Médian - sq20

La présentation, la lisibilité et la qualité de la rédaction entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.

L'utilisation d'une seule calculatrice par étudiant est autorisée. L'usage de tout document est interdit. Les exercices 1 et 2 seront rédigés sur une copie différente de l'exercice 3.

Exercice 1 (4 points)

Soit $(\Omega, \mathcal{T}, P)$ un espace probabilisé.

1. Donner, pour chacune des assertions suivantes, son écriture en symboles mathématiques :
   (a) A est un événement.
   (b) A et B sont des événements indépendants.
   (c) L'événement A est impossible.
   (d) L'événement A implique l'événement B.
2. On se donne deux événements A et B tels que $P(A) = \dfrac{1}{5}$ et $P(B) = \dfrac{2}{3}$.
   Calculer $P(A \cup B)$ dans chacun des cas suivants :
   (a) A et B sont incompatibles.
   (b) A et B sont indépendants.
   (c) L'événement A implique l'événement B.
   (d) $P_B(A) = \dfrac{1}{2}$.

Exercice 2 (6 points)

Maxime a une poule. Chaque nuit, elle peut pondre un œuf avec probabilité 3/4 ou ne pas pondre avec probabilité 1/4, et ce, indépendamment d'une nuit à l'autre.

1. On note X le nombre d'œufs que la poule a pondus au bout de 7 nuits.
   (a) Quelle est la loi de probabilité de X ?
   (b) Maxime décide de vendre en totalité sa production hebdomadaire. Il vend chaque œuf 20 centimes. Soit Y le gain de Maxime en centimes.
   Exprimer Y en fonction de X.
   Combien Maxime peut-il espérer gagner en une semaine ?

2. Après un an, mauvaise nouvelle, la grippe aviaire a frappé : la poule de Maxime a mauvaise mine. Sa probabilité de pondre pendant la nuit est passée de 3/4 à 1/20.
   (a) On note Z le nombre de nuits qu'il faut attendre avant l'arrivée du premier œuf. Reconnaître la loi de probabilité de Z.
   (b) Un ami de Maxime vient lui rendre visite dans 7 jours. Déterminer la probabilité pour que Maxime ait au moins un œuf pour lui faire des crêpes.

Pensez à changer de copie.

Exercice 3 (10 points)

Des véhicules arrivent de façon aléatoire à un poste de péage. Pour tout réel $t > 0$, on définit la variable aléatoire N_t égale au nombre de véhicules franchissant ce poste entre les instants 0 et t.
On suppose que la variable aléatoire N_t suit une loi de Poisson de paramètre λt où $\lambda > 0$ est un paramètre donné.

1. Rappeler, pour tout réel $t > 0$, les valeurs de l'espérance et de la variance de N_t.
2. On note X_1 l'instant d'arrivée du premier véhicule.
   (a) Soit $t > 0$. Que peut-on dire des événements $[X_1 > t]$ et $[N_t = 0]$?
   En déduire $P([X_1 > t])$.
   (b) Reconnaître la loi de X_1.
   (c) Donner sans calcul, l'espérance et la variance de X_1.
3. Pour tout entier naturel n non nul, on définit la variable aléatoire réelle X_n, prenant ses valeurs dans $\mathbb{R}^{+*}$, égale à l'instant d'arrivée de la n-ième voiture au péage à partir de l'instant 0. On note F_n la fonction de répartition de X_n.
   (a) Pour tout réel **négatif** t, donner $F_n(t) = P([X_n \leqslant t])$.
   (b) Soient $t > 0$ et $n \in \mathbb{N}^*$.
   Justifier l'égalité de l'événement $[X_n \leqslant t]$ et de l'événement $[N_t \geqslant n]$.
   (c) En déduire l'expression de $F_n(t)$.
   (d) Montrer que, pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 2, la variable aléatoire X_n admet comme densité de probabilité la fonction f_n définie par :

$$f_n(t) = \begin{cases} \dfrac{\lambda^n}{(n-1)!}\, t^{n-1}\, \mathrm{e}^{-\lambda t} & \text{si} \quad t > 0 \\ 0 & \text{si} \quad t \leqslant 0 \end{cases}$$