PROBABILITÉS - STATISTIQUES - SQ20

TRONC COMMUN

FINAL - PRINTEMPS 2014

DURÉE DE L'ÉPREUVE : 2 HEURES

La présentation, la lisibilité et la qualité de la rédaction entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.

Le formulaire distribué en cours est le seul document autorisé.
L'utilisation d'une calculatrice est conseillée.
Les exercices 2 et 3 sont à rédiger sur une copie différente de l'exercice 1.

Exercice 1 (6 points)

Une entreprise vend des bouchons de liège pour bouteilles de vin. Dans un souci de productivité, elle décide de traiter ses chênes-lièges avec des produits chimiques pour qu'ils développent leur écorce plus vite. Ces traités chimiques peuvent altérer le liège et donner par la suite un goût bouchonné aux bouteilles. Dans la suite, on notera p la proportion de bouchons présentant un tel défaut.
Un groupe de vignerons goûte 215 de ces bouteilles et en compte 13 bouchonnées.

1. Proposer une estimation ponctuelle de p.
2. Construire un intervalle de confiance pour p au niveau 99%.
3. Le vendeur de bouchons annonce que 3% de ses bouchons présentent un défaut. Proposer un test unilatéral à droite avec un seuil de risque de 1% pour vérifier l'affirmation du vendeur. Quelle décision prend-on ?

Exercice 2 (6 points)

Sur son ordinateur, Alice dispose d'une fonction générant des nombres aléatoires distribués selon la loi normale centrée réduite $\mathcal{N}(0,1)$. Bob l'a modifiée et la fonction retourne maintenant des nombres aléatoires suivant la loi normale $\mathcal{N}(\mu,\sigma)$. Il a mis Alice au défi de trouver μ et σ^2.

1. Alice a lancé la fonction 11 fois et obtenu les résultats suivants:

   $$1,71 \ast 0,89 \ast 0,43 \ast 1,58 \ast 1,74 \ast (-0,79) \ast 1,87 \ast 0,02 \ast (-0,04) \ast 0,22 \ast (-0,19)$$

   (a) Calculer une estimation ponctuelle de μ.
   (b) Calculer une estimation ponctuelle de σ^2.
   (c) Construire un intervalle de confiance au seuil 95% pour la moyenne μ.
   (d) Construire un intervalle de confiance au seuil 99% pour la variance σ^2.

2. À la place de Bob, comment auriez-vous fait pour fabriquer la nouvelle fonction à l'aide de celle déjà présente sur l'ordinateur ?

Exercice 3 (8 points)

Le fonctionnement d'une machine est perturbé par des pannes.
On considère les variables aléatoires X et Y définies comme suit :

- X est le temps, exprimé en années, écoulé entre la mise en route initiale de la machine et la première panne,
- Y est le temps, en années, écoulé entre la remise en route de la machine après la première panne et la panne suivante.

Après la deuxième panne, l'utilisation de la machine est suspendue.
On suppose que les variables aléatoires X et Y sont indépendantes et suivent la même loi exponentielle de paramètre $\lambda > 0$.

1. (a) Donner une densité f de X ainsi que sa fonction de répartition F.
   (b) Quelle est la durée moyenne de fonctionnement entre deux pannes consécutives ?
2. Exprimer, en fonction de λ, la probabilité pour que chacune des 2 périodes de fonctionnement de la machine dure plus de 3 années.
3. Soit S la variable aléatoire égale à la durée totale de fonctionnement de la machine, exprimée en années. On a donc $S = X + Y$.
   (a) Que valent $E(S)$ et $V(S)$?
   (b) On note h la fonction densité de probabilité de la variable aléatoire S. Démontrer que
   $$h(t) = \begin{cases} \lambda^2\, t\, \mathrm{e}^{-\lambda t} & \text{si } t \geqslant 0 \\ 0 & \text{si } t < 0 \end{cases}$$
   (c) En déduire, en fonction de λ et de x, l'expression de $P(S > x)$ pour tout réel positif x.
4. APPLICATION NUMÉRIQUE : la durée moyenne de fonctionnement de la machine (entre la première mise en route et la deuxième panne) est de 4 ans. Calculer la probabilité pour que cette machine soit en service plus de 6 ans.