MTB - D - Contrôle 4

Nom : .... Prénom : ....

Exercice 1

Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $g(0) = 1$ et $\forall t \in \mathbb{R}^*,\ g(t) = \dfrac{\sin t}{t}$
On admet que g est continue sur $\mathbb{R}$. On pose pour tout réel x,

$$f(x) = \int_x^{2x} g(t)\,\mathrm{d}t$$

1. En introduisant une primitive G de g sur $\mathbb{R}$, justifier que f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et calculer $f'(x)$ pour tout réel x.
$\forall t \in \mathbb{R}^*,\ g(t) = \sin(t) \times (1/t)$
Comme les fonctions sinus et $t \mapsto \dfrac{1}{t}$ sont continues sur $\mathbb{R}^*$, g est continue au moins sur $\mathbb{R}^*$. On sait de plus que $\lim\limits_{t\to 0} \dfrac{\sin t}{t} = 1$ c'est-à-dire $\lim\limits_{t\to 0} g(t) = g(0)$ ce qui signifie que g est continue en zéro. Donc g est continue sur l'intervalle $\mathbb{R}$.
Ainsi g admet des primitives sur $\mathbb{R}$. Soit G l'une d'entre elles.
D'après *le théorème fondamental du calcul intégral*, $\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = G(2x) - G(x)$.
Or les fonctions $u : x \mapsto 2x$ et G sont dérivables sur $\mathbb{R}$. Donc la fonction composée $G \circ u$ est dérivable sur $\mathbb{R}$, puis $f = G \circ u - G$ est dérivable sur $\mathbb{R}$.
Enfin $\forall x \in \mathbb{R},\ f'(x) = G'\big(u(x)\big) \times u'(x) - G'(x) = 2\,g(2x) - g(x)$

$$\text{Ainsi} \quad \forall x \in \mathbb{R},\quad g'(x) = \begin{cases} \dfrac{\sin(2x) - \sin x}{x} & \text{si} \quad x \neq 0 \\ 1 & \text{si} \quad x = 0 \end{cases}$$

2. **a.** Rappeler le développement limité à l'ordre 4 au voisinage de 0 de $u \longmapsto \sin(u)$.
$\sin u = u - \dfrac{u^3}{6} + u^4\,\varepsilon_1(u)$ avec $\lim\limits_{u\to 0} \varepsilon_1(u) = 0$

b. En déduire le développement limité à l'ordre 4 au voisinage de 0 de la fonction $x \longmapsto \sin(2x) - \sin x$ puis le développement limité d'ordre 3 en zéro de la dérivée f'. Puisque $\lim\limits_{x\to 0} 2x = 0$,
$\sin(2x) = (2x) - \dfrac{(2x)^3}{6} + (2x)^4\varepsilon_1(2x) = 2x - \dfrac{4}{3}x^3 + x^4\,\varepsilon_2(x)$
D'où $\sin(2x) - \sin x = \left(2x - \dfrac{4}{3}x^3\right) - \left(x - \dfrac{x^3}{6}\right) + x^4\varepsilon_3(x) = x - \dfrac{7}{6}x^3 + x^4\varepsilon_3(x)$
Ainsi $f'(x) = 1 - \dfrac{7}{6}x^2 + x^3\,\varepsilon_3(x)$

c. Calculer le développement limité, à l'ordre 4, au voisinage de 0, de f. Par intégration terme à terme, $f(x) = \underbrace{f(0)}_{0} + x - \dfrac{7}{6}\dfrac{x^3}{3} + x^4\varepsilon(x) = x - \dfrac{7}{18}x^3 + x^4\varepsilon(x)$

Exercice 2

Soit E un $\mathbb{K}-$ espace vectoriel de dimension finie égale à 4.
On considère deux sous-espaces vectoriels F et G de E tels que

$$\dim F = \dim G = 3 \qquad \text{et} \qquad F \neq G$$

1. Démontrer que $2 \leqslant \dim(F \cap G) \leqslant 3$.

- G et $F \cap G$ sont deux sous-espaces vectoriels de E tels que $F \cap G \subset G$.
  D'où $\dim(F \cap G) \leqslant \dim G$ c'est-à-dire $\dim(F \cap G) \leqslant 3$.
- $F + G$ est un sous-espace vectoriel de E. D'où $\dim(F + G) \leqslant \dim E$ c'est-à-dire $\dim(F + G) \leqslant 4$.

  Or, d'après *la formule de Grassmann*, $\dim(F+G) = \dim F+\dim G-\dim(F\cap G)$.
  Donc $\dim(F \cap G) = \dim F + \dim G - \dim(F + G)$ avec $-\dim(F + G) \geqslant -4$.

  Ainsi $\dim(F \cap G) \geqslant 3 + 3 - 4$ c'est-à-dire $\dim(F \cap G) \geqslant 2$.

2. En déduire $\dim(F \cap G)$.

D'après la question précédente, $F \cap G$ est soit de dimension 2, soit de dimension 3.

Supposons que $\dim(F \cap G) = 3$.
Étant donné que $F \cap G$ est un sous-espace vectoriel de E tel que $F \cap G \subset F$ et que $\dim(F \cap G) = \dim F$, on obtient *(avec le théorème 14 (ii) du chapitre 3)* : $F \cap G = F$.

On justifie de façon analogue (en échangeant F et G) que $G \cap F = G$.
On en déduit que $F = F \cap G = G \cap F = G$, ce qui contredit l'hypothèse $F \neq G$.

Finalement $\boxed{\dim(F \cap G) = 2}$
puis d'après la formule de Grassmann, $\dim(F+G) = 4 = \dim(E)$. Ainsi $E = F+G$, mais cette somme n'est pas directe.