Probabilités - statistiques - SQ20

Tronc commun

Final - Printemps 2013

Durée de l'épreuve : 2 heures

La présentation, la lisibilité et la qualité de la rédaction entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.

Le formulaire distribué en cours est le seul document autorisé.
L'utilisation d'une calculatrice est conseillée.
Les deux exercices sont à rédiger sur des copies différentes.

Exercice 1 (10 points)

On cherche à évaluer le nombre N de poissons vivant dans un étang.
On prélève dans cet étang en une seule fois un échantillon de r poissons que l'on bague avant de les remettre dans l'étang. On propose deux méthodes différentes pour tenter d'estimer N.

Partie A

Soit n un entier naturel non nul. On prélève successivement, au hasard et avec remise n poissons. On désigne par Y_n le nombre de poissons marqués parmi eux.

1. Quelle est la loi de probabilité de la variable aléatoire Y_n ?
2. Montrer que $\dfrac{1}{n\,r}Y_n$ est un estimateur sans biais et convergent de $\dfrac{1}{N}$.
3. Pourquoi ne peut-on pas prendre $\dfrac{n\,r}{Y_n}$ comme estimateur de N ?

Partie B

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On prélève à présent des poissons dans l'étang, au hasard et avec remise. On note X_n la variable aléatoire égale au nombre de poissons qu'il a été nécessaire de pêcher pour obtenir n poissons marqués.
On pose $D_1 = X_1$ et pour tout entier i de $[\![2\,,\,n]\!]$, $D_i = X_i - X_{i-1}$.
On considère que les D_i sont des variables aléatoires mutuellement indépendantes.

1. (a) Soit i un entier fixé de $[\![2\,,\,n]\!]$. Justifier que la variable D_i suit une loi géométrique de paramètre $p = \dfrac{r}{N}$. Donner l'espérance et la variance de D_i en fonction de N et r.
   (b) Que peut-on dire de X_n et $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} D_i$? En déduire l'espérance et la variance de X_n.
   (c) On pose $Z_n = \dfrac{r}{n}X_n$. Montrer que Z_n est un estimateur sans biais et convergent de N.
2. Pour n assez grand, par quelle loi peut-on approcher la loi de la variable aléatoire X_n ?
3. On a marqué $r = 200$ poissons puis effectué 450 prélèvements pour obtenir $n = 50$ poissons marqués. On note σ l'écart-type de Z_{50}.
   Exprimer σ en fonction de N. Proposer une estimation ponctuelle de N.

Pensez à changer de copie.

<u>Exercice 2</u> (10 points)

Dans cet exercice, tous les résultats seront arrondis au dix-millième $\left(10^{-4}\right)$.

Une entreprise produit un certain type d'appareils et vient de mettre au point un procédé qui diminue très sensiblement le bruit émis par ces appareils. Elle veut savoir si elle peut écrire dans la fiche technique que ces appareils émettent en moyenne un niveau sonore de 59 décibels (dB). On modélise le bruit émis par un appareil tiré au hasard dans la production, par une variable aléatoire X qui suit une loi normale d'espérance μ et de variance σ^2.

L'entreprise prélève un échantillon de 25 appareils dans sa production.

Partie A : étude de l'échantillon

Les résultats de mesure du niveau sonore émis par chaque appareil de l'échantillon sont résumés dans le tableau suivant :

Niveau sonore (dB) x_i	58,8	58,9	59,0	59,1	59,2	59,3	59,4	59,5
Nombre d'appareils n_i	1	3	3	5	5	4	3	1

1. À l'aide de la calculatrice, calculer la moyenne $\overline{x_e}$ et la variance v_e de cette série statistique.
2. Donner une estimation ponctuelle $\widehat{\sigma}$ de l'écart-type de l'ensemble de la production.

Partie B : estimation de la variance par intervalle de confiance

Construire un intervalle de confiance pour la variance σ^2 au niveau de confiance 90%.

Partie C : élaboration d'un test

L'entreprise souhaite mettre en place un test bilatéral au risque usuel $\alpha = 5\,\%$.
Le test doit permettre de répondre à la question suivante :

« le niveau sonore moyen des appareils produits par l'entreprise est-il égal à 59 dB ? ».

Soit $\overline{X}$ la variable aléatoire qui, à tout échantillon aléatoire non exhaustif de $n = 25$ appareils prélevés dans la production, associe leur niveau sonore moyen (en dB).

1. Formuler l'hypothèse nulle H_0 et l'hypothèse alternative H_1.
2. Déterminer la zone d'acceptation, sous l'hypothèse nulle, au risque 5 %.
3. Énoncer la règle de décision et compte tenu de la moyenne $\overline{x_e}$ calculée sur l'échantillon de l'entreprise, conclure relativement à la question posée.