Final MTA2 - Automne 2018
Durée : 1h30

Informations importantes

- **L'usage de la calculatrice est interdit.**
- **Le barème donné est susceptible d'être modifié.**
- **Les résultats non justifiés ne sont pas pris en compte.**
- **La présentation, la qualité de la rédaction, et la rigueur de raisonnement comptent pour une part importante dans la note.**
- **Chaque exercice doit être rédigé sur une nouvelle copie.**

Exercice 1 .... (5,5 points)

À rédiger sur une nouvelle copie

On considère la suite réelle définie par :

$$\begin{cases} u_0 = 1 \\ \forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = \dfrac{u_n}{2} + \dfrac{1}{u_n}. \end{cases}$$

On peut démontrer par récurrence que : $\forall n \in \mathbb{N},\ 1 \leqslant u_n \leqslant 2$. On admet ce résultat pour la suite.

1. On introduit la fonction $f : \begin{array}{ccc} [1,2] & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \dfrac{x}{2} + \dfrac{1}{x} \end{array}$.

   Justifier rapidement que f est dérivable puis démontrer que : $\forall x \in [1,2], \quad |f'(x)| \leqslant \dfrac{1}{2}$.
2. Résoudre l'équation $f(x) = x$ dans l'intervalle $[1,2]$.
3. Soit $n \in \mathbb{N}$. À l'aide de l'inégalité des accroissements finis appliquée à la fonction f, montrer que :

$$\left|u_{n+1} - \sqrt{2}\right| \leqslant \frac{1}{2}\,|u_n - \sqrt{2}|.$$

4. En déduire pour tout $n \in \mathbb{N}$ une majoration de $|u_n - \sqrt{2}|$ en fonction de $|u_0 - \sqrt{2}|$ et de n (on ne demande pas de faire la démonstration par récurrence mais simplement de donner la majoration).
5. En déduire que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge et donner sa limite.

Exercice 2 .... (6 points)

À rédiger sur une nouvelle copie

On considère la fonction f définie sur $[0,1[\cup]1,+\infty[$ par $f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x = 0 \\ \dfrac{x}{\ln x} & \text{sinon.} \end{cases}$

1. La fonction f est-elle dérivable en 0 ? Justifier.
2. Justifier rapidement que f est dérivable sur l'ensemble $]0,1[\cup]1,+\infty[$ et calculer alors f' en tout point de cet ensemble.
3. Démontrer que f' est continue en 0.
4. Dresser le tableau de variations de f sur son ensemble de définition. Compléter ce tableau en justifiant les limites aux bornes de l'ensemble de définition de f.

Exercice 3 .... (3,5 points)

Le but de cet exercice est de prouver que la fonction exp définie sur $\mathbb{C}$ par

$$\forall\, z \in \mathbb{C},\ \exp(z) = \mathrm{e}^{\mathrm{Re}(z)}\big[\cos\big(\mathrm{Im}(z)\big) + i\,\sin\big(\mathrm{Im}(z)\big)\big]$$

n'est pas polynomiale.

1. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $\exp(z) = 1$.
2. Supposons qu'il existe un polynôme $P \in \mathbb{C}[X]$ vérifiant : $\forall\, z \in \mathbb{C},\ P(z) = \exp(z)$. Quelles sont les racines du polynôme $Q = P - 1$?
3. Que peut-on dire d'un polynôme admettant une infinité de racines ?
4. Démontrer que la fonction exp n'est pas une fonction polynomiale.

Correction

Correction de l'exercice 1.

1. La fonction f est dérivable comme somme de fonctions dérivables usuelles. De plus, pour tout $x \in [1,2]$:
$$f'(x) = \frac{1}{2} - \frac{1}{x^2}$$
Or :
$$\begin{aligned} 1 \leqslant x \leqslant 2 &\implies 1 \leqslant x^2 \leqslant 4 && \text{(par croissance de la fonction carré sur } \mathbb{R}_+) \\ &\implies \frac{1}{4} \leqslant \frac{1}{x^2} \leqslant 1 && \text{(par décroissance de la fonction inverse sur } \mathbb{R}_+) \\ &\implies -1 \leqslant -\frac{1}{x^2} \leqslant -\frac{1}{4} \\ &\implies -\frac{1}{2} \leqslant f'(x) \leqslant \frac{1}{4} \end{aligned}$$
On a donc démontré que : $\forall x \in [1,2], \quad |f'(x)| \leqslant \frac{1}{2}$.
2. Soit $x \in [1,2]$, alors :
$$f(x) = x \iff \frac{x}{2} + \frac{1}{x} = x \iff x^2 - 2 = 0 \iff \left(x - \sqrt{2}\right)\left(x + \sqrt{2}\right) = 0$$
On en déduit que l'unique solution de $f(x) = x$ sur $[1,2]$ est $\sqrt{2}$.
3. La fonction f est dérivable sur l'intervalle $[1,2]$. De plus, d'après la question 1 : $\forall x \in [1,2],\ |f'(x)| \leqslant \frac{1}{2}$. Donc d'après l'inégalité des accroissements finis appliquée à f sur l'intervalle $[1,2]$, on a :
$$\forall (a,b) \in [1,2]^2,\ |f(b) - f(a)| \leqslant \frac{1}{2}\,|b-a|\,.$$
L'énoncé affirme : $1 \leqslant u_n \leqslant 2$ i.e. $u_n \in [1,2]$. On sait de plus que : $\sqrt{2} \in [1,2]$. On peut donc appliquer l'inégalité précédente avec $a = u_n$ et $b = \sqrt{2}$:
$$\left|f(u_n) - f(\sqrt{2})\right| \leqslant \frac{1}{2}\left|u_n - \sqrt{2}\right|.$$
On obtient l'inégalité demandée en remarquant que $f(u_n) = u_{n+1}$ et que $f(\sqrt{2}) = \sqrt{2}$.
4. Soit $n \geqslant 2$, alors :
$$\left|u_n - \sqrt{2}\right| \leqslant \frac{1}{2}\left|u_{n-1} - \sqrt{2}\right| \leqslant \left(\frac{1}{2}\right)^2\left|u_{n-2} - \sqrt{2}\right| \leqslant \left(\frac{1}{2}\right)^3\left|u_{n-3} - \sqrt{2}\right|$$
Ainsi, par une récurrence simple : $\forall n \in \mathbb{N}, \quad \left|u_n - \sqrt{2}\right| \leqslant \frac{1}{2^n}\left|u_0 - \sqrt{2}\right|.$
5. D'après la question précédente : $\forall n \in \mathbb{N},\ 0 \leqslant \left|u_n - \sqrt{2}\right| \leqslant \frac{1}{2^n}\left|u_0 - \sqrt{2}\right|$. Ainsi, d'après le théorème des gendarmes, la suite $(u_n)_n$ tend vers $\sqrt{2}$ lorsque n tend vers $+\infty$.

Correction de l'exercice 2.

1. f est dérivable en 0 si et seulement si $\lim\limits_{x\to 0} \frac{f(x)-f(0)}{x-0}$ existe et est finie. Or, pour tout $x \in]0,1[\cup]1,+\infty[$ on a :
$$\frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \frac{\frac{x}{\ln x} - 0}{x} = \frac{1}{\ln x}.$$
Puisque $\lim\limits_{x\to 0} \ln x = -\infty$, on en déduit que $\lim\limits_{x\to 0} \frac{1}{\ln x} = 0$. Ainsi, $\lim\limits_{x\to 0} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = 0$, donc f est dérivable en 0 et $f'(0) = 0$.

2. La fonction ln est dérivable sur $\mathbb{R}_*^+$ donc sur $]0,1[\cup]1,+\infty[$ et ne s'annule pas sur $]0,1[\cup]1,+\infty[$. La fonction $x \mapsto x$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ (en tant que fonction polynomiale). Ainsi f est dérivable sur $]0,[\cup]1,+\infty[$ comme quotient de fonctions dérivables. De plus,

$$\forall x \in]0,1[\cup]1,+\infty[, \quad f'(x) = \frac{\ln x - x \times \frac{1}{x}}{(\ln x)^2} = \frac{\ln x - 1}{(\ln x)^2}.$$

3. f' est continue en 0 si et seulement si $\lim\limits_{x\to 0} f'(x) = f'(0)$. D'après la question 1, $f'(0) = 0$. D'après la question 2 : $\lim\limits_{x\to 0} f'(x) = \lim\limits_{x\to 0} \frac{\ln x - 1}{(\ln x)^2} = \lim\limits_{x\to 0} \left(\frac{1}{\ln x} - \frac{1}{(\ln x)^2}\right)$. Puisque $\lim\limits_{x\to 0} \ln x = -\infty$, on a : $\lim\limits_{x\to 0} \frac{1}{\ln x} = 0$ et $\lim\limits_{x\to 0} \frac{1}{(\ln x)^2} = 0$. D'où $\lim\limits_{x\to 0} f'(x) = 0$. On a donc bien : $\lim\limits_{x\to 0} f'(x) = f'(0)$. Ainsi, f' est continue en 0.

4.
   - $\lim\limits_{x\to 1^-} \ln x = 0^-$ donc $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 1^-} \frac{x}{\ln x} = -\infty$. De même $\lim\limits_{x\to 1^-} \ln x = 0^+$ et $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = +\infty$.
   - Par croissances comparées, $\lim\limits_{x\to +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0^+$ donc $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x) = +\infty$.
   - D'après la question 2, pour tout $x \in]0,1[\cup]1,+\infty[$, $f'(x)$ est du signe de $\ln x - 1$.

   On peut donc établir le tableau de variations suivant pour f :

x	0		1		e		$+\infty$
signe de $f'(x)$		$-$	‖	$-$	0	$+$	
variations de f	0	↘	$-\infty$ ‖ $+\infty$	↘	e	↗	$+\infty$

Correction de l'exercice 3.

1. On rappelle que la forme exponentielle du nombre complexe 1 est $1e^{i0}$, autrement dit que $|1| = 1$ et $\arg(1) \equiv 0[2\pi]$. Soit $z \in \mathbb{C}$. Par définition, $\exp(z) = e^{\mathrm{Re}(z)} e^{i\mathrm{Im}(z)}$. Ainsi, $|\exp(z)| = e^{\mathrm{Re}(z)}$ et $\arg(\exp(z)) = \mathrm{Im}(z)$. On a donc en identifiant modules et arguments :

$$\begin{aligned}
\exp(z) = 1 &\iff \begin{cases} |\exp(z)| = |1| \\ \arg(\exp(z)) \equiv \arg(1)[2\pi] \end{cases} \\
&\iff \begin{cases} e^{\mathrm{Re}(z)} = 1 \\ \mathrm{Im}(z) \equiv 0[2\pi] \end{cases} \\
&\iff \begin{cases} \mathrm{Re}(z) = \ln(1) = 0 \\ \exists k \in \mathbb{Z},\ \mathrm{Im}(z) = k2\pi \end{cases} \\
&\iff \exists k \in \mathbb{Z},\ z = 0 + ik2\pi.
\end{aligned}$$

2. Les racines du polynôme Q sont les solutions z de l'équation $\exp(z) = 1$. Ce sont donc les nombres complexes de la forme $ik2\pi$ avec $k \in \mathbb{Z}$ (d'après la question 1).

3. Le seul polynôme qui admet une infinité de racines est le polynôme nul (car un polynôme non nul, de degré n, admet au plus n racines distinctes).

4. On raisonne par l'absurde. Supposons que la fonction exp soit polynomiale. Alors il existe un polynôme P tel que : $\forall z \in \mathbb{C},\ \exp(z) = P(z)$. D'après la question 2, on en déduit que le polynôme $Q = P - 1$ admet une infinité de racines (ses racines sont tous les nombres complexes $ik2\pi$ avec $k \in \mathbb{Z}$). On déduit de la question 3 que $Q = 0$. Ainsi, le polynôme P est constant égal à 1. Ce qui implique que : $\forall z \in \mathbb{Z}, \exp(z) = 1$. Or, il existe des nombres complexes z pour lesquels $\exp(z) \neq 1$, par exemple $\exp(i\frac{\pi}{2}) = i \neq 1$. On aboutit donc à une contradiction. Ainsi, la fonction exp n'est pas polynomiale.

Exercice 4 - QCM .... (5 points)

Les cases correspondant aux réponses exactes doivent être **complètement noircies**. Les bonnes réponses rapportent des points positifs, les mauvaises réponses rapportent des points négatifs.

1. Soient $(u_n)_n$ et $(v_n)_n$ deux suites réelles. Parmi les affirmations ci-dessous, la ou lesquelles sont vraies ?

☐ Une suite bornée est convergente.

☐ Si $(u_n)_n$ converge vers ℓ, alors $(u_n)_n$ est soit croissante et majorée, soit décroissante et minorée.

■ Une suite convergente est minorée.

☐ Si $u_n < v_n$ au voisinage de $+\infty$, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n < \lim\limits_{n\to+\infty} v_n$.

2. Cocher parmi les propositions ci-dessous l'équivalent de $\mathrm{e}^x - 1$ en 0 :

☐ $-x$ ☐ $-x^2$ ■ x ☐ $-\frac{x^2}{2}$ ☐ $\frac{x^2}{2}$

3. Les polynômes de degré 2 à coefficients réels sont irréductibles dans $\mathbb{R}[X]$.

☐ Vrai ■ Faux

4. « Définition : Un polynôme non constant $P \in \mathbb{K}[X]$ est dit ... dans $\mathbb{K}[X]$ si ses seuls diviseurs sont les polynômes constants et les polynômes de la forme λP avec $\lambda \in \mathbb{K}$. »
Compléter les pointillés de la définition ci-dessus en choisissant le mot qui convient parmi les deux propositions suivantes.

■ irréductible ☐ scindé

5. Parmi les affirmations ci-dessous, la ou lesquelles sont vraies ?

■ $n^2 + \ln(n) \sim_{+\infty} n^2$ ☐ $\mathrm{e}^{1+n} \sim_{+\infty} \mathrm{e}^n$ ☐ $\dfrac{2n^2+1}{n+n^2} \sim_{+\infty} 1$