $\text{Im}(A)$ sont deux sous-espaces vectoriels de $\mathfrak{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ qui est un \mathbb{R} -espace vectoriel de dimension finie.

Pour montrer que $\text{Im}(B) = \text{Im}(A)$, il suffit de prouver que $\text{Im}(B)$ et $\text{Im}(A)$ ont la même dimension.

D'après le *théorème du rang* (dans sa version matricielle qui consiste à «confondre» une application linéaire avec la matrice qui lui est canoniquement associée) :

$$\dim(\mathbb{R}^n) = \dim(\text{Ker} A) + \dim(\text{Im} A)$$

$$\text{et } \dim(\mathbb{R}^n) = \dim(\text{Ker} B) + \dim(\text{Im} B)$$

$$\text{d'où } \dim(\text{Im} A) = n - \dim(\text{Ker} A) \text{ et } \dim(\text{Im} B) = n - \dim(\text{Ker} B)$$

Or on a vu en 3.(a) que $\text{Ker}(B) = \text{Ker}(A)$.

Donc $\dim(\text{Im} A) = \dim(\text{Im} B)$.

- (c) Soit $X \in \text{Im}(A)$. Alors $X \in \text{Im}(B)$.

Par conséquent $\exists Z \in \mathfrak{M}_{n,1}(\mathbb{R})$; $X = BZ$. D'où $BX = B^2 Z = BZ = X$.

Ainsi, d'après 1.(a), $\|AX\|^2 = \langle BX | X \rangle = \langle X | X \rangle = \|X\|^2$.

Comme $\|AX\|$ et $\|X\|$ sont des réels positifs, $\|AX\| = \|X\|$.