Exercice 3 : matrices (6 points)

Soit $\mathscr{B} = (e_1\,,\, e_2\,,\, e_3)$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$.

$A = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(f) = \begin{pmatrix} 0 & -2 & -5 \\ -2 & 0 & 4 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, $u = e_1 - e_2 = (1,-1,0)$ et $w = e_1 + f(e_1)$

1. (a) Notons E_1 et W les matrices colonnes des coordonnées respectives de e_1 et w dans la base canonique $\mathscr{B}$. Le vecteur $f(e_1)$ a pour coordonnées la première colonne de la matrice A.

   Alors $W = E_1 + A\,E_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$

   D'où $\boxed{w = (1,-2,1)}$.

   (b) • *Première méthode* : montrons que la famille $\mathscr{C} = (u\,,\, w\,,\, e_1)$ est libre.

   Soit α_1, α_2 et α_3 des réels tels que $\alpha_1\, u + \alpha_2\, w + \alpha_3\, e_1 = \overrightarrow{0_{\mathbb{R}^3}}$.

   Alors $\alpha_1\,(1,-1,0) + \alpha_2\,(1,-2,1) + \alpha_3\,(1,0,0) = (0,0,0)$.

   D'où $\left\{\begin{array}{rcl} \alpha_1+\alpha_2+\alpha_3 & = & 0 \\ -\alpha_1 - 2\alpha_2 & = & 0 \\ \alpha_2 & = & 0 \end{array}\right.$ d'où $\left\{\begin{array}{rcl} \alpha_3 & = & -(\alpha_1+\alpha_2) \\ \alpha_1 & = & -2\alpha_2 \\ \alpha_2 & = & 0 \end{array}\right.$

   Donc $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 0$.

   Ainsi $\mathscr{C} = (u\,,\, w\,,\, e_1)$ est une **famille libre** de 3 vecteurs dans l'espace vectoriel $\mathbb{R}^3$ qui est de dimension 3. $\mathscr{C}$ est une base de E.

   • *Deuxième méthode* : déterminons le rang de la famille de vecteurs $\mathscr{C} = (u\,,\, w\,,\, e_1)$.

   Le rang de la famille $\mathscr{C}$ est égal au rang de la famille $(e_1\,,\, u\,,\, w)$

   qui a le même rang que la matrice $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

   Or cette dernière matrice est triangulaire supérieure et ne comporte aucun zéro sur sa diagonale. Elle est donc inversible et de rang 3.

   La famille $\mathscr{C}$ est de rang 3 et comporte 3 vecteurs. $\mathscr{C}$ est donc une famille libre et on conclut comme dans la première méthode.

   (c) La matrice de passage de la base $\mathscr{B}$ vers la base $\mathscr{C}$ est

   $$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

2. (a) Déterminer la matrice T de f dans la base $\mathscr{C}$ revient à exprimer les vecteurs $f(u)$, $f(w)$ et $f(e_1)$ comme combinaisons linéaires des vecteurs u, w, e_1.

   - $f(u) = f(e_1 - e_2) = f(e_1) - f(e_2)$ car f est linéaire.
     D'où $f(u) = (0,-2,1) - (-2,0,1) = (2,-2,0) = 2\cdot(1,-1,0) = 2\,u$
   - $f(w)$ a pour coordonnées dans la base canonique $\mathscr{B}$:

     $$AW = \begin{pmatrix} 0 & -2 & -5 \\ -2 & 0 & 4 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} = -W$$

     On en déduit que $f(w) = -w$
   - Par hypothèse, $w = e_1 + f(e_1)$. D'où $f(e_1) = w - e_1$.

   $$\text{Ainsi} \quad T = \mathrm{Mat}_{\mathscr{C}}(f) = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

   (b) La matrice T, qui représente f dans la base $\mathscr{C}$, est **triangulaire supérieure** et ne comporte **aucun zéro sur sa diagonale**.
   Par conséquent T est inversible et l'endomorphisme $\boxed{f \text{ est bijectif}}$.

   (c) D'après la formule de changement de base pour un endomorphisme,

   $$\boxed{T = P^{-1} A\, P}$$

3. Soit $X \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$. On pose $Y = P^{-1} X\, P$.

   (a) Par associativité du produit matriciel :
   $Y^2 = Y\,Y = \left(P^{-1}X\,P\right)\left(P^{-1}X\,P\right) = P^{-1}X\,(PP^{-1})X\,P = P^{-1}X\,I_3\,X\,P$
   $= P^{-1}X^2\,P$

   (b) On suppose que Y vérifie l'équation $(\star)$: $Y^2 - 2Y - I_3 = T$.
   Alors $P^{-1}X^2\,P - 2(P^{-1}X\,P) - I_3 = T$. Or $I_3 = P^{-1}P$.
   D'où $P^{-1}X^2\,P - 2\,P^{-1}X\,P - P^{-1}P = T$.
   En factorisant le premier membre à gauche par P^{-1}, on obtient :
   $P^{-1}\left(X^2\,P - 2X\,P - P\right) = T$. Puis $P^{-1}\left(X^2 - 2\,X + I_3\right)P = T$.

   Or d'après la question 2.(c), $T = P^{-1}A\,P$.
   Donc $P^{-1}\left(X^2 - 2\,X + I_3\right)P = P^{-1}A\,P$

   En multipliant les deux membres de l'égalité précédente, à gauche par P et à droite par P^{-1}, on obtient $X^2 - 2X - I_3 = A$.

4. (a) On pose $Y_0 = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & c \\ 0 & 0 & b \end{pmatrix}$ avec $a > 0$ et $b > 0$.

Alors $Y_0^2 = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & c \\ 0 & 0 & b \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & c \\ 0 & 0 & b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^2 & 0 & 0 \\ 0 & b^2 & 2bc \\ 0 & 0 & b^2 \end{pmatrix}$

D'où $Y_0^2 - 2Y_0 - I_3 = \begin{pmatrix} a^2-2a-1 & 0 & 0 \\ 0 & b^2-2b-1 & 2bc-2c \\ 0 & 0 & b^2-2b-1 \end{pmatrix}$

Donc Y_0 est solution de $(\star)$ si, et seulement si,

$$\begin{pmatrix} a^2-2a-1 & 0 & 0 \\ 0 & b^2-2b-1 & 2bc-2c \\ 0 & 0 & b^2-2b-1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\iff \begin{cases} a^2-2a-1 = 2 \\ b^2-2b-1 = -1 \\ 2bc-2c = 1 \end{cases} \iff \begin{cases} a^2-2a-3 = 0 \\ b^2-2b = 0 \\ 2c(b-1) = 1 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} (a+1)(a-3) = 0 \\ b(b-2) = 0 \\ 2c(b-1) = 1 \end{cases} \iff \begin{cases} a = -1 \text{ ou } a = 3 \\ b = 0 \text{ ou } b = 2 \\ c = \dfrac{1}{2(b-1)} \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} a = 3 & \text{car } a > 0 \\ b = 2 & \text{car } b > 0 \\ c = 1/2 \end{cases}$$

Finalement $Y_0 = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1/2 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

(b) En choisissant la matrice $X_0 \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ telle que $Y_0 = P^{-1}X_0\,P$, la question 3.(b) permet de dire que X_0 est une matrice solution de $X^2 - 2X - I_3 = A$.

Donc $\boxed{X_0 = P\,Y_0\,P^{-1}}$.

On pourrait calculer l'inverse de P et vérifier que $P^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

En effectuant ensuite deux produits matriciels, on obtiendrait :

$$X_0 = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 5 & -1 & -3 \\ -2 & 4 & 2 \\ 1 & 1 & 5 \end{pmatrix}$$