FINAL - SQ20

La présentation, la lisibilité et la qualité de la rédaction entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.

Le formulaire distribué en cours est le seul document autorisé.
L'utilisation d'une calculatrice est conseillée.
Les exercices 1 et 2 sont à rédiger sur des copies différentes.

Exercice 1 : test d'hypothèse (6 points)

À l'occasion d'une commande, le service contrôle d'un laboratoire reçoit un lot de flacons. Il effectue un prélèvement aléatoire de 81 flacons et mesure leurs volumes.
Les résultats sont consignés dans le tableau suivant :

Volume (en mℓ)	57,95	57,99	58,03	58,07	58,11
Effectif	3	10	39	21	8

1. Calculer la moyenne $\overline{x_e}$ et l'écart type s_e de cet échantillon
   (on arrondira les résultats à 10^{-3} près).
2. Le volume des flacons est annoncé par le fabricant comme étant de 58 mℓ.
   On se propose de construire un test d'hypothèse bilatéral au seuil de signification de $\alpha = 5\,\%$ pour contrôler, au moment de la livraison, la moyenne μ de l'ensemble des volumes (en mℓ) des flacons. On admet que le volume d'un flacon est modélisé par une variable aléatoire X qui suit une loi normale d'espérance μ et d'écart-type σ. On note $\overline{X}$ la variable aléatoire qui, à chaque échantillon de 81 flacons prélevés au hasard dans l'ensemble de la production, associe la moyenne des volumes.
   On veut tester :
   - l'hypothèse nulle $H_0 : \mu = 58$
   - contre l'hypothèse alternative $H_1 : \mu \neq 58$

   (a) Quelle est la loi de probabilité de la variable aléatoire $\overline{X}$?
   (b) Choisir la variable aléatoire de test Z et préciser sa loi de probabilité en se plaçant sous l'hypothèse nulle H_0.
   (c) Déterminer sous l'hypothèse nulle H_0, le réel t tel que $P(-t \leqslant Z \leqslant t) = 0,95$
   (d) En déduire la région d'acceptation D_0 de H_0 au seuil de signification de 5%.
3. En utilisant les informations recueillies sur l'échantillon de 81 flacons, le service de contrôle acceptera-t-il cette livraison ? Justifier.

Exercice 2 : estimateurs (14 points)

Partie A

Soit λ un nombre réel strictement positif.

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(t) = \begin{cases} e^{\lambda - t} & \text{si } t \geqslant \lambda \\ 0 & \text{si } t < \lambda \end{cases}$

1. (a) Calculer, pour tout réel $x \geqslant \lambda$, $\displaystyle\int_{\lambda}^{x} f(t)\,dt$.

   (b) Montrer que f est une densité de probabilité.

On note X une variable aléatoire réelle de densité f.

2. Déterminer la fonction de répartition F de X.
3. On considère la variable aléatoire $U = X - \lambda$.

   (a) Montrer que la fonction de répartition G de U est définie par :

   $$G(x) = \begin{cases} 1 - e^{-x} & \text{si } x \geqslant 0 \\ 0 & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

   (b) En déduire que U est une variable à densité qui suit une loi classique dont on précisera le paramètre. Préciser son espérance et sa variance.

   (c) En déduire l'espérance et la variance de X.

Partie B

Dans toute la suite, n désigne un entier naturel non nul et $X_1, X_2, \ldots, X_n$ des variables aléatoires mutuellement indépendantes de même loi que X.

On cherche à estimer le réel λ. Pour tout entier naturel non nul n, on pose

$$S_n = \overline{X_n} - 1 = \left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} X_k\right) - 1 \qquad \text{et} \qquad Y_n = \min(X_1\,,\, X_2\,\ldots\,,\, X_n)$$

1. (a) Montrer que S_n est un estimateur sans biais de λ.

   (b) Justifier que S_n est un estimateur convergent de λ.

2. Démontrer que la fonction de répartition F_n de Y_n est définie par :

   $$F_n(x) = \begin{cases} 1 - e^{n(\lambda - x)} & \text{si } x \geqslant \lambda \\ 0 & \text{si } x < \lambda \end{cases}$$

3. On considère la variable aléatoire $Z_n = Y_n - \lambda$.

   (a) Déterminer la fonction de répartition G_n de Z_n.

   (b) En déduire que Z_n suit une loi exponentielle dont on précisera le paramètre.

   (c) En déduire l'espérance et la variance de Y_n.

4. On pose $T_n = Y_n - \dfrac{1}{n}$.

   Prouver que T_n est un estimateur sans biais et convergent de λ.

   De S_n et T_n, lequel est l'estimateur le plus efficace ?