FINAL - SQ20

La présentation, la lisibilité et la qualité de la rédaction entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies. **L'utilisation de la calculatrice est conseillée.**

Exercice 1 : test du Khi-deux (5 points)

Dans un grand magasin, on observe le nombre de clients se présentant aux caisses pendant des intervalles de temps d'une minute. Après trois heures d'observation, on dispose de 180 données réparties selon le tableau suivant :

Nombre de clients x_i	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13 et plus
Nombre d'intervalles de 1 minute n_i	5	5	18	32	35	29	25	15	10	3	2	0	1	0

On va tester l'hypothèse selon laquelle la variable aléatoire X qui modélise le «nombre de clients se présentant aux caisses pendant un intervalle d'une minute», suit une loi de Poisson.

1. Calculer la moyenne $\overline{x_e}$ et la variance v_e de cette série statistique.
   (On donnera sans justification les résultats fournis par la calculatrice).
2. Justifier qu'on peut prendre comme paramètre λ de la loi de Poisson : $\lambda = 4,52$.
3. Formuler les hypothèses H_0 et H_1 du test.
4. Le tableau des effectifs observés et des effectifs théoriques est le suivant :

x_i	Effectifs observés n_i	Effectifs théoriques c_i
0 et 1	10	10,82
2	18	20,02
3	32	30,17
4	35	34,09
5	29	$c_5 =?$
6	25	23,21
7	15	14,99
8	10	8,47
9 et plus	6	7,41

   (a) Expliquer pourquoi on a regroupé les deux premières valeurs et les dernières valeurs.
   (b) Détailler le calcul permettant d'obtenir l'effectif théorique c_5 correspondant à $x_5 = 5$.

5. (a) Préciser la variable aléatoire de test et indiquer sa loi de probabilité approximative.
   (b) La valeur prise par la variable de test dans l'échantillon est $1,19$.
   Par quel calcul obtient-on cette valeur ?
   (c) Quelle est la conclusion du test avec un risque de première espèce de $\alpha = 10\%$?

Exercice 2 : les 5 questions sont indépendantes (5 points)

1. Un sac contient 9 jetons indiscernables au toucher : 2 jetons bleus, 3 jetons blancs et 4 jetons rouges. On pioche au hasard et simultanément 3 jetons de ce sac.
   Quelle est la probabilité de tirer 3 jetons de 3 couleurs différentes ?

2. À l'UTBM, l'effectif idéal pour une première année de Tronc Commun est de 250 étudiants.
   La politique de l'Université est d'appeler 315 étudiants sur la plate-forme Admission Post-Bac, et est basée sur la constatation statistique que, 80% des étudiants appelés sur APB, seront réellement présents le jour de la rentrée de septembre.
   Quelle est la probabilité que l'UTBM se retrouve avec plus de 250 étudiants (251 ou plus) en première année le jour de la rentrée ?

3. On tire au hasard et simultanément 4 cartes dans un jeu usuel de 32 cartes.
   On désigne par X la variable aléatoire qui compte le nombre de rois tirés.
   Reconnaître la loi de probabilité de X et exprimer $P\big([X=k]\big)$ en fonction de k.

4. Dans une usine d'emballage, un automate remplit des paquets de sucre de 1000 grammes. On sait que cet automate verse en réalité une quantité variable de sucre, modélisée par une variable aléatoire Y qui suit une loi normale de moyenne 1000 grammes. On constate que 10% des paquets de sucre pèsent plus de 1020 grammes. Exprimer l'écart-type σ de Y à l'aide de la fonction de répartition Φ de la loi normale centrée réduite. En déduire une valeur décimale approchée de σ.

5. Une machine est équipée de deux composants dont les durées de vie respectives T_1 et T_2 en jours suivent des lois exponentielles de paramètres λ et μ . Comme ces deux composants sont montés en série, la machine tombe en panne dès que l'un au moins des composants est défaillant. On admet l'indépendance des pannes des deux composants et on note Z la durée de vie de la machine en jours. Soit t un réel positif. Exprimer en fonction de t, λ et μ, la probabilité $P\big([Z>t]\big)$.

Exercice 3 : estimation (10 points)

Un institut de sondage désire estimer, parmi la population, la proportion p d'avis favorables à un projet donné. Le sujet abordé étant délicat, le stratagème suivant est mis en place afin de mettre en confiance les personnes sondées pour qu'elles ne mentent pas. L'enquêteur fait d'abord lancer un dé cubique équilibré à la personne sondée, elle seule connaîtra le résultat du lancer.
- Si le dé amène la face 1, la personne sondée répond sincèrement au sondeur selon ses convictions («favorable» si elle est d'accord avec le projet et «défavorable» si elle est contre).
- Si le dé amène une autre face que le 1, la personne sondée répond à l'opposé de ses convictions («favorable» si elle n'est pas d'accord avec le projet et «défavorable» sinon).

On considère un échantillon aléatoire de taille n, extrait de la population considérée et on note S_n le nombre de réponses «favorables» obtenues.

1. (a) Pour tout entier $k \in [\![1\,,n]\!]$, on note X_k la variable aléatoire égale à 1 si la $k-$ième personne sondée exprime un avis favorable et à 0 sinon.
   Montrer que chaque variable aléatoire X_k suit une loi de Bernoulli de paramètre θ.
   On exprimera θ en fonction de p en utilisant la formule des probabilités totales.
   En déduire p en fonction de θ.
   (b) Donner la loi de probabilité de S_n ainsi que son espérance et sa variance.
2. (a) Montrer que $F_n = \dfrac{S_n}{n}$ est un estimateur sans biais et convergent de θ.
   (b) En déduire un estimateur T_n sans biais et convergent de p.
   (c) Calculer la variance de T_n en fonction de p et de n.
   (d) On suppose que $n>30$, $n\theta \geqslant 15$ et que $n\theta(1-\theta)>5$.
   Par quelle loi peut-on approcher la loi de T_n ?
3. Sur 1000 personnes interrogées, le sondeur a recueilli 425 avis favorables.
   (a) Donner des estimations ponctuelles de θ et de p.
   (b) Construire un intervalle de confiance observé pour p au niveau de confiance 90%.