Exercice 4 : Applications linéaires (5 points)

$\forall x \in \mathbb{R},\ \Phi(f)(x) = \int_x^{x+1} f(t)\,\mathrm{d}t$

1. (a) La fonction f est supposée continue sur $\mathbb{R}$, elle admet donc des primitives sur $\mathbb{R}$. Soit F l'une d'entre elles.
Pour tout réel x, on a : $\boxed{\Phi(f)(x) = F(x+1) - F(x)}$.
Comme F **est dérivable sur** $\mathbb{R}$, la fonction $\Phi(f)$ est aussi dérivable sur $\mathbb{R}$ et $\forall x \in \mathbb{R},\ (\Phi(f))'(x) = f(x+1) - f(x)$.
   (b) Soit $h : x \longmapsto |x|$. La fonction h est continue sur $\mathbb{R}$ et appartient donc à E, mais n'est pas pas dérivable en 0. Or pour toute fonction f de E, $\Phi(f)$ est dérivable sur $\mathbb{R}$. Donc h n'a pas d'antécédent par Φ, qui n'est donc **pas surjective**.

2. Soient f et g deux fonctions de E et λ un nombre réel. Alors pour tout réel x,

$$\begin{aligned}
\big(\Phi(\lambda f + g)\big)(x) &= \int_x^{x+1} (\lambda f + g)(t)\,\mathrm{d}t \quad \text{par définition de } \Phi \\
&= \int_x^{x+1} (\lambda f(t) + g(t))\ \mathrm{d}t \\
&= \lambda \int_x^{x+1} f(t)\,\mathrm{d}t + \int_x^{x+1} g(t)\,\mathrm{d}t \quad \text{par linéarité de l'intégrale} \\
&= \lambda\,\Phi(f)(x) + \Phi(g)(x) \\
&= \big(\lambda\,\Phi(f) + \Phi(g)\big)(x)
\end{aligned}$$

On en déduit que $\boxed{\Phi(\lambda f + g) = \lambda\,\Phi(f) + \Phi(g)}$.
Ainsi l'application Φ est linéaire.

3. Soit $g : x \longmapsto \cos(2\pi x)$ et $x \in \mathbb{R}$. Alors

$$\Phi(g)(x) = \int_x^{x+1} \cos(2\pi t)\,\mathrm{d}t = \left[\frac{\sin(2\pi t)}{2\pi}\right]_{t=x}^{t=x+1} = \frac{1}{2\pi}\left(\sin(2\pi x + 2\pi) - \sin(2\pi x)\right).$$

Or la fonction sin est $2\pi-$périodique. D'où $\sin(2\pi x + 2\pi) = \sin(2\pi x)$
puis $\boxed{\Phi(g)(x) = 0}$.

En désignant par $\tilde{0}$ la fonction constante égale à 0, on a donc $\Phi(g) = \tilde{0}$ avec $g \neq \tilde{0}$.

$\mathrm{Ker}(\Phi) \neq \{\tilde{0}\}$. Ainsi $\boxed{\Phi \text{ n'est pas injective}}$.

4. (a) Soit $P \in \mathbb{R}_2[x]$. Alors il existe des constantes réelles a, b et c telles que $\forall x \in \mathbb{R},\ P(x) = ax^2 + bx + c$. D'où

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \Phi(P)(x) = \int_x^{x+1} \left(at^2 + bt + c\right)\mathrm{d}t = \left[a\frac{t^3}{3} + b\frac{t^2}{2} + ct\right]_x^{x+1}$$
$$= \frac{a}{3}\left((x+1)^3 - x^3\right) + \frac{b}{2}\left((x+1)^2 - x^2\right) + c((x+1) - x)$$
$$= \frac{a}{3}\left(x^3 + 3x^2 + 3x + 1 - x^3\right) + \frac{b}{2}\left(x^2 + 2x + 1 - x^2\right) + c(x + 1 - x)$$
$$= \frac{a}{3}(3x^2 + 3x + 1) + \frac{b}{2}(2x+1) + c = a\,x^2 + (a+b)x + \left(\frac{a}{3} + \frac{b}{2} + c\right)$$

On constate que $\Phi(P) \in \mathbb{R}_2[x]$.

   (b) De la question précédente, en prenant successivement $(a,b,c) = (0,0,1)$; $(a,b,c) = (0,1,0)$ et enfin $(a,b,c) = (1,0,0)$, on obtient, pour tout réel x,

- $\varphi(e_0)(x) = \Phi(e_0)(x) = 1 = e_0(x)$
- $\varphi(e_1)(x) = \Phi(e_1)(x) = x + \frac{1}{2} = e_1(x) + \frac{1}{2}e_0(x)$
- $\varphi(e_2)(x) = \Phi(e_2)(x) = x^2 + x + \frac{1}{3} = e_2(x) + e_1(x) + \frac{1}{3}e_0(x)$

D'où $\boxed{\varphi(e_0) = e_0\ ; \quad \varphi(e_1) = \frac{1}{2}e_0 + e_1\ ; \quad \varphi(e_2) = \frac{1}{3}e_0 + e_1 + e_2}$

Et enfin

$$A = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(\varphi) = \begin{pmatrix} 1 & 1/2 & 1/3 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

   (c) La matrice A est triangulaire supérieure et ne comporte aucun zéro sur sa diagonale. Par conséquent A est inversible et comme $A = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(\varphi)$, on peut conclure que φ est un automorphisme de $\mathbb{R}_2[x]$.