Probabilités - statistiques - SQ20

Tronc commun

Médian - Printemps 2013

Durée de l'épreuve : 2 heures

La présentation, la lisibilité et la qualité de la rédaction entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies. Les étudiants ne doivent faire usage d'aucun matériel électronique.

Les tables de statistiques sont les seuls documents autorisés.
L'utilisation d'une calculatrice ou d'un téléphone est donc interdite.

Exercice 1 (4 points)

Une grande compagnie d'assurance automobile a classé ses assurés en trois classes d'âges.

- ▹ Classe A : les jeunes conducteurs de moins de 25 ans,
- ▹ Classe B : les conducteurs âgés de 25 à 60 ans,
- ▹ Classe C : les plus de 60 ans.

Le tableau ci-dessous fournit deux informations :

- la proportion d'assurés appartenant à chaque classe,
- la probabilité qu'un assuré, d'une classe donnée, déclare au moins un accident au cours de l'année.

Classe	Proportion	Risque d'accident
A	20%	0,15
B	70%	0,05
C	10%	0,10

1. Un assuré est tiré au hasard dans le fichier de la compagnie.
   Calculer la probabilité p qu'il ait déclaré au moins un accident au cours de l'année ?

2. Quelle est la probabilité qu'un assuré, ayant déclaré au moins un accident au cours de l'année, soit âgé de moins de 25 ans ?

3. On choisit au hasard 10 assurés dans le fichier de la compagnie. L'effectif des assurés est assez important pour qu'on puisse assimiler ce prélèvement à un tirage avec remise de 10 assurés.

   Exprimer en fonction de p, la probabilité de voir au moins 2 assurés déclarer un accident dans l'année.

Exercice 2 (7 points)

On dispose d'une urne $\mathcal{U}$ contentant initialement quatre boules indiscernables au toucher : 2 boules noires et 2 boules blanches. On considère l'expérience aléatoire suivante :
« On tire au hasard et simultanément deux boules dans l'urne $\mathcal{U}$. Si les deux boules sont de même couleur, on enlève ces deux boules de l'urne $\mathcal{U}$. Si elles ont des couleurs différentes, on repose les deux boules dans l'urne $\mathcal{U}$ puis on recommence l'expérience jusqu'à ce que l'urne $\mathcal{U}$ soit vide.»

On note X le nombre de tirages nécessaires pour que l'urne $\mathcal{U}$ soit vide. On désigne par A_1 l'évènement: « au premier tirage dans l'urne $\mathcal{U}$, les deux boules sont de même couleur » et on note a sa probabilité, c'est-à-dire $a = P(A_1)$.

1. Déterminer a.
2. Calculer $P(X = 1)$, $P(X = 2)$ et $P(X = 3)$.
3. Montrer que, pour tout entier $n \geqslant 2$, $\quad P(X = n) = a(1 - a)^{n-2}$.
4. Établir que la variable aléatoire $Z = X - 1$ suit une loi géométrique dont on précisera le paramètre.
5. Donner l'espérance et la variance de Z puis l'espérance et la variance de X.

Exercice 3 (9 points)

On désigne par λ un nombre réel strictement positif et on considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par

$$\forall\, t \in \mathbb{R}, \quad f(t) = \lambda\, |t|\, \mathrm{e}^{-\lambda t^2}$$

1. (a) Vérifier que f est une fonction paire.
   (b) Établir que l'intégrale généralisée $\displaystyle\int_0^{+\infty} f(t)\, \mathrm{d}t$ converge et donner sa valeur.
   (c) Montrer que la fonction f peut être considérée comme densité d'une variable aléatoire X que l'on suppose, dans la suite, définie sur un certain espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$.
2. (a) Déterminer la fonction de répartition F de la variable aléatoire X.
   (b) En déduire $P(X \geqslant 1)$.
3. On admet la convergence de l'intégrale généralisée $\displaystyle\int_0^{+\infty} t\, f(t)\, \mathrm{d}t$.

   Prouver que la variable aléatoire X admet une espérance, notée $E(X)$, et donner sa valeur.
4. On pose $Y = X^2$ et on admet que Y est une variable aléatoire à densité, elle aussi définie sur l'espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$.
   (a) Donner l'expression de la fonction de répartition G de la variable aléatoire Y à l'aide de la fonction de répartition F de la variable aléatoire X .
   (b) Déterminer une densité g de Y, puis vérifier que Y suit une loi exponentielle dont on précisera le paramètre.
   (c) En déduire sans calcul la valeur de la variance de X notée $V(X)$.