Corrigé médian - SQ20

Exercice 3 (10 points)

1. (a) Calculer pour tout réel A strictement supérieur à 1, l'intégrale $I_A = \int_1^A \frac{\lambda}{t^{\lambda+1}}\,\mathrm{d}t$

   (b) Calculer $\lim\limits_{A\to+\infty} I_A$.

   (c) En déduire que g peut être considérée comme une densité de probabilité.

2. On considère dans toute la suite, une variable aléatoire Y admettant g comme densité et on note G sa fonction de répartition. Déterminer pour tout réel x, $G(x)$.

3. On suppose dans cette question que $\lambda > 1$.

   (a) Soit A un réel strictement supérieur à 1.

   $$J_A = \int_1^A \frac{\lambda}{t^\lambda}\,\mathrm{d}t = \lambda \int_1^A t^{-\lambda}\,\mathrm{d}t = \lambda \left[\frac{t^{-\lambda+1}}{-\lambda+1}\right]_{t=1}^{t=A} = \frac{-\lambda}{\lambda-1}\left[\frac{1}{t^{\lambda-1}}\right]_{t=1}^{t=A}$$

   D'où $J_A = \frac{\lambda}{\lambda-1}\left(1 - \frac{1}{A^{\lambda-1}}\right)$

   (b) En déduire que Y admet une espérance et donner sa valeur en fonction de λ.

   (c) Calculer pour tout réel A strictement supérieur à 1, l'intégrale $K_A = \int_1^A \frac{\lambda}{t^{\lambda-1}}\,\mathrm{d}t$.
   La variable Y admet-elle une variance ?

4. On considère la variable aléatoire X définie par $X = \ln(Y)$ et on note F sa fonction de répartition.

   (a) Établir pour tout réel x, l'égalité suivante : $F(x) = G(\mathrm{e}^x)$.

   (b) Donner en distinguant les cas x positif et x négatif, l'expression de $F(x)$.
   Reconnaître la loi suivie par la variable aléatoire X.

   (c) Donner sans calcul, la valeur de l'espérance mathématique de X.

5. On suppose dans cette dernière question uniquement que $\lambda = 2$.

   On considère à présent, deux variables aléatoires Z_1 et Z_2 indépendantes et suivant la même loi que Y (on a pris ici $\lambda = 2$). On pose $T = \inf(Z_1, Z_2)$

   (a) Déterminer la fonction de répartition H de T en remarquant que pour tout réel $x \geqslant 1$,

   $$\mathbb{P}[T > x] = \mathbb{P}([Z_1 > x] \cap [Z_2 > x])$$

   (b) En déduire une densité h de T.

   (c) En déduire que T admet une espérance et préciser sa valeur.