

Exercices corrigés de MT2



Printemps 2024

André Turbergue

TD0 : arcsin, arccos, arctan

1 Énoncé

11

1. Donner trois expressions différentes pour $\cos(2x)$.
2. Prouver l'égalité :

$$\arccos\left(\frac{3}{4}\right) = 2 \arcsin\left(\frac{\sqrt{2}}{4}\right)$$

2 Corrigé

11

1. Pour tout réel x ,

$$\cos(2x) = \cos^2 x - \sin^2 x = 2 \cos^2 x - 1 = 1 - 2 \sin^2 x$$

2. Posons $a = \arccos\left(\frac{3}{4}\right)$, $b = 2 \arcsin\left(\frac{\sqrt{2}}{4}\right)$ et $x = \arcsin\left(\frac{\sqrt{2}}{4}\right)$.

Calculons les cosinus de a et b .

- $\cos a = 3/4$ car $\forall t \in [-1, 1]$, $\cos(\arccos t) = t$
- $\cos b = \cos(2x) = 1 - 2 \sin^2 x = 1 - 2 \times \left(\frac{\sqrt{2}}{4}\right)^2 = 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$
- Les réels a et b ont même cosinus. De plus $a \in [0, \pi]$ (car la fonction arccos est à valeurs dans $[0, \pi]$) et $x \in [0, \pi/2]$ (car x est l'arc sinus d'un réel positif). Donc a et $b = 2x$ appartiennent tous les deux à l'intervalle $[0, \pi]$.

On en déduit que $a = b$

TD1 : calcul matriciel

1 Énoncés

35 On pose $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$. Calculer A^n pour tout entier naturel n .

36 On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

Soient $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix}$.

Montrer que $AB = AC$, a-t-on $B = C$? Que peut-on en conclure sur A ?

37 *Final 2021.* On se donne la matrice carrée $A = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \in \mathfrak{M}_2(\mathbb{R})$

et on désigne par F l'ensemble des matrices M de $\mathfrak{M}_2(\mathbb{R})$ telles que $AM = MA$.

On pose $M = \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix}$ où x, y, z et t sont des nombres réels.

En résolvant un système linéaire d'inconnues x, y, z, t , déterminer la forme des matrices M appartenant à F .

38 Pour tout nombre réel x , on considère la matrice

$$M(x) = \begin{pmatrix} 2^x & 0 & 0 \\ 0 & 1 & x \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathfrak{M}_3(\mathbb{R})$$

1. Pour $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, calculer $M(x)M(y)$. Que remarque-t-on ?

2. En déduire que $M(x)$ est inversible et donner son inverse.

3. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, déterminer $M(x)^n$.

4. Calculer A^7 où A est la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

39 Pour tout nombre réel x , on définit la matrice $M(x) \in \mathfrak{M}_3(\mathbb{R})$ par :

$$M(x) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -x^2 & 1 & x \\ -2x & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

1. Vérifier la relation $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, M(x)M(y) = M(x + y)$
2. En déduire que pour tout réel x et pour tout entier naturel n , $(M(x))^n = M(nx)$
3. Montrer que la matrice $M(x)$ est inversible. Quel est son inverse ?
4. Justifier que l'application $M : x \mapsto M(x)$, de \mathbb{R} vers $\mathfrak{M}_3(\mathbb{R})$, est injective.
Cette application est-elle bijective ?

5. Dans cette question, on pose $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -4 & 1 & -2 \\ 4 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Donner l'expression de A^n sous la forme d'un tableau matriciel pour $n \in \mathbb{N}$.

2 Corrigés

35 On vérifie à la main, ou avec Maxima, que $A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$,

$$A^3 = \begin{pmatrix} 1 & 7 \\ 0 & 8 \end{pmatrix}, \quad A^6 = \begin{pmatrix} 1 & 63 \\ 0 & 64 \end{pmatrix}$$

On conjecture que $\forall n \in \mathbb{N}$, $A^n = \begin{pmatrix} 1 & 2^n - 1 \\ 0 & 2^n \end{pmatrix}$

et on démontre cette égalité matricielle par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$.

Ainsi, les matrices de F sont les matrices de la forme :

$$M = \begin{pmatrix} x & 0 \\ z & x+z \end{pmatrix},$$

avec x et z deux réels quelconques.

36 Le calcul de AB et AC donne $AB = AC = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 4 & 4 & 3 \end{pmatrix}$. Or $B \neq C$ ce qui implique que A n'est pas inversible. En effet par la contraposée si A est inversible alors $AB = AC \Rightarrow B = C$. Or $B \neq C$ donc A n'est pas inversible.

$$\begin{aligned} M(x) \times M(y) &= \begin{pmatrix} 2^x & 0 & 0 \\ 0 & 1 & x \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 2^y & 0 & 0 \\ 0 & 1 & y \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 2^x \times 2^y & 0 & 0 \\ 0 & 1 & x+y \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 2^{x+y} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & x+y \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

37 Avec les notations de l'énoncé :

$$\begin{aligned} M \in F &\iff AM = MA \\ &\iff \begin{pmatrix} -x & -y & 2y \\ 3x+2z & 3y+2t & 2t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x+3y & 2y \\ -z+3t & 2t \end{pmatrix} \\ &\iff \begin{cases} -x = -x+3y \\ -y = 2y \\ 3x+2z = -z+3t \\ 3y = 0 \end{cases} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\iff \begin{cases} 3y = 0 \\ 3y = 0 \\ 3x+3z-3t = 0 \\ y = 0 \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} y = 0 \\ t = x+z. \end{cases} \end{aligned}$$

$$M(x)^2 = M(x)M(x) = M(x+x) = M(2x).$$

Ainsi :

$$M(x)^3 = M(x)^2 M(x) = M(2x)M(x) = M(2x+x) = M(3x).$$

D'où, par une récurrence immédiate :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad M(x)^n = M(nx).$$

4. On remarque que $A = M(2)$. Donc :
- $$A^7 = M(2)^7 = M(7 \times 2) = M(14) = \begin{pmatrix} 2^{14} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 14 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$
- Conclusion : selon le principe de récurrence, l'égalité \mathcal{P}_n est vraie pour tout entier naturel n .

3. En prenant $y = -x$ dans la relation établie en 1., on obtient :

$$M(x) \times M(-x) = M(x - x) = M(0) = I_3$$

où $M(-x)$ est une matrice de même taille que $M(x)$. Par conséquent la matrice $M(x)$ est inversible et $[M(x)]^{-1} = M(-x)$

4. • Soit x et y deux réels tels que $M(x) = M(y)$.

$$\text{Alors } \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -x^2 & 1 & \boxed{x} \\ -2x & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -y^2 & 1 & \boxed{y} \\ -2y & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

On en déduit que $x = y$. Donc l'application $M : x \mapsto M(x)$ est une injection de \mathbb{R} dans $\mathfrak{M}_3(\mathbb{R})$.

• $\forall x \in \mathbb{R}, M(x) \neq \mathbf{0}_3$

La matrice nulle $\mathbf{0}_3 \in \mathfrak{M}_3(\mathbb{R})$ ne peut pas s'écrire sous la forme $M(x)$ avec x réel. Donc l'application M n'est pas surjective, ni bijective.

2. Soit x un réel fixé. Pour $n \in \mathbb{N}$, notons \mathcal{P}_n l'égalité : « $[M(x)]^n = M(nx)$ »

• Vérifions \mathcal{P}_0 :

$$[M(x)]^0 = I_3 \text{ par convention et } M(0 \times x) = M(0) = I_3.$$

• Soit $k \in \mathbb{N}$. Supposons \mathcal{P}_k vraie. Démontrons alors, sous cette hypothèse, que \mathcal{P}_{k+1} est vraie.

$$5. A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -4 & 1 & -2 \\ 4 & 0 & 1 \end{pmatrix} = M(-2)$$

$$\text{Donc } \forall n \in \mathbb{N}, A^n = [M(-2)]^n \stackrel{\text{d'après } 2.}{=} M(-2n) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -4n^2 & 1 & -2n \\ 4n & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

TD2 : intégration sur un segment

1 Énoncés

63 *Les quatre questions de cet exercice sont indépendantes.*

1. On considère l'intégrale I suivante :

$$I = \int_0^1 \frac{x^2}{x+2} dx$$

- (a) Démontrer que, pour tout réel $x \in [0, 1]$, on a :

$$\frac{x^2}{x+2} = x - 2 + \frac{4}{x+2}$$

- (b) En déduire la valeur exacte de I .

2. On considère les intégrales I et J suivantes :

$$I = \int_0^{\ln 16} \frac{e^x + 3}{e^x + 4} dx \quad \text{et} \quad J = \int_0^{\ln 16} \frac{1}{e^x + 4} dx$$

- (a) Calculer $I - 3J$ et $I + J$.

- (b) En déduire les valeurs exactes de I et de J .

3. Soit f la fonction définie sur $[-1; 1]$ par $f(x) = \sqrt{1 - x^2}$

- (a) On se place dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$. Vérifier que la courbe C_f représentant f est le demi-cercle de centre O et de rayon 1 qui est situé dans le demi-plan des ordonnées positives.

- (b) En déduire la valeur de :

$$\int_0^1 \sqrt{1 - x^2} dx$$

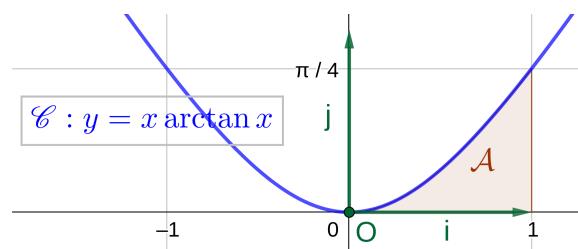
4. On considère l'intégrale I suivante :

$$I = \int_0^\pi e^t \sin t dt$$

A l'aide de deux intégrations par parties successives, calculer I .

64 *Final 2021. Les deux questions sont indépendantes.*

1. Le plan est rapporté à un repère orthonormal $(O; \vec{i}, \vec{j})$.
On note \mathcal{C} la courbe d'équation $y = x \arctan x$.



Calculer l'aire \mathcal{A} de la surface située en dessous de la courbe \mathscr{C} , au dessus de l'axe des abscisses $(O ; \vec{i})$ et entre les droites verticales d'équations $x = 0$ et $x = 1$.

$$\text{On remarquera que : } \frac{x^2}{1+x^2} = \frac{(x^2+1)-1}{1+x^2}.$$

2. En effectuant le changement de variable $u = \sqrt{x}$, calculer l'intégrale suivante :

$$I = \int_{1/4}^{3/4} \frac{1}{\sqrt{x(1-x)}} dx.$$

65 a désigne un nombre réel positif fixé. Pour tout entier naturel n , on pose

$$I_n = \int_0^a \frac{x^n}{n!} e^{-x} dx$$

On ne cherchera pas à expliciter I_n .

1. Calculer, en fonction de a , I_0 .
2. (a) Montrer que, pour tout entier naturel n et pour tout réel x de l'intervalle $[0 ; a]$:

$$0 \leq \frac{x^n}{n!} e^{-x} \leq \frac{x^n}{n!}$$

- (b) En déduire un encadrement de I_n pour tout entier naturel n .
- (c) Déterminer la limite de la suite $(I_n)_{n \in \mathbb{N}}$. *On rappelle que $a^n \underset{(n \rightarrow +\infty)}{\sim} o(n!)$*
3. Démontrer, pour tout entier naturel k non nul, l'égalité $I_k - I_{k-1} = -\frac{a^k}{k!} e^{-a}$
4. Déduire de ce qui précède que,

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad I_n - I_0 = -e^{-a} \sum_{k=1}^n \frac{a^k}{k!}$$

5. En déduire finalement $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=0}^n \frac{a^k}{k!}$

66 *En bonus !* On se propose d'étudier la fonction f définie sur l'intervalle $]0, +\infty[$ par :

$$f(x) = \int_1^x \frac{\ln t}{1+t^2} dt$$

On désigne par Γ sa courbe représentative dans le plan rapporté à un repère orthogonal $(O ; \vec{i}, \vec{j})$

1. (a) Justifier la dérivable de f sur $]0, +\infty[$ et calculer $f'(x)$.
- (b) En déduire le sens de variations de f sur $]0, +\infty[$.
- (c) Que peut-on dire du signe de $f(x)$?

2. (a) Pour $x > 0$, calculer $\int_1^x \frac{\ln t}{t^2} dt$

(b) Montrer que pour tout $x > 1$,

$$\frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{x} - \frac{\ln x}{x} \right) \leq f(x) \leq \left(1 - \frac{1}{x} - \frac{\ln x}{x} \right)$$

3. On admet le théorème suivant :

Si φ est une fonction monotone sur l'intervalle $[a, +\infty[$, alors φ admet une limite, finie ou infinie, en $+\infty$.

Prouver que f admet une limite réelle ℓ en $+\infty$. Encadrer cette limite ℓ .

4. (a) Soit g la fonction définie sur $]0, +\infty[$ par $g(x) = f(x) - f\left(\frac{1}{x}\right)$

Calculer $g'(x)$.

(b) En déduire que pour tout réel $x > 0$, $f(x) = f\left(\frac{1}{x}\right)$

(c) Démontrer que f admet une limite finie en zéro. Préciser cette limite.

On prolonge par continuité la fonction f en zéro en posant $f(0) = \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$

5. (a) Montrer que pour tout $x \in]0; 1[$, $f(x) - f(0) \leq \frac{1}{2}(x \ln x - x)$

(b) Démontrer que f n'est pas dérivable à droite en zéro.

Que peut-on dire de la courbe Γ au point d'abscisse zéro ?

6. (a) À l'aide de la calculatrice, donner des valeurs décimales approchées à 10^{-2} près de $f(0)$, $f(2)$, $f\left(\frac{3}{2}\right)$, $f(4)$ et $f(8)$.

(b) Tracer l'allure de la courbe Γ .

2 Corrigés

63

1. (a) $\forall x \in [0; 1]$,
 $x - 2 + \frac{4}{x+2} = \frac{(x-2)(x+2)}{x+2} + \frac{4}{x+2} = \frac{(x^2-4)+4}{x+2} = \frac{x^2}{x+2}$
(b) $I = \int_0^1 \left(x - 2 + \frac{4}{x+2} \right) dx = \int_0^1 (x-2)dx + 4 \int_0^1 \frac{1}{x+2} dx$
 $= \left[\frac{x^2}{2} - 2x \right]_0^1 + [\ln|x+2|]_0^1 = -\frac{3}{2} + 4\ln 3 - 4\ln 2.$

2. (a) $I - 3J = \int_0^{2\ln 2} \frac{e^x}{e^x + 4} dx = [\ln(e^x + 4)]_0^{\ln 16} = \ln 20 - \ln 5 = \ln 4 =$
 $I + J = \int_0^{\ln 16} \frac{e^x + 4}{e^x + 4} dx = \int_0^{\ln 16} dx = \ln 16 = 4\ln 2$

(b) $4J = (I+J)-(I-3J) = 2\ln 2$ d'où $J = \frac{\ln 2}{2}$ puis $I = 4\ln 2 - J = \frac{7}{2}\ln 2$

3. (a) $M(x; y) \in \mathcal{C}_f \Leftrightarrow \begin{cases} y = f(x) \\ -1 \leq x \leq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y^2 = f(x)^2 \\ -1 \leq x \leq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y \geq 0 \\ (x-0)^2 + (y-0)^2 = 1^2 \\ y \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} OM = 1 \\ y \geq 0 \end{cases}$

Ainsi \mathcal{C}_f est le demi-cercle de centre O , de rayon 1, situé au dessus de l'axe des abscisses.

(b) $\int_0^1 \sqrt{1-x^2} dx$ est l'aire du quart de disque de centre O , de rayon 1, située au dessus de l'axe des abscisses et à droite de l'axe des ordonnées.

En conséquence $\int_0^1 \sqrt{1-x^2} dx = \frac{\pi \times 1^2}{4} = \frac{\pi}{4}$

4. Posons $\begin{cases} u(t) = \sin t \\ v'(t) = e^t \end{cases}$ alors $\begin{cases} u'(t) = \cos t \\ v(t) = e^t \end{cases}$

Les fonctions u et v sont de classe \mathcal{C}^1 sur \mathbb{R} .

Le théorème d'intégration par parties permet d'écrire :

$$I = \int_0^\pi u(t)v'(t) dt = [u(t)v(t)]_0^\pi - \int_0^\pi u'(t)v(t) dt$$

$$= [e^t \sin t]_0^\pi - \int_0^\pi e^t \cos t dt = - \int_0^\pi e^t \cos t dt$$

$$\text{Posons } \begin{cases} g(t) = \cos t \\ v'(t) = e^t \end{cases} \text{ alors } \begin{cases} g'(t) = -\sin t \\ v(t) = e^t \end{cases}$$

Les fonctions g et v sont de classe \mathcal{C}^1 sur \mathbb{R} .
Une deuxième intégration par parties donne :

$$\begin{aligned} -I &= \int_0^\pi e^t \cos t dt = [e^t \cos t]_0^\pi - \int_0^\pi -e^t \sin t dt = -e^\pi - 1 + I \\ \text{D'où } 2I &= 1 + e^\pi \text{ et finalement } I = \frac{1 + e^\pi}{2} \end{aligned}$$

64 1. On sait que :

$$\mathcal{A} = \int_0^1 x \arctan(x) dx.$$

On remarque que

$$\mathcal{A} = \int_0^1 u'(x)v(x) dx,$$

où u et v sont les fonctions de classes \mathcal{C}^1 sur $[0, 1]$ telles que :

$$\forall x \in [0, 1], \quad \begin{cases} u'(x) = \frac{x^2}{2} \\ v(x) = \arctan(x) \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} u'(x) = x \\ v'(x) = \frac{1}{1+x^2}. \end{cases}$$

$$= 2 \left(\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{6} \right) = \frac{\pi}{3}.$$

En effectuant une intégration par parties, on obtient :

$$\begin{aligned} \mathcal{A} &= [u(x)v(x)]_0^1 - \int_0^1 u(x)v'(x) \, dx \\ &= \left[\frac{x^2}{2} \arctan(x) \right]_0^1 - \int_0^1 \frac{x^2}{2(1+x^2)} \, dx \\ &= \frac{1}{2} \arctan(1) - 0 - \frac{1}{2} \int_0^1 \frac{1+x^2}{1+x^2} \, dx + \frac{1}{2} \int_0^1 \frac{1}{1+x^2} \, dx \\ &= \frac{\pi}{8} - \frac{1}{2} \int_0^1 1 \, dx + \frac{1}{2} [\arctan(x)]_0^1 \\ &= \frac{\pi}{8} - \frac{1}{2} + \frac{\pi}{8} - 0 \\ &= \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2} \end{aligned}$$

2. Calculons l'intégrale suivante en effectuant le changement de variable $u = \sqrt{x}$:

$$I = \int_{1/4}^{3/4} \frac{1}{\sqrt{x(1-x)}} \, dx$$

- Puisque $u = \sqrt{x}$ alors $x = u^2$.
- Terme différentiel : $x = u^2$ donc $\frac{dx}{du} = 2u$. D'où $dx = 2udu$.
- Calcul des nouvelles bornes :

$$\begin{cases} x = \frac{1}{4} \Rightarrow u = \sqrt{\frac{1}{4}} = \frac{1}{2} \\ x = \frac{3}{4} \Rightarrow u = \sqrt{\frac{3}{4}} = \frac{\sqrt{3}}{2}. \end{cases}$$

- Intégrande : puisque $\sqrt{x} = u$ et $x = u^2$, alors on peut écrire :

$$\frac{1}{\sqrt{x(1-x)}} = \frac{1}{u\sqrt{1-u^2}}.$$

On déduit des trois points précédents que :

$$I = \int_{1/2}^{\sqrt{3}/2} \frac{1}{u\sqrt{1-u^2}} 2u \, du = 2 \int_{1/2}^{\sqrt{3}/2} \frac{1}{\sqrt{1-u^2}} \, du = 2 [\arcsin(u)]_{1/2}^{\sqrt{3}/2}$$

$$\boxed{I_0 = 1 - e^{-a}}$$

- 65**
1. $I_0 = \int_0^a e^{-x} \, dx = [-e^{-x}]_0^a = -e^{-a} - (-e^0)$
 2. (a) Soit $n \in \mathbb{N}$ et $x \in [0; a]$.
Alors $x \geqslant 0 \implies -x \leqslant 0 \implies 0 < e^{-x} \leqslant e^0 \implies 0 < e^{-x} \leqslant 1$
Or $\frac{x^n}{n!} \geqslant 0$. Donc, en multipliant les membres de (*) par $\frac{x^n}{n!}$, on obtient
pour tout x de $[0; a]$, $0 \leqslant \frac{x^n}{n!} e^{-x} \leqslant \frac{x^n}{n!}$

- (b) En intégrant membre à membre la double inégalité précédente de 0 à a , il vient :

$$0 \leqslant I_n \leqslant \int_0^a \frac{x^n}{n!} \, dx$$

$$\text{Or } \int_0^a \frac{x^n}{n!} \, dx = \left[\frac{x^{n+1}}{(n+1)n!} \right]_0^a = \left[\frac{x^{n+1}}{(n+1)!} \right]_0^a = \frac{a^{n+1}}{(n+1)!}$$

$$\text{Donc } \forall n \in \mathbb{N}, \quad \boxed{0 \leqslant I_n \leqslant \frac{a^{n+1}}{(n+1)!}}$$

- (c) On a rappelé que $a^n \underset{n \rightarrow +\infty}{=} o(n)$ ce qui signifie que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{a^n}{n!} = 0$.
D'où $\forall n \in \mathbb{N}$, $\frac{a^{n+1}}{(n+1)!} = \frac{a}{n+1} \times \frac{a^n}{n!} \underset{(n \rightarrow +\infty)}{\longrightarrow} 0$
Le théorème des gendarmes permet de conclure que la suite (I_n) converge et que $\boxed{\lim_{n \rightarrow +\infty} I_n = 0}$

3. Soit $k \in \mathbb{N}^*$. $I_k = \int_0^a \frac{x^k}{k!} e^{-x} \, dx$
- Posons $\begin{cases} u(x) = \frac{x^k}{k!} \\ v'(x) = e^{-x} \end{cases}$ Alors $\begin{cases} u'(x) = \frac{kx^{k-1}}{k!} \\ v(x) = -e^{-x} \end{cases}$

Les fonctions u et v sont de classe C^1 sur \mathbb{R} .
Grâce à une intégration par parties, on obtient

$$I_k = \left[-\frac{x^k}{k!} e^{-x} \right]_0^a - \int_0^a -\frac{x^{k-1}}{(k-1)!} e^{-x} dx = -\frac{a^a}{k!} e^{-a} + \int_0^a \frac{x^{k-1}}{(k-1)!} e^{-x} dx$$

$$\text{Ainsi } I_k = -\frac{a^k}{k!} e^{-a} + I_{k-1}$$

4. Pour tout n de \mathbb{N}^* ,

$$\begin{aligned} I_n - I_0 &= (I_n - I_{n-1}) + (I_{n-1} - I_{n-2}) + \cdots + (I_3 - I_2) + (I_2 - I_1) + (I_1 - I_0) \\ &= \sum_{k=1}^n (I_k - I_{k-1}) \\ &= \sum_{k=1}^n -\frac{a^k}{k!} e^{-a} \text{ d'après 3.} \end{aligned}$$

D'où, en factorisant par $-e^{-a}$ (constante indépendante de l'indice de sommation),

$$I_n - I_0 = -e^{-a} \sum_{k=1}^n \frac{a^k}{k!}$$

5. Soit n un entier naturel non nul. D'après l'égalité précédente,

$$\sum_{k=1}^n \frac{a^k}{k!} = e^a (I_0 - I_n) = e^a (1 - e^{-a} - I_n) = e^a - 1 - e^a I_n.$$

$$\boxed{\text{Donc } 1 + \sum_{k=1}^n \frac{a^k}{k!} = e^a - e^a I_n \text{ c'est-à-dire } \sum_{k=0}^n \frac{a^k}{k!} = e^a (1 - I_n)}$$

Or on a vu que $\lim_{n \rightarrow +\infty} I_n = 0$. On en déduit que

$$\boxed{\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=0}^n \frac{a^k}{k!} = e^a}$$

66 On définit la fonction f sur l'intervalle $]0, +\infty[$ par :

$$f(x) = \int_1^x \frac{\ln t}{1+t^2} dt$$

1. (a) Soit la fonction $h : t \mapsto \frac{\ln t}{1+t^2}$. Alors h est dérivable sur $]0, +\infty[$, donc h est continue sur $]0, +\infty[$ et, on sait que f est l'unique primitive de h sur $]0, +\infty[$, qui s'annule en 1. Autrement dit, f est dérivable sur $]0, +\infty[$ et $\forall x \in]0, +\infty[$, $f'(x) = h(x) = \frac{\ln x}{1+x^2}$ avec $f(1) = 0$.

- (b) Pour tout $x > 0$, $1+x^2 \geqslant 1 > 0$ donc $f'(x)$ est du signe de $\ln x$.
Il en résulte que f est strictement décroissante sur $]0; 1[$ et strictement croissante sur $[1; +\infty[$.
(c) f étant strictement décroissante sur $]0; 1[$,
 $0 < x < 1 \Rightarrow f(x) > f(1) \Rightarrow f(x) > 0$
et $x > 1 \Rightarrow f(x) > f(1) \Rightarrow f(x) > 0$ car f croît strictement sur $]1; +\infty[$.
Ainsi $\forall x \in]0, +\infty[\setminus \{1\}, f(x) > 0$

2. (a) Soit $x > 0$, x fixé. Posons $\begin{cases} u(t) = \ln t \\ v'(t) = \frac{1}{t^2} \end{cases}$ alors $\begin{cases} u'(t) = \frac{1}{t} \\ v(t) = -\frac{1}{t} \end{cases}$.
Les fonctions u , v , u' et v' sont dérivables sur $]0; +\infty[$.
Le théorème d'intégration par parties permet d'écrire :

$$\begin{aligned} \int_1^x \frac{\ln t}{t^2} dt &= \int_1^x u(t) v'(t) dt = [u(t)v(t)]_{t=1}^{t=x} - \int_1^x u'(t)v(t) dt \\ &= \left[-\frac{1}{t} \ln t \right]_{t=1}^{t=x} - \int_1^x -\frac{1}{t^2} dt = -\frac{\ln x}{x} + \left[\frac{1}{t} \right]_{t=1}^{t=x} = -\frac{\ln x}{x} - \frac{1}{x} + 1 \\ (\text{b}) \text{ Soit } x > 1, x \text{ fixé. Soit } t \in [1; x]. \text{ Alors } 1 \leqslant t^2 \text{ donc } 0 < t^2 \leqslant 1+t^2 \leqslant 2t^2 \text{ puis } \frac{1}{2t^2} \leqslant \frac{1}{1+t^2} \leqslant \frac{1}{t^2}. \quad \text{Or } \ln t \geqslant 0 \text{ car } t \geqslant 1. \end{aligned}$$

Par conséquent $\forall t \in [1; x]$, $\frac{1}{2} \times \frac{\ln t}{t^2} \leqslant \frac{\ln t}{1+t^2} \leqslant \frac{\ln t}{t^2}$
En intégrant membre à membre cet encadrement, on obtient :
 $\frac{1}{2} \int_1^x \frac{\ln t}{t^2} dt \leqslant \int_1^x \frac{\ln t}{1+t^2} dt \leqslant \int_1^x \frac{\ln t}{t^2} dt$. On en déduit, d'après 2.(a), que

$$\frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{x} - \frac{\ln x}{x} \right) \leqslant f(x) \leqslant \left(1 - \frac{1}{x} - \frac{\ln x}{x} \right)$$

3. Comme f est une fonction monotone sur l'intervalle $[1, +\infty]$, f admet une limite, finie ou infinie, en $+\infty$. Cette limite ne peut pas être $-\infty$ car f est croissante sur $[1, +\infty]$.

$$\text{De plus } \forall x > 1, \quad f(x) \leqslant \left[1 - \left(\frac{1}{x} + \frac{\ln x}{x} \right) \right] \quad \text{et} \quad \forall x > 1, \quad \begin{cases} \frac{1}{x} > 0 \\ \frac{\ln x}{x} > 0 \end{cases}$$

$$\text{Donc } \boxed{\forall x > 1, \quad f(x) < 1} \quad (\star)$$

Si f admettait pour limite $+\infty$ en $+\infty$, alors l'intervalle $[2; +\infty]$ contiendrait toutes les valeurs $f(x)$ pour x assez grand, ce qui contredit l'encadré (\star) . Ainsi f admet une limite réelle ℓ en $+\infty$.

$$\text{On rappelle que } \forall x > 1, \quad \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{x} - \frac{\ln x}{x} \right) \leqslant f(x) \leqslant \left(1 - \frac{1}{x} - \frac{\ln x}{x} \right)$$

$$\text{Or selon un théorème de croissance comparée, } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$$

$$\text{Donc } \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 - \frac{1}{x} - \frac{\ln x}{x} \right) = 1. \text{ Le théorème de passage à la limite dans}$$

$$\boxed{\frac{1}{2} \leqslant \ell \leqslant 1}$$

4. (a) g est dérivable sur $]0, +\infty[$ et pour tout réel $x > 0$,

$$g'(x) = f'(x) - f'\left(\frac{1}{x}\right) \times \left(-\frac{1}{x^2}\right) = h(x) + \frac{1}{x^2} h\left(\frac{1}{x}\right)$$

$$= \frac{\ln x}{1+x^2} + \frac{1}{x^2} \frac{\ln(1/x)}{1+1/x^2} = \frac{\ln x}{1+x^2} + \frac{(-\ln x)}{x^2+1} \text{ donc } \boxed{g'(x) = 0}$$

- (b) On en déduit que la fonction g est constante sur l'intervalle $]0; +\infty[$. Ainsi $\forall x > 0, g(x) = g(1) = f(1) - f(1/1) = 0$ ce qui revient à dire que

$$\text{pour tout réel } x > 0, \quad f(x) = f\left(\frac{1}{x}\right)$$

$$(c) \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x} = +\infty \text{ et } \lim_{t \rightarrow +\infty} f(t) = \ell \text{ d'après 3.}$$

$$\text{D'où, par composition } \lim_{x \rightarrow 0^+} f\left(\frac{1}{x}\right) = \ell. \text{ Ainsi } \boxed{\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \ell}$$

5. (a) On considère la fonction φ définie sur $]0; 1[$ par

$$\varphi(x) = f(x) - f(0) - \frac{1}{2}(x \ln x - x)$$

$$\text{Alors } \varphi \text{ est dérivable sur }]0; 1[\text{ et } \forall x \in]0; 1[, \quad \boxed{\varphi'(x) = f'(x) - \frac{1}{2} \left(\ln x + x \frac{1}{x} - 1 \right) = \frac{\ln x}{1+x^2} - \frac{1}{2} \ln x = \frac{(1-x^2) \ln x}{2(1+x^2)}}$$

Or pour tout $x \in]0; 1[, 1-x^2 > 0, \ln x < 0$ et $2(1+x^2) > 0$. En conséquence $\forall x \in]0; 1[, \varphi'(x) < 0$. Il en résulte que la fonction φ est strictement décroissante sur $]0; 1[$.

D'autre part $\lim_{x \rightarrow 0^+} x \ln x = 0$ donc $\lim_{x \rightarrow 0^+} \varphi(x) = 0$. On peut donc prolonger par continuité la fonction φ en zéro en posant $\varphi(0) = 0$. La fonction φ est décroissante sur $[0; 1[$ donc $0 < x < 1 \Rightarrow \varphi(x) \leqslant \varphi(0)$.

Autrement dit $\forall x \in]0, 1[, f(x) - f(0) \leqslant \frac{1}{2}(x \ln x - x)$

- (b) D'après la question précédente, $\forall x \in]0; 1[, \boxed{\frac{f(x) - f(0)}{x} \leqslant \frac{1}{2}(\ln x - 1)}$

Or $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{2}(\ln x - 1) = -\infty$ car on sait que $\lim_{x \rightarrow 0^+} \ln x = -\infty$.

Donc, par comparaison, $\boxed{\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = -\infty}$

Ainsi la fonction f n'est pas dérivable en zéro mais sa courbe représentative Γ admet une demi-tangente verticale d'équation $x = 0$ au point d'abscisse zéro.

6. (a) La calculatrice fournit :

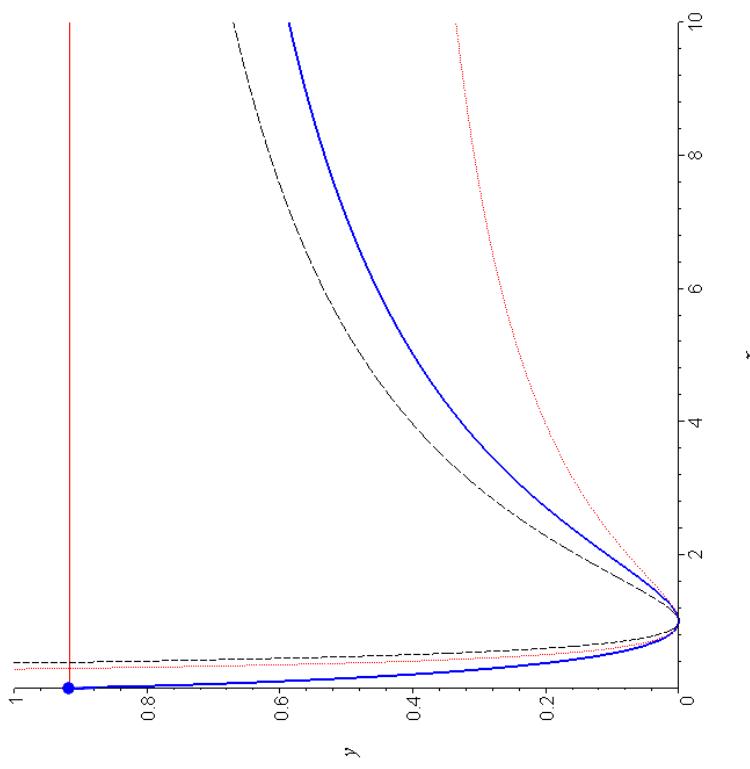
$$f(2) \approx 0,11 ; f\left(\frac{3}{2}\right) \approx 0,04 ; f(4) \approx 0,33 \text{ et } f(8) \approx 0,53.$$

On en déduit d'après 4.(b) les approximations suivantes :

$$f(0, 5) \approx 0,11 ; f\left(\frac{2}{3}\right) \approx 0,04 ; f(0, 25) \approx 0,33 \text{ et } f(0, 125) \approx 0,53$$

Pour obtenir une approximation de $f(0)$, on pourra utiliser le logiciel GEOGEBRA en traçant la courbe représentant la fonction h . On obtient $f(0) \approx 0,92$.

- (b) La courbe Γ en bleu.



TD3 : espaces vectoriels

1 Énoncés

87 On note $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ la base canonique de \mathbb{R}^3 .

On pose $u = e_1 - e_2 = (1, -1, 0)$ et $w = e_1 - 2e_2 + e_3$.

Démontrer que la famille $\mathcal{C} = (u, w, e_1)$ est une base de \mathbb{R}^3 .

88 Montrer que l'ensemble $E = \left\{ P \in \mathbb{R}_4[X] \mid P(\sqrt{2}) = 0 \right\}$ est un espace vectoriel sur \mathbb{R} et en donner une base.

89 On désigne par E le \mathbb{R} -espace vectoriel des fonctions de classe \mathcal{C}^1 sur \mathbb{R} .

Soient $F = \left\{ f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \mid f(0) = f'(0) = 0 \right\}$ et $G = \left\{ x \mapsto ax + b \mid (a, b) \in \mathbb{R}^2 \right\}$.

Montrer que F et G sont des sous-espaces vectoriels supplémentaires de $E = \mathcal{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.

90 *Médian 2022* .

On se place dans $E = \mathbb{R}[X]$ le \mathbb{R} -espace vectoriel des polynômes à coefficients réels, à une indéterminée X . On considère les sous-ensembles de E suivants :

$$F = \left\{ P \in E \mid P(1) = 0 \text{ et } \int_0^1 P(t) dt = 0 \right\} \quad \text{et} \quad G = \text{Vect}(X^2 + X + 1)$$

1. Donner un exemple de polynôme non nul, de degré 2, appartenant à F .
2. Montrer que F est un sous-espace vectoriel de E .
3. Vérifier que F et G sont en somme directe.
4. Démontrer par l'absurde, que le polynôme constant égal à 1, n'appartient pas à $F + G$.
5. Les sous-espaces vectoriels F et G sont-ils supplémentaires dans E ?

91 Soit E un \mathbb{K} -espace vectoriel de dimension finie égale à 4.

On considère deux sous-espaces vectoriels F et G de E tels que

$$\dim F = \dim G = 3 \quad \text{et} \quad F \neq G$$

1. Démontrer que $2 \leq \dim(F \cap G) \leq 3$.
2. En déduire $\dim(F \cap G)$.

92 *En bonus !* Soit E un \mathbb{R} -espace vectoriel de dimension 3, admettant pour base (e_1, e_2, e_3) .

On se donne les vecteurs :

$$f_1 = e_1 + e_2 + e_3, \quad f_2 = e_1 + e_2 - e_3, \quad f_3 = -e_1 + e_3, \quad f_4 = e_1 + e_2$$

1. Justifier que (f_1, f_2, f_3, f_4) est une famille liée.
2. Montrer que $\mathcal{B} = (f_1, f_2, f_3)$ est une base de E .
3. Déterminer les coordonnées du vecteur $u = e_1 + 2e_2 + e_3$ dans la base \mathcal{B} .

2 Corrigés

87 Montreons que la famille $\mathcal{C} = (u, w, e_1)$ est libre.

Soit α_1, α_2 et α_3 des réels tels que $\alpha_1 u + \alpha_2 w + \alpha_3 e_1 = \overrightarrow{0}_{\mathbb{R}^3}$.
Alors $\alpha_1 (1, -1, 0) + \alpha_2 (1, -2, 1) + \alpha_3 (1, 0, 0) = (0, 0, 0)$.

$$\text{D'où } \begin{cases} \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = 0 \\ -\alpha_1 - 2\alpha_2 = 0 \\ \alpha_2 = 0 \end{cases} \text{ d'où } \begin{cases} \alpha_3 = -(\alpha_1 + \alpha_2) \\ \alpha_1 = -2\alpha_2 \\ \alpha_2 = 0 \end{cases}$$

$$\text{Donc } \alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 0.$$

Ainsi $\mathcal{C} = (u, w, e_1)$ est une **famille libre** de 3 vecteurs dans l'espace vectoriel \mathbb{R}^3 qui est de dimension 3. \mathcal{C} est une base de \mathbb{R}^3 .

et $(\lambda f + g)'(0) = \lambda f'(0) + g'(0) = 0$

Donc $\lambda f + g \in F$.

On vérifierait de façon analogue que G est un s.e.v. de E .

2. Montrons que $F \cap G = \{\vec{0}\}$.

Soit $h \in F \cap G$. Alors $h \in G$

donc il existe des réels a et b tels que $\forall x \in \mathbb{R}, h(x) = ax + b$.

De plus $h \in F$ donc $0 = h(0) = b$ et $0 = h'(0) = a$.

Ainsi $h = \vec{0}$ et $F \cap G \subset \{\vec{0}\}$.

L'inclusion réciproque est toujours vraie.

3. Montrons que $E = F + G$. Il suffit de prouver que $E \subset F + G$.

Soit $h \in E$. Posons $a = h'(0)$ et $b = h(0)$.

On définit la fonction affine g par $\forall x \in \mathbb{R}, g(x) = ax + b$.

Posons $f = h - g$. Alors $g \in G$, $h = f + g$, $f(0) = h(0) - g(0) = b - b = 0$
et $f'(0) = h'(0) - g'(0) = a - a = 0$.

Ainsi $h \in F + G$.

$$\begin{aligned} \text{88} \quad \text{Un polynôme s'annulant en } \sqrt{2} \text{ s'écrit sous la forme } (X - \sqrt{2})Q \quad \text{avec} \\ Q \in \mathbb{R}[X]. \\ \text{Donc } E = \left\{ (X - \sqrt{2})Q \mid Q \in \mathbb{R}_3[X] \right\} \\ \text{autrement dit } E = \left\{ (X - \sqrt{2})(a + bX + cX^2 + dX^3) \mid (a, b, c, d) \in \mathbb{R}^4 \right\} \\ = \left\{ a(X - \sqrt{2}) + bX(X - \sqrt{2}) + cX^2(X - \sqrt{2}) + dX^3(X - \sqrt{2}) \mid (a, b, c, d) \in \mathbb{R}^4 \right\} \end{aligned}$$

$$\text{Ainsi } E = \text{Vect}((X - \sqrt{2}), X(X - \sqrt{2}), X^2(X - \sqrt{2}), X^3(X - \sqrt{2}))$$

est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}[X]$ et E est de dimension finie, au plus égale à 4.

Il reste à montrer que la famille $((X - \sqrt{2}), X(X - \sqrt{2}), X^2(X - \sqrt{2}), X^3(X - \sqrt{2}))$ est libre, ce qui se vérifie aisément puisqu'il s'agit d'une famille de polynômes de degrés échelonnés.

Une base de E est donc la famille

$$F = \left\{ P \in E \mid P(1) = 0 \text{ et } \int_0^1 P(t) dt = 0 \right\} \quad \text{et} \quad G = \text{Vect}(X^2 + X + 1)$$

1. Posons $P = aX^2 + bX + c$ avec $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$.

$$\text{Alors } \int_0^1 P(t) dt = \int_0^1 (at^2 + bt + c) dt = \left[\frac{a}{3}t^3 + \frac{b}{2}t^2 + ct \right]_0^1 = \frac{a}{3} + \frac{b}{2} + c$$

D'où $P \in F \iff P(1) = 0$ et $\int_0^1 P(t) dt = 0 \iff \left\{ \begin{array}{l} a + b + \boxed{c} = 0 \\ \frac{a}{3} + \frac{b}{2} + c = 0 \end{array} \right.$

$$\iff \left\{ \begin{array}{l} a + b + c = 0 \\ -\frac{2}{3}a - \frac{b}{2} = 0 \end{array} \right. \quad L_2 \leftarrow L_2 - L_1 \quad \iff \left\{ \begin{array}{l} c = -a - b \\ b = -\frac{4}{3}a \end{array} \right.$$

89 1. Montrons que F est un s.e.v. de E .
 F est une partie de E qui contient la fonction nulle $\tilde{0}$.
Soient f et g deux fonctions appartenant à F et soit λ un réel.

$$\begin{aligned} (\lambda f + g)(0) &= \lambda f(0) + g(0) = 0 \\ &\quad \text{et} \quad \lambda f + g \in F \end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a = 3k \\ b = -4k \\ c = k \end{cases} \quad (k \in \mathbb{R})$$

En prenant $k = 1$, on obtient que $\boxed{P = 3X^2 - 4X + 1}$ appartient à F .

2. (i) Le polynôme nul de E , noté ici O , appartient à F .

En effet $O(1) = 0$ et $\int_0^1 O(t) dt = \int_0^1 0 dt = 0$

- (ii) Soient P et Q deux polynômes appartenant à F .

Alors $P(1) = Q(1) = 0$ et $\int_0^1 P(t) dt = \int_0^1 Q(t) dt = 0$

D'où $(P + Q)(1) = P(1) + Q(1) = 0 + 0 = 0$ et par linéarité de l'intégrale :

$$\int_0^1 (P + Q)(t) dt = \int_0^1 (P(t) + Q(t)) dt = \int_0^1 P(t) dt + \int_0^1 Q(t) dt = 0 + 0 = 0$$

Donc $P + Q$ appartient à F .

- (iii) Soient P un polynôme appartenant à F et λ un réel.

Alors $P(1) = 0$ et $\int_0^1 P(t) dt = 0$

D'où $(\lambda \cdot P)(1) = \lambda \times P(1) = \lambda \times 0 = 0$ et par linéarité de l'intégrale :

$$\int_0^1 (\lambda \cdot P)(t) dt = \int_0^1 \lambda P(t) dt = \lambda \int_0^1 P(t) dt = \lambda \times 0 = 0$$

Donc $\lambda \cdot P$ appartient à F .

Ainsi F est un **sous-espace vectoriel** de E .

3. Vérifier que F et G sont en somme directe revient à montrer que $F \cap G = \{\mathbf{0}\}$, c'est-à-dire que $(F \cap G) \subset \{\mathbf{0}\}$ puisque F et G contiennent le polynôme nul, en tant que sous-espaces vectoriels de E .

4. Supposons que le polynôme constant égal à 1, appartient à $F + G$.
Alors 1 se décompose sous la forme $1 = P(X) + Q(X)$ où $P \in F$ et $Q \in G$.

Donc il existe $P \in F$ et $\lambda \in \mathbb{R}$ tels que $1 \stackrel{(*)}{=} P(X) + \lambda \cdot (X^2 + X + 1)$
En évaluant cette égalité $(*)$ de polynômes en $X = 1$, on obtient :

$$1 = \underbrace{P(1)}_{0 \text{ car } P \in F} + 3\lambda = 3\lambda \text{ d'où } \boxed{\lambda = \frac{1}{3}}$$

De plus, en intégrant les deux membres de $(*)$, il vient :

$$\int_0^1 1 dt = \int_0^1 (P(t) + \lambda \cdot (t^2 + t + 1)) dt = \underbrace{\int_0^1 P(t) dt}_{0 \text{ car } P \in F} + \lambda \int_0^1 (t^2 + t + 1) dt$$

$$\text{Donc } 1 = \lambda \left[\frac{t^3}{3} + \frac{t^2}{2} + t \right]_0^1 = \lambda \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{2} + 1 \right) = \frac{11}{6} \lambda \text{ puis } \boxed{\lambda = \frac{6}{11}}$$

ce qui contredit $\lambda = 1/3$

5. Les sous-espaces vectoriels F et G ne sont pas supplémentaires dans E ,

sinon on aurait $E = F \oplus G$, en particulier $E \subset (F + G)$ et le polynôme constant égal à 1, appartiendrait à $F + G$, ce qui est faux d'après la question précédente.

91

1. • G et $F \cap G$ sont deux sous-espaces vectoriels de E tels que $F \cap G \subset G$.
D'où $\dim(F \cap G) \leq \dim G$ c'est-à-dire $\dim(F \cap G) \leq 3$.
• $F + G$ est un sous-espace vectoriel de E . D'où $\dim(F + G) \leq \dim E$ c'est-à-dire $\dim(F + G) \leq 4$.

Or, d'après la formule de Grassmann,
 $\dim(F + G) = \dim F + \dim G - \dim(F \cap G)$.
Donc $\dim(F \cap G) = \dim F + \dim G - \dim(F + G)$ avec $-\dim(F + G) = -4$.

Ainsi $\dim(F \cap G) \geq 3 + 3 - 4 = 2$.

- Alors 1 se décompose sous la forme $1 = P(X) + Q(X)$ où $P \in F$ et $Q \in G$.

D'où $P(1) = 0$ et $\exists \lambda \in \mathbb{R} ; P = \lambda(X^2 + X + 1)$.

Donc $P(1) = \lambda(1^2 + 1 + 1) = 3\lambda = 0$. Ainsi $\lambda = 0$ puis $\boxed{P = \mathbf{0}}$.

4. Supposons que le polynôme constant égal à 1, appartient à $F + G$.

2. D'après la question précédente, $F \cap G$ est soit de dimension 2, soit de dimension 3.

Supposons que $\dim(F \cap G) = 3$.

Étant donné que $F \cap G$ est un sous-espace vectoriel de E tel que $F \cap G \subset F$ et que $\dim(F \cap G) = \dim F$, on obtient (*avec le théorème 14 (ii) du chapitre 3*) : $F \cap G = F$.

On justifie de façon analogue (en échangeant F et G) que $G \cap F = G$.

On en déduit que $F = F \cap G = G \cap F = G$, ce qui contredit l'hypothèse $F \neq G$.

Finalement $\boxed{\dim(F \cap G) = 2}$

puis d'après la formule de Grassmann, $\dim(F + G) = 4 = \dim(E)$.

Ainsi $E = F + G$, mais cette somme n'est pas directe.

2. • **1ère méthode** : on démontre que tout vecteur $u = a \cdot e_1 + b \cdot e_2 + c \cdot e_3$ de E , s'écrit de manière unique sous la forme

$$u = x \cdot f_1 + y \cdot f_2 + z \cdot f_3$$

avec $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$.

On est alors amené à résoudre le système linéaire de 3 équations, à 3 inconnues x, y, z suivant :

$$\begin{cases} x + y - z &= a \\ x + y &= b \\ x - y + z &= c \end{cases} \iff \dots \iff \begin{cases} x &= (a + c)/2 \\ y &= b - (a + c)/2 \\ z &= b - a \end{cases}$$

Cette méthode est la pire.

- **2ème méthode** : on montre que la famille (f_1, f_2, f_3) est libre (uniquement avec des implications dans ce cas).

Cette famille libre comporte 3 vecteurs dans l'espace vectoriel E qui est de dimension 3. Par conséquent la famille $\mathcal{B} = (f_1, f_2, f_3)$ est une base de E .

92 Relire la proposition 8 page 7 et le théorème 13 page 11 chapitre 3.

1. • **1ère méthode** : on cherche les réels a, b, c et d les que

$$a \cdot f_1 + b \cdot f_2 + c \cdot f_3 + d \cdot f_4 = \overrightarrow{0}_E$$

en résolvant un système linéaire de 4 équations à 4 inconnues a, b, c, d .
Cette méthode est la pire. Elle permet d'obtenir l'égalité vectorielle :
 $f_1 + f_2 - 2f_4 = \overrightarrow{0}_E$

- **2ème méthode** : on détermine le rang de la famille de vecteurs (f_1, f_2, f_3, f_4) par des opérations élémentaires sur les colonnes de la matrice

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

- **3ème méthode** : E est un \mathbb{R} -espace vectoriel de dimension 3.
Donc toute famille libre de E comporte au plus 3 vecteurs.
Ainsi une famille de quatre vecteurs est nécessairement liée.

- **3ème méthode** : on détermine d'abord le rang de la famille de vecteurs (f_1, f_2, f_3) .

$$\text{rg}(f_1, f_2, f_3) = \text{rg} \begin{pmatrix} \boxed{1} & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} = \text{rg} \begin{pmatrix} \boxed{1} & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & -2 & 2 \end{pmatrix}$$

$$C_2 \xleftarrow{\quad} C_3 \text{ rg} \begin{pmatrix} \boxed{1} & 0 & 0 \\ 1 & \boxed{1} & 0 \\ 1 & 2 & \boxed{-2} \end{pmatrix} = 3$$

$\text{Vect}(f_1, f_2, f_3)$ est un sous-espace vectoriel de E avec

$$\dim(\text{Vect}(f_1, f_2, f_3)) = \text{rg}(f_1, f_2, f_3) = 3 = \dim E.$$

D'où $E = \text{Vect}(f_1, f_2, f_3)$.

Autrement dit (f_1, f_2, f_3) est une famille génératrice de E .

Cette famille génératrice comporte 3 vecteurs dans l'espace vectoriel E qui est de dimension 3.

Par conséquent la famille $\mathcal{B} = (f_1, f_2, f_3)$ est une base de E .

- On considère le vecteur $u = e_1 + 2e_2 + e_3$. Alors u admet pour coordonnées dans la base (e_1, e_2, e_3) la matrice colonne : $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Ainsi $u = f_1 + f_2 + f_3$ ce qui revient à dire que le vecteur u admet pour

Attention : il est complètement FAUX d'écrire $u = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ ou $u = (1, 2, 1)$

coordonnées la matrice colonne $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ dans la base \mathcal{B} .

TD4 : développements limités

1 Énoncés

106 Calculer le développement limité à l'ordre 3 au voisinage de zéro de la fonction $f : x \mapsto e^{\sin x}$

107 On considère l'application $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ définie sur \mathbb{R} par :

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x}{e^x - 1} & \text{si } x \neq 0 \\ 1 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

On désigne par \mathcal{C} la courbe représentative de f dans le plan rapporté à un repère orthogonal.

1. Calculer le développement limité à l'ordre 2 au voisinage de 0 de f .
2. En déduire une équation de la tangente (T) à la courbe \mathcal{C} au point d'abscisse 0 et la position locale de (T) par rapport à \mathcal{C} au voisinage de ce point.

108 Final 2021. 1. Déterminer le développement limité à l'ordre 4, au voisinage de zéro, de la fonction $f : x \mapsto \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} - \cos x$

2. En déduire l'équation réduite de la tangente (T) à la courbe \mathcal{C} représentative de f au point $O(0, 0)$. Préciser la position locale de \mathcal{C} par rapport à (T) au voisinage du point O .

109 1. (a) Rappeler sans justification, le développement limité de $x \mapsto \frac{1}{1+x}$ à l'ordre 2 au voisinage de zéro.

(b) En déduire le développement limité à l'ordre 3 en zéro de $x \mapsto \ln(1+x)$.

2. On considère la fonction f définie sur l'intervalle ouvert $I =]-1, +\infty[$ par

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\ln(1+x)}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ 1 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

(a) Montrer que f est continue en zéro.

(b) Écrire le développement limité à l'ordre 2 au voisinage de 0 de f .

(c) f est-elle dérivable en 0 ? Si oui, donner $f'(0)$.

3. On définit la fonction g sur $I \setminus \{0\}$ par $g(x) = (1+x)^{\frac{1}{x}}$.

On rappelle que pour tous réels a et b tels que $a > 0$, $a^b = e^{b \ln a}$

(a) Déterminer le développement limité à l'ordre 2 au voisinage de 0 de la fonction $x \mapsto \exp(f(x) - 1)$.

(b) En déduire le développement limité à l'ordre 2 au voisinage de 0 de g .

4. On pose, pour tout entier naturel non nul n , $u_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$.

(a) Pour $n \in \mathbb{N}^*$, exprimer u_n à l'aide de la fonction g .

En déduire que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est convergente et préciser sa limite ℓ .

(b) En utilisant la question 3.(b), proposer un équivalent simple de $u_n - \ell$ lorsque n tend vers $+\infty$.

110 *En bonus!* On considère la fonction f définie sur $]1, +\infty[$ par :

$$\forall x \in]1, +\infty[, \quad f(x) = \frac{x^2 \sqrt{1 + \sin(\frac{1}{x})}}{x - 1}.$$

On désigne par \mathcal{C}_f la courbe représentative de f .

- Déterminer le développement limité à l'ordre 2 au voisinage de 0 de la fonction :

$$g : h \mapsto \frac{\sqrt{1 + \sin(h)}}{1 - h}.$$

- En déduire que pour x au voisinage de $+\infty$ on a :

$$f(x) = x + \frac{3}{2} + \frac{11}{8x} + \frac{1}{x}\varepsilon(x) \quad \text{où} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \varepsilon(x) = 0.$$

- Démontrer que \mathcal{C}_f admet en $+\infty$ une asymptote Δ dont on précisera l'équation.
- Étudier la position de \mathcal{C}_f par rapport à Δ au voisinage de $+\infty$.

2 Corrigés

106 Relire la proposition 7 page 6 chapitre 4.

On sait que $\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + x^3 \varepsilon_1(x) = x - \frac{x^3}{6} + x^3 \varepsilon_1(x)$

et que $e^u = 1 + u + \frac{u^2}{2!} + \frac{u^3}{3!} + u^3 \varepsilon_2(u) = 1 + u + \frac{u^2}{2} + \frac{u^3}{6} + u^3 \varepsilon_2(u)$.

Comme $\sin(0) = 0$, on peut calculer le $D\Gamma_3(0)$ de la fonction $f = \exp \circ \sin$.

$$\begin{array}{c|c} u & x - \frac{x^3}{6} \\ \hline u^2 & x^2 - \frac{x^4}{3} + \frac{x^6}{36} \end{array}$$

$$\begin{array}{c|c} u^3 = u \times u^2 & x^3 - \frac{x^5}{6} + \dots \\ \hline & \end{array}$$

$$\begin{aligned} D' où e^{\sin x} &= 1 + \left(x - \frac{x^3}{6} \right) + \frac{1}{2} x^2 + \frac{1}{6} x^3 + x^3 \varepsilon(x) \\ &= 1 + x + \frac{x^2}{2} + x^3 \varepsilon(x) \end{aligned}$$

$$\begin{array}{c|c} u & \left| \begin{array}{l} \frac{x}{2} + \frac{x^2}{6} \\ u^2 \quad x^2/4 \end{array} \right. \end{array}$$

En «composant» les développements limités des fonctions
 $x \mapsto \frac{x}{2} + \frac{x^2}{6} + x^2 \varepsilon_1(x)$ et $u \mapsto \frac{1}{1+u}$, on obtient alors :

$$\begin{aligned} f(x) &= 1 - \left(\frac{x}{2} + \frac{x^2}{6} \right) + \frac{x^2}{4} + x^2 \varepsilon(x) \\ &= 1 - \frac{x}{2} + \frac{x^2}{12} + x^2 \varepsilon(x) \text{ avec } \lim_{x \rightarrow 0} \varepsilon(x) = 0 \end{aligned}$$

2. La tangente (T) à la courbe \mathcal{C} au point $A(0, 1)$ admet pour équation réduite
 $y = 1 - \frac{x}{2}$ et la position locale de (T) par rapport à \mathcal{C} au voisinage de ce point est donnée par le signe de la différence :

$$f(x) - \left(1 - \frac{x}{2} \right) = \frac{x^2}{12} + x^2 \varepsilon(x) = x^2 \left(\frac{1}{12} + \varepsilon(x) \right)$$

Puisque $\lim_{x \rightarrow 0} \varepsilon(x) = 0$, pour tout réel x suffisamment proche de 0,
 $\frac{1}{12} + \varepsilon(x) > 0$.

Donc pour tout réel x suffisamment proche de 0, $f(x) \geqslant 1 - \frac{x}{2}$
Ainsi la courbe \mathcal{C} est située au dessus de sa tangente (T) au voisinage du point A .

107 1. On sait que pour tout réel x ,

$$\begin{aligned} e^x - 1 &= \left(1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + x^3 \varepsilon_1(x) \right) - 1 \\ &= x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + x^3 \varepsilon_1(x) \text{ avec } \lim_{x \rightarrow 0} \varepsilon_1(x) = 0 \end{aligned}$$

d'où $\forall x \in \mathbb{R}^*$, $f(x) = \frac{x}{e^x - 1} = \frac{1}{1 + [\frac{x}{2} + \frac{x^2}{6} + x^2 \varepsilon_1(x)]}$
Or $\frac{1}{1+u} = 1 - u + u^2 + u^2 \varepsilon_2(u)$ avec $\lim_{u \rightarrow 0} \varepsilon_2(u) = 0$

1. • Soit x au voisinage de 0, alors :

$$\cos(x) = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + x^4 \varepsilon_1(x) = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + x^4 \varepsilon_1(x),$$

où ε_1 est une fonction de limite nulle en 0.

- Soit u au voisinage de 0 :

$$\frac{1}{\sqrt{1+u}} = (1+u)^{-1/2} = 1 - \frac{1}{2}u + \left(\frac{-1}{2}\right)\left(\frac{-3}{2}\right)\frac{u^2}{2!} + u^2 \varepsilon_2(u),$$

où ε_2 est une fonction de limite nulle en 0. Ainsi, après simplification :

$$\frac{1}{\sqrt{1+u}} = 1 - \frac{1}{2}u + \frac{3}{8}u^2 + u^2 \varepsilon_2(u).$$

D'après ce qui précède, pour x au voisinage de 0 :

$$\frac{1}{\sqrt{1+x^2}} = 1 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{3}{8}(x^2)^2 + (x^2)^2 \varepsilon_2(x^2) = 1 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{3}{8}x^4 + x^4 \varepsilon_3(x),$$

où $\lim_{x \rightarrow 0} \varepsilon_3(x) = 0$ et donc :

$$\begin{aligned} f(x) &= 1 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{3}{8}x^4 + x^4 \varepsilon_2(x^2) - \left(1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + x^4 \varepsilon_1(x)\right) \\ &= \frac{1}{3}x^4 + x^4 \varepsilon(x), \end{aligned}$$

où $\lim_{x \rightarrow 0} \varepsilon(x) = 0$.

2. La partie affine du développement limité trouvé à la question précédente correspond à l'équation réduite de la tangente (T) à la courbe \mathcal{C} au point d'abscisse 0. On trouve donc :

$$(T) : y = 0.$$

De plus, pour tout réel x voisin de 0 :

$$f'(x) - 0 = \frac{1}{3}x^4 + x^4 \varepsilon(x) = x^4 \left(\frac{1}{3} + \varepsilon(x)\right) \geq 0$$

On en déduit que, au voisinage du point $O(0,0)$, la courbe \mathcal{C} se situe au-dessus de la tangente (T).

- 108** 1. On sait que $\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 + x^2 \varepsilon_1(x)$ avec $\lim_{x \rightarrow 0} \varepsilon_1(x) = 0$

- La fonction $x \mapsto \ln(1+x)$ est dérivable sur $] -1, +\infty[$ et sa dérivée admet un développement limité à l'ordre 2 au voisinage de 0 donné ci-dessus.
Donc $x \mapsto \ln(1+x)$ admet un développement limité à l'ordre 3 au voisinage de 0 donné par :

$$\ln(1+x) = \underbrace{\ln(1)}_0 + x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 + x^3 \varepsilon_2(x) \quad \text{avec } \lim_{x \rightarrow 0} \varepsilon_2(x) = 0$$

$$\text{c'est-à-dire} \quad \boxed{\ln(1+x) = x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 + o(x^3)}$$

2. (a) On rappelle que $\ln(1+x) \underset{(x \rightarrow 0)}{\sim} x$. D'où $\frac{\ln(1+x)}{x} \xrightarrow{(x \rightarrow 0)} 1 = f(0)$ ce qui prouve que f est continue en zéro.
(b) En utilisant 1., on obtient directement : pour tout réel x non nul, voisin de 0,

$$\boxed{f(x) = 1 - \frac{1}{2}x + \frac{1}{3}x^2 + x^2 \varepsilon_2(x)}$$

- égalité encore valable en $x = 0$.

- (c) Puisque f admet un DL₂(0), elle admet aussi un développement limité à l'ordre 1 en 0. De plus f est définie en 0.

Donc f est dérivable en 0 et $f'(0) = -\frac{1}{2}$.

3. (a) On sait que $f(x) - f(0) = -\frac{1}{2}x + \frac{1}{3}x^2 + x^2 \varepsilon_2(x)$ et que $e^u = 1 + u + \frac{u^2}{2!} + u^2 \varepsilon_3(u)$ avec $\lim_{u \rightarrow 0} \varepsilon_3(u) = 0$

Donc la fonction composée $x \mapsto \exp(f(x) - f(0))$ admet aussi un développement limité à l'ordre 2 en 0.

Donc $\frac{u_n - \ell}{\left(-\frac{e}{2n}\right)} \xrightarrow{(n \rightarrow +\infty)} 1$ ce qui revient à dire que

$$\boxed{u_n - e \underset{(n \rightarrow +\infty)}{\sim} -\frac{e}{2n}}$$

$$\begin{array}{l|l} u & \left| \begin{array}{l} -\frac{1}{2}x + \frac{1}{3}x^2 \\ \hline u^2 & \frac{1}{4}x^2 \end{array} \right. \\ \hline u^2 & \end{array}$$

Ainsi $e^{f(x)-f(0)} = 1 + \left(-\frac{1}{2}x + \frac{1}{3}x^2\right) + \frac{1}{2!} \left(\frac{1}{4}x^2\right) + x^2 \varepsilon_4(x)$

$$= 1 - \frac{1}{2}x + \frac{11}{24}x^2 + x^2 \varepsilon_4(x)$$

avec $\lim_{x \rightarrow 0} \varepsilon_4(x) = 0$.

110

(b) Pour tout réel $x \in I \setminus \{0\}$,

$$g(x) = (1+x)^{\frac{1}{x}} = e^{\frac{\ln(1+x)}{x}} = e^{f(x)} = e^{f(0)} e^{f(x)-f(0)} = e \exp(f(x)-f(0))$$

$$\text{On en déduit } \boxed{g(x) = e - \frac{e}{2}x + \frac{11e}{24}x^2 + x^2 \varepsilon_5(x)}$$

avec $\lim_{x \rightarrow 0} \varepsilon_5(x) = 0$

4. (a) On remarque que $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = g\left(\frac{1}{n}\right)$

Or $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} = 0$ et $\lim_{x \rightarrow 0} g(x) = e$.

D'où, par composée, $\boxed{\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = e}$ et $\ell = e$.

(b) Pour tout entier naturel non nul n , $u_n - \ell = g\left(\frac{1}{n}\right) - e$.

Or pour n suffisamment «grand», $\frac{1}{n}$ est proche de zéro.

On peut donc remplacer la variable x du développement limité obtenu en 3.(b), par $\frac{1}{n}$ et écrire :

$$\begin{aligned} u_n - \ell &= -\frac{e}{2} \frac{1}{n} + \frac{11e}{24} \frac{1}{n^2} + \frac{1}{n^2} \varepsilon_5\left(\frac{1}{n}\right) \\ &= -\frac{e}{2n} + \frac{11e}{24n^2} + \frac{\varepsilon_n}{n^2} \quad \text{avec } \lim_{n \rightarrow +\infty} \varepsilon_n = 0 \end{aligned}$$

D'où $\boxed{\frac{u_n - \ell}{\left(-\frac{e}{2n}\right)} = 1 + \frac{11e}{24n^2} \left(-\frac{2n}{e}\right) + \frac{\varepsilon_n}{n^2} \left(-\frac{2n}{e}\right) = 1 - \frac{22}{24n} - \frac{2\varepsilon_n}{ne}}$

- On rappelle que $\frac{1}{1-h} = 1 + h + h^2 + h^2 \varepsilon_5(h)$ avec $\lim_{h \rightarrow 0} \varepsilon_5(h) = 0$.

1. Pour tout réel h voisin de 0,

$$g(h) = \frac{\sqrt{1+\sin(h)}}{1-h} = (1+\sin(h))^{1/2} \times \frac{1}{1-h}.$$

• Pour tout réel u au voisinage de 0, on a :

$$\begin{aligned} (1+u)^{\frac{1}{2}} &= 1 + \frac{1}{2}u + \frac{1}{2!}u^2 + u^2 \varepsilon_1(u) \\ &= 1 + \frac{1}{2}u - \frac{1}{8}u^2 + u^2 \varepsilon_1(u) \end{aligned}$$

où $\lim_{u \rightarrow 0} \varepsilon_1(u) = 0$.
Posons $u = \sin(h)$. Alors u est au voisinage de 0 car $\lim_{h \rightarrow 0} \sin(h) = 0$.

$$\begin{aligned} -u &= \sin(h) = h + h^2 \varepsilon_2(h) \quad \text{où } \lim_{h \rightarrow 0} \varepsilon_2(h) = 0 \\ -u^2 &= (h + h^2 \varepsilon_2(h))^2 = h^2 + h^2 \varepsilon_3(h) \quad \text{où } \lim_{h \rightarrow 0} \varepsilon_3(h) = 0. \end{aligned}$$

On en déduit que :

$$(1+\sin(h))^{\frac{1}{2}} = 1 + \frac{1}{2}h - \frac{1}{8}h^2 + h^2 \varepsilon_4(h),$$

où $\lim_{h \rightarrow 0} \varepsilon_4(h) = 0$.

- Ainsi,

$$\begin{aligned} \boxed{g(h)} &= \left(1 + \frac{1}{2}h - \frac{1}{8}h^2 + h^2\varepsilon_5(h)\right) \times \left(1 + h + h^2 + h^2\varepsilon_1(h)\right) \\ &= \left(1 + h + h^2\right) + \left(\frac{1}{2}h + \frac{1}{2}h^2\right) + \left(-\frac{1}{8}h^2\right) + h^2\varepsilon_6(h) \\ &= 1 + \frac{3}{2}h + \frac{11}{8}h^2 + h^2\varepsilon_6(h), \end{aligned}$$

où $\lim_{h \rightarrow 0} \varepsilon_6(h) = 0$.

2. Pour tout réel $h \in]0, 1[$,

$$hf\left(\frac{1}{h}\right) = h \frac{\left(\frac{1}{h}\right)^2 \sqrt{1 + \sin(h)}}{\frac{1}{h} - 1} = \frac{\sqrt{1 + \sin(h)}}{1 - h} = g(h).$$

Or, d'après la question précédente, pour tout h voisin de 0^+ ,

$$g(h) = 1 + \frac{3}{2}h + \frac{11}{8}h^2 + h^2\varepsilon_6(h).$$

En posant $x = \frac{1}{h}$, on obtient pour tout réel x voisin de $+\infty$:

$$\begin{aligned} \frac{f(x)}{x} &= 1 + \frac{3}{2}\left(\frac{1}{x}\right) + \frac{11}{8}\left(\frac{1}{x}\right)^2 + \left(\frac{1}{x}\right)^2\varepsilon_6\left(\frac{1}{x}\right) \\ &= 1 + \frac{3}{2x} + \frac{11}{8x^2} + \frac{1}{x^2}\varepsilon(x), \end{aligned}$$

où $\varepsilon(x) = \varepsilon_6\left(\frac{1}{x}\right) \xrightarrow{(x \rightarrow +\infty)} 0$.

En multipliant par x , on en déduit l'égalité :

$$\boxed{f(x) = x + \frac{3}{2} + \frac{11}{8x} + \frac{1}{x}\varepsilon(x).}$$

3. D'après l'égalité précédente, pour tout réel x voisin de $+\infty$,

$$f(x) - \left(x + \frac{3}{2}\right) = \frac{11}{8x} + \frac{1}{x}\varepsilon(x) \xrightarrow{(x \rightarrow +\infty)} 0$$

On en déduit que \mathcal{C}_f admet en $+\infty$ une asymptote Δ d'équation $y = x + \frac{3}{2}$.

4. Soit x au voisinage de $+\infty$. On a

$$f(x) - \left(x + \frac{3}{2}\right) = \frac{1}{x} \left(\frac{11}{8} + \varepsilon(x)\right).$$

Or $\lim_{x \rightarrow +\infty} \varepsilon(x) = 0$, donc $\frac{11}{8} + \varepsilon(x) > 0$. D'autre part, $\frac{1}{x} > 0$. On en déduit que :

$$f(x) - \left(x + \frac{3}{2}\right) > 0.$$

Par conséquent, au voisinage de $+\infty$, la courbe \mathcal{C}_f est située au-dessus de Δ .

TD5 : applications linéaires

1 Énoncés

130 Avec le théorème du rang . Soit $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$ tel que $f \circ f = \tilde{0}$.

1. Montrer que $\text{Im } f \subset \text{Ker } f$.
2. On suppose de plus que $f \neq \tilde{0}$.
Déterminer par disjonction des cas, le rang de f .

131 Soit $E = \mathcal{C}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ l'espace vectoriel des fonctions continues sur \mathbb{R} à valeurs dans \mathbb{R} .

On considère l'application Φ qui, à toute fonction f de E , associe la fonction $\Phi(f)$ définie sur \mathbb{R} par

$$\forall x \in \mathbb{R}, \Phi(f)(x) = \int_x^{x+1} f(t) dt$$

1. (a) Soit $f \in E$. En introduisant une primitive F de f sur \mathbb{R} , justifier que $\Phi(f)$ est dérivable sur \mathbb{R} .
(b) En déduire que l'application Φ n'est pas surjective.
2. Montrer que Φ est un endomorphisme de E .
3. Soit la fonction $g : x \mapsto \cos(2\pi x)$. Calculer pour tout réel x , $\Phi(g)(x)$.
 Φ est-elle injective ? Justifier.

132 Soient E un \mathbb{K} -espace vectoriel et f un endomorphisme de E .

On note $f^2 = f \circ f$.

Démontrer l'équivalence suivante :

$$\text{Im } f \cap \text{Ker } f = \left\{ \overrightarrow{0}_E \right\} \iff \text{Ker } f = \text{Ker } f^2$$

133 Bonus : avec des polynômes. On note :

- $E = \mathbb{R}[X]$ l'espace vectoriel réel des polynômes à une indéterminée et à coefficients réels,
- $E_n = \mathbb{R}_n[X]$ le sous-espace vectoriel de E formé des polynômes de degré inférieur ou égal à n (où $n \in \mathbb{N}$).

On définit l'application $\Delta : E \rightarrow E$ par $\Delta(P) = P(X+1) - P(X)$

1. Rappeler, sans démonstration, la dimension de l'espace E_n et sa base canonique \mathcal{B}_n .
2. Montrer que Δ est une application linéaire.
3. (a) Si C est un polynôme constant, que peut-on dire de $\Delta(C)$?
 (b) Déterminer le noyau de Δ . Δ est-elle injective ?
4. Soit n un entier naturel non nul.
 - Montrer que, pour tout polynôme non constant P , $\deg(\Delta(P)) = \deg(P) - 1$
 - En déduire que $\Delta(E_n) \subset E_{n-1}$.
 - Démontrer que $\Delta(E_n) = E_{n-1}$. Δ est-elle surjective ?
 - Justifier que si $Q \in E_{n-1}$, il existe un unique $P \in E_n$ tel que $\Delta(P) = Q$ et $P(0) = 0$.
5. Soit $(H_i)_{i \in \mathbb{N}}$ la suite de polynômes définie par :

$$H_0 = 1 \quad \text{et} \quad \forall i \in \mathbb{N}^*, \quad H_i = \frac{1}{i!} \prod_{k=0}^{i-1} (X-k) = \frac{X(X-1)(X-2)\dots(X-i+1)}{i!}$$

- Préciser H_1 , H_2 , H_3 et calculer $H_1 + 6H_2 + 6H_3$.
- Calculer $\Delta(H_0)$ et $\Delta(H_1)$. Prouver que, pour tout entier naturel i vérifiant $2 \leq i \leq 4$,

$$\Delta(H_i) = H_{i-1}$$

6. (a) En utilisant la question 5, déterminer le polynôme $P \in E_4$ tel que $P(0) = 0$ et

$$P(X+1) - P(X) = X^3$$

Indication : on exprimera P comme combinaison linéaire des H_i .

- En déduire la valeur de $S = \sum_{k=0}^n k^3$ pour $n \in \mathbb{N}^*$.

2 Corrigés

130 Relire théorème 12 chapitre 5 et théorème 14 chapitre 3.

Soit $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$ tel que $f \circ f = \tilde{0}$.

1. Soit $y \in \text{Im } f$. Alors $\exists u \in \mathbb{R}^3 ; y = f(u)$.
D'où $f(y) = f(f(u)) = (f \circ f)(u) = \tilde{0}(u) = \tilde{0} = (0, 0, 0)$. Donc $y \in \text{Ker } f$.

Ainsi $\forall y \in \text{Im } f, y \in \text{Ker } f$ ce qui signifie que $\text{Im } f \subset \text{Ker } f$.

2. On suppose de plus que $f \neq \tilde{0}$.

On sait que $\text{Im } f$ est un sous-espace vectoriel de \mathbb{R}^3 avec $\dim(\mathbb{R}^3) = 3$.
Donc $0 \leq \dim(\text{Im } f) \leq 3$. On rappelle que $\text{rg}(f) = \dim(\text{Im } f)$.

• On ne peut pas avoir $\text{rg}(f) = 0$ sinon f serait l'endomorphisme nul.

• Supposons $\text{rg}(f) = 3$. Alors, d'après la formule du rang,
 $\dim(\mathbb{R}^3) = \dim(\text{Ker } f) + \text{rg}(f)$ d'où $\dim(\text{Ker } f) = 3 - 3 = 0$.
Or, d'après la question 1, $\text{Im } f \subset \text{Ker } f$.

• Supposons $\text{rg}(f) = 2$. Alors, d'après la formule du rang,
 $\dim(\mathbb{R}^3) = \dim(\text{Ker } f) + \text{rg}(f)$ d'où $\dim(\text{Ker } f) = 3 - 2 = 1$.
Or, d'après la question 1, $\text{Im } f \subset \text{Ker } f$.
Donc $\dim(\text{Im } f) \leq \dim(\text{Ker } f)$ c'est-à-dire $2 \leq 1$ ce qui est absurde.

Ainsi $\boxed{\text{Le rang de } f \text{ est nécessairement égal à 1 et } \dim(\text{Ker } f) = 2}$.

En désignant par $\tilde{0}$ la fonction constante égale à 0, on a donc $\Phi(g) = \tilde{0}$ avec
 $\boxed{\Phi(g)(x) = 0}$.

En désignant par $\tilde{0}$ la fonction constante égale à 0, on a donc $\Phi(g) = \tilde{0}$ avec
 $\boxed{\Phi(g)(x) = 0}$.

Ainsi $\boxed{\Phi \text{ n'est pas injective.}}$

131 $\forall x \in \mathbb{R}, \Phi(f)(x) = \int_x^{x+1} f(t) dt$

1. (a) La fonction f est supposée continue sur \mathbb{R} , elle admet donc des primitives sur \mathbb{R} . Soit F l'une d'entre elles.

Pour tout réel x , on a : $\boxed{\Phi(f)(x) = F(x+1) - F(x)}$.

Comme F est dérivable sur \mathbb{R} , la fonction $\Phi(f)$ est aussi dérivable sur \mathbb{R} et $\forall x \in \mathbb{R}, (\Phi(f))'(x) = f(x+1) - f(x)$.

(b) Soit $h : x \mapsto |x|$. La fonction h est continue sur \mathbb{R} et appartient donc à E , mais n'est pas dérivable en 0. Or pour toute fonction f de E , $\Phi(f)$ est dérivable sur \mathbb{R} . Donc h n'a pas d'antécédent par Φ , qui n'est donc pas surjective.

132 $\boxed{\text{Revoir définitions 3 et 5 chapitre 5.}}$

• Montrons, sans hypothèse supplémentaire sur f , que $\boxed{\text{Ker } f \subset \text{Ker}(f^2)}$.

Soit x un vecteur appartenant à $\text{Ker } f$. Alors $f(x) = \tilde{0}_E$.
D'où $f(f(x)) = f(\tilde{0}_E) = \tilde{0}_E$ car f est linéaire.
Donc $f^2(x) = (f \circ f)(x) = f(f(x)) = \tilde{0}_E$. Ainsi $x \in \text{Ker}(f^2)$.

- (\Rightarrow) Supposons que $\text{Im}f \cap \text{Ker}f = \{\overrightarrow{0}_E\}$.

Pour montrer que $\text{Ker}f = \text{Ker}(f^2)$, il suffit de prouver que $\boxed{\text{Ker}(f^2) \subset \text{Ker}f}$.

car l'inclusion $\text{Ker}f \subset \text{Ker}(f^2)$ est toujours vraie.

Soit x un vecteur appartenant à $\text{Ker}(f^2)$. Alors $f^2(x) = \overrightarrow{0}_E$. D'où $f(f(x)) = \overrightarrow{0}_E$.

On en déduit que $f(x) \in \text{Ker}f$.

De plus $f(x) \in \text{Im}f$ par définition de l'image de f . Donc $f(x) \in \text{Im}f \cap \text{Ker}f$.

Or on a supposé que $\text{Im}f \cap \text{Ker}f = \{\overrightarrow{0}_E\}$.

Par conséquent $f(x) = \overrightarrow{0}_E$ ce qui signifie que $x \in \text{Ker}f$.

• (\Leftarrow) Réciproquement, supposons que $\text{Ker}f = \text{Ker}(f^2)$.

Pour montrer que $\text{Im}f \cap \text{Ker}f = \{\overrightarrow{0}_E\}$, il suffit de prouver que

$$\boxed{\text{Im}f \cap \text{Ker}f \subset \{\overrightarrow{0}_E\}}$$

car l'inclusion $\boxed{\{\overrightarrow{0}_E\} \subset \text{Im}f \cap \text{Ker}f}$ est toujours vraie vu que $f(\overrightarrow{0}_E) = \overrightarrow{0}_E$.

Soit y un vecteur appartenant à $\text{Im}f \cap \text{Ker}f$. Alors $y \in \text{Im}f$ et $y \in \text{Ker}f$.

Donc $\exists x \in E ; y = f(x)$ et $f(y) = \overrightarrow{0}_E$.

On en déduit que $f^2(x) = (f \circ f)(x) = f(f(x)) = f(y) = \overrightarrow{0}_E$.

Ainsi $x \in \text{Ker}(f^2)$. Or on a supposé que $\text{Ker}f = \text{Ker}(f^2)$.

Donc $x \in \text{Ker}f$ ce qui revient à dire que $f(x) = \overrightarrow{0}_E$. Finalement $y = \overrightarrow{0}_E$.

- 3. (a) Soit $C \in \mathbb{R}_0[X]$ un polynôme constant.

Écrivons par exemple $C = c_0$ où $c_0 \in \mathbb{R}$.

Alors $\Delta(C) = c_0 - c_0 = 0$, ce qui montre que $C \in \text{Ker}\Delta$.

Ainsi $\boxed{\mathbb{R}_0[X] \subset \text{Ker}\Delta}$

- (b) Réciproquement, soit $P \in \text{Ker}\Delta$. Alors $P(X+1) = P(X)$. Donc, pour tout entier relatif n , $P(n) = P(0)$. On en déduit que le polynôme $P(X) - P(0)$ possède une infinité de racines réelles, il est donc nul, et par conséquent, $P(X) = P(0)$ est un polynôme constant : $P \in \mathbb{R}_0[X]$. Ainsi $\text{Ker}\Delta \subset \mathbb{R}_0[X]$. L'inclusion établie en 3.(a) permet de conclure que $\boxed{\text{Ker}\Delta = \mathbb{R}_0[X]}$

- $\text{Ker}\Delta \neq \{0_E\}$. Donc Δ n'est pas injective.

- 4. Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

- (a) Soit P un polynôme non constant de degré n .

On peut écrire $P = a_0 + a_1 X + a_2 X^2 + \cdots + a_n X^n = \sum_{k=0}^n a_k X^k$ avec $a_n \neq 0$.

Alors, par linéarité de Δ , $\Delta(P) = \sum_{k=0}^n a_k \Delta(X^k)$.

Or pour $k \geq 1$, $\Delta(X^k) = (X+1)^k - X^k = \sum_{i=0}^{k-1} \binom{k}{i} X^i$ est de degré $k-1$.

Donc $\deg(\Delta(P)) = \deg(\Delta(X^n)) = n-1$

Ainsi $\deg(\Delta(P)) = \deg(P) - 1$

(b) Il est clair que $\forall P \in E_n, \Delta(P) \in E_{n-1}$ ce qui signifie que $\boxed{\Delta(E_n) \subset E_{n-1}}$

- (c) On note δ l'application linéaire de E_n dans E_{n-1} définie par $\forall P \in E_n, \delta(P) = \Delta(P) = P(X+1) - P(X)$

- En appliquant le théorème du rang,

$$\begin{aligned} \dim E_n &= \dim(\text{Ker } \delta) + \dim(\text{Im } \delta) \\ &= |\lambda P(X+1) - \lambda P(X)| + [Q(X+1) - Q(X)]. \end{aligned}$$

Or $\text{Ker } \delta = \text{Ker}\Delta = E_0$ est de dimension 1 , $\dim E_n = n+1$ et $\text{Im } \delta = \Delta(E_n)$.

$$\text{Donc } \boxed{\Delta(\lambda P + Q) = \lambda \Delta(P) + \Delta(Q)}$$

133

1. Le \mathbb{R} -espace vectoriel E_n est de dimension finie égale à $n+1$.

Sa base canonique est $\mathcal{B}_n = (\mathbf{1}, X, X^2, X^3, \dots, X^n)$.

2. Soit P et Q deux polynômes de E et λ un réel.

$$\Delta(\lambda P + Q) = (\lambda P + Q)(X+1) - (\lambda P + Q)(X)$$

$$= \lambda P(X+1) + Q(X+1) - (\lambda P(X) + Q(X))$$

$$= [\lambda P(X+1) - \lambda P(X)] + [Q(X+1) - Q(X)].$$

Donc $\dim(\text{Im } \delta) = n = \dim E_{n-1}$ et $\Delta(E_n)$ est un sous-espace vectoriel de E_{n-1} , qui a la même dimension que E_{n-1} .

Par conséquent $\Delta(E_n) \stackrel{(*)}{=} E_{n-1}$.

• Soit $Q \in E$. Supposons $Q \neq 0_E$. Posons $q = \deg(Q)$ et $n = q + 1$.

Puisque $Q \in E_{n-1}$, il existe $P \in E_n$ tel que $Q = \Delta(P)$ d'après (\star) .
Donc Δ est surjective.

(d) Soit $Q \in E_{n-1}$ un polynôme quelconque fixé de degré au plus $n - 1$.

Existence : Δ étant surjective, $\exists R \in E_n / \Delta(R) = Q$.

En posant $P = R - R(0)$, on a $P \in E_n$ et $\Delta(P) = \Delta(R) - \Delta(R(0)) = \Delta(R) = Q$ avec $P(0) = R(0) - R(0) = 0$.

Unicité : on suppose qu'il existe deux polynômes P et T éléments de E_n tels que

$$\Delta(P) = \Delta(T) = Q \quad \text{et } P(0) = T(0) = 0$$

Alors $P - T \in \text{Ker } \Delta$. Donc $P - T$ est un polynôme constant égal à $k \in \mathbb{R}$.
En particulier $P(0) - T(0) = k = 0$. Donc $P = T$.

5. (a) $H_1 = X$, $H_2 = \frac{1}{2}X(X - 1)$, $H_3 = \frac{1}{6}X(X - 1)(X - 2)$.

$$H_1 + 6H_2 + 6H_3 = X + 3X(X - 1) + X(X - 1)(X - 2) \\ = X + 3X^2 - 3X + X^3 - 2X^2 - X^2 + 2X = X^3.$$

- (b) $\Delta(H_0) = 0$ et $\Delta(H_1) = 1$.

$$\begin{aligned} \Delta(H_i) &= H_i(X + 1) - H_i(X) \\ &= \frac{1}{i!} \prod_{k=0}^{i-1} (X - (k - 1)) - \frac{1}{i!} \prod_{k=0}^{i-1} (X - k) \\ &= \frac{(X + 1)}{i!} \prod_{k=0}^{i-2} (X - k) - \frac{(X - i + 1)}{i!} \prod_{k=0}^{i-2} (X - k) \\ &= [(X + 1) - (X - i + 1)] \frac{1}{i!} \prod_{k=0}^{i-2} (X - k) \\ &= \frac{i}{i!} \prod_{k=0}^{i-2} (X - k) \\ &= H_{i-1} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 6. \quad (a) \quad X^3 &= H_1 + 6H_2 + 6H_3 = \Delta(H_2) + 6\Delta(H_3) + 6\Delta(H_4) = \Delta(H_2 + \\ &\quad 6H_3 + 6H_4) \\ \text{Posons } &\boxed{P = H_2 + 6H_3 + 6H_4}. \quad \text{On obtient} \\ P &= \frac{X(X - 1)}{2} + X(X - 1)(X - 2) + \frac{X(X - 1)(X - 2)(X - 3)}{4} \end{aligned}$$

D'où $X^3 = \Delta(P)$ et $P(0) = 0$ avec $\deg(P) = 4$.

Soit $i \in \mathbb{N}^*$. On vient de voir que $\Delta(H_1) = H_0$. On propose ici un calcul général valable pour n'importe quel entier $i \geq 2$.

Finalelement

(b) Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

$$\begin{aligned}
 S &= \sum_{k=0}^n k^3 \\
 &= \sum_{k=0}^n (P(k+1) - P(k)) \\
 &= P(n+1) - P(0) \\
 &= P(n+1) \\
 &= \frac{(n+1)n}{2} + (n+1)n(n-1) + \frac{(n+1)n(n-1)(n-2)}{4} \\
 &= \frac{(n+1)n}{4} [2 + 4(n-1) + (n-1)(n-2)] \\
 &= \frac{(n+1)n}{4} [2 + 4n - n + n^2 - 2n - n + 2] \\
 &= \frac{(n+1)n}{4} [2 + 4n - n + n^2 - 2n - n + 2] \\
 &= \frac{(n+1)n}{4} (n^2 + n)
 \end{aligned}$$

$$S = \left\lceil \frac{n(n+1)}{2} \right\rceil^2$$

TD6 : fonctions de deux variables

1 Énoncés

156 *Vrai ou Faux ?*

1. L'ensemble $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid xy > 1\}$ est une partie ouverte de \mathbb{R}^2 .
2. La ligne de niveau 2 de la fonction $(x, y) \mapsto 2xy - 1$ est une parabole.
3. La fonction $g : (x, y) \mapsto \frac{\sin(x^2 + y^2)}{x^2 + y^2}$ admet une limite réelle en $(0, 0)$.
4. On considère la fonction f définie sur \mathbb{R}^2 par $f(x, y) = \frac{xy}{x^2 + 3y^2}$ si $(x, y) \neq (0, 0)$ et $f(0, 0) = 0$. Alors f est continue sur \mathbb{R}^2 .
5. Soit f une fonction définie sur un ouvert U de \mathbb{R}^2 , à valeurs dans \mathbb{R} . Si f admet des dérivées partielles premières en un point $a \in U$, alors f est continue en a .

157 *Final 2019.* On considère la fonction f définie sur \mathbb{R}^2 par :

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \quad f(x, y) = x^4 - xy^3 + 3y^4$$

1. Calculer les dérivées partielles premières de f en tout point (x, y) de \mathbb{R}^2 .
2. Démontrer que f admet un unique point critique a que l'on précisera.
3. (a) Développer l'expression : $\left(x^2 - \frac{y^2}{2}\right)^2 + \left(xy - \frac{y^2}{2}\right)^2 + \frac{5}{2}y^4$
(b) La fonction f possède-t-elle un extremum ? Est-il global ou seulement local ?

158 *Final 2016.*

On admet dans cet exercice que l'équation d'inconnue x , $e^x = \frac{1}{x^2}$ admet une solution et une seule α dans $\mathbb{R}^{+*} =]0, +\infty[$, et que $\frac{1}{2} < \alpha < 1$.

On considère l'ouvert $U =]0, +\infty[\times \mathbb{R}$ de \mathbb{R}^2 et la fonction f de classe \mathcal{C}^2 sur U définie par

$$f : \quad U \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$(x, y) \mapsto \frac{1}{x} + e^x - y^2 e^y$$

1. Représenter graphiquement l'ensemble U .
Calculer les dérivées partielles premières de f en tout point $(x, y) \in U$.
2. Montrer que f admet deux points critiques et deux seulement, dont l'un des deux est $a = (\alpha, -2)$.
3. Est-ce que f admet un extremum local en a ? Si oui, préciser sa nature.

159 Le but de l'exercice est l'étude des extremums de la fonction

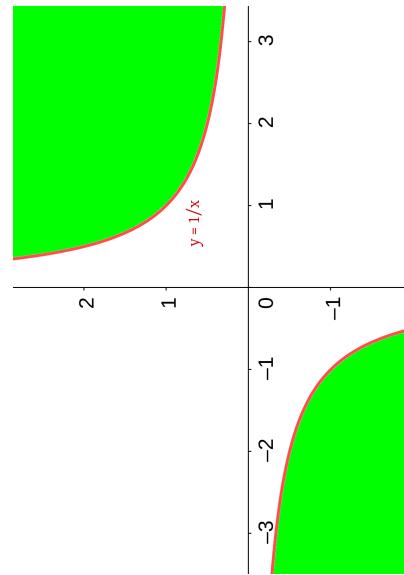
$$\begin{aligned} f : \mathbb{R}^2 &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (x, y) &\longmapsto x^2 - 2xy + 2y^2 + e^{-x} \end{aligned}$$

1. (a) Montrer que l'équation d'inconnue réelle x , $e^{-x} = x$, admet une solution et une seule α .
(b) Vérifier que $\frac{1}{2} < \alpha < 1$. *On rappelle que $e > 2$ et $\sqrt{e} < 2$.*
2. (a) Calculer les dérivées partielles premières de la fonction f .
(b) Déterminer en fonction de α , le seul point critique de f , c'est-à-dire le seul couple de \mathbb{R}^2 en lequel f est susceptible de présenter un extremum.
3. (a) Calculer les dérivées partielles secondes de f .
(b) En déduire que f présente un extremum m en un unique point de \mathbb{R}^2 .
S'agit-il d'un minimum ou d'un maximum ?
(c) Exprimer en fonction de α la valeur exacte de cet extremum m .

2 Corrigés

156 Vrai ou Faux ?

1. VRAI. Il s'agit de la réunion de deux ouverts disjoints de \mathbb{R}^2 .



2. FAUX. Cette ligne de niveau admet pour équation $2xy - 1 = 2 \iff y = \frac{3}{2x}$

dans le repère $(O; \vec{i}, \vec{j})$ du plan (Oxy). Il s'agit d'une hyperbole.

3. VRAI. Pour tout réel $r > 0$ et tout réel θ ,

$$g(r \cos \theta, r \sin \theta) = \frac{\sin(r^2)}{r^2} \underset{(r \rightarrow 0^+)}{\sim} \frac{r^2}{r^2} = 1$$

4. FAUX. $\forall t \in \mathbb{R}^*$, $f(t, t) = \frac{1}{4}$ ne tend pas vers $f(0, 0)$ lorsque $t \rightarrow 0$.
 f est continue sur l'ouvert $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$

5. FAUX.

On prend comme contre-exemple la fonction f précédente, $U = \mathbb{R}^2$ et $a = (0, 0)$.

On vérifie que $\frac{\partial f}{\partial x}(0, 0) = \frac{\partial f}{\partial y}(0, 0) = 0$

alors que f n'est pas continue en $(0, 0)$.

157

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \quad f(x, y) = x^4 - xy^3 + 3y^4$$

1. En tant que fonction polynôme, la fonction f est de classe C^1 sur \mathbb{R}^2 qui est un ouvert. Pour tous réels x et y ,

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) &= 4x^3 - y^3 \quad \text{et} \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = -3xy^2 + 12y^3 \end{aligned}$$

2. Les éventuels points critiques de f sont les solutions du système suivant :

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4x^3 - y^3 = 0 \\ -3xy^2 + 12y^3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y^3 = 4x^3 \\ 3y^2(-x + 4y) = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y^3 = 4x^3 \\ y = 0 \end{cases} \quad \text{ou} \quad \begin{cases} y^3 = 4(4y)^3 \\ x = 4y \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases} \quad \text{ou} \quad \begin{cases} (1 - 4^4)y^3 = 0 \\ x = 4y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases}$$

Par conséquent la fonction f admet un unique point critique : $a = (0, 0)$.

$$\begin{aligned} 3. \quad (\text{a}) \quad & \left(x^2 - \frac{y^2}{2} \right)^2 + \left(xy - \frac{y^2}{2} \right)^2 + \frac{5}{2}y^4 \\ &= \left(x^4 - x^2y^2 + \frac{y^4}{4} \right) + \left(x^2y^2 - xy^3 + \frac{y^4}{4} \right) + \frac{5}{2}y^4 \\ &= x^4 - x^2y^2 + x^2y^2 - xy^3 + \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{5}{2} \right)y^4 = x^4 - xy^3 + 3y^4 \\ &= f(x, y). \end{aligned}$$

- (b) Le carré d'un réel est un nombre positif ou nul. Donc la somme de 3 carrés est positive ou nulle, ce qui donne ici :

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \quad \left(x^2 - \frac{y^2}{2} \right)^2 + \left(xy - \frac{y^2}{2} \right)^2 + \left(\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{2}}y^2 \right)^2 \geqslant 0$$

c'est-à-dire $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \quad f(x, y) \geqslant 0$
Or $f(a) = f(0, 0) = 0$. Donc la fonction f possède un minimum global égal à zéro et atteint de façon unique en a .

REMARQUE : dans cet exercice, la condition suffisante du second ordre échoue car au point $a = (0, 0)$, avec les notations de Monge : $r = s = t = 0$ et $rt - s^2 = 0$.

$$s = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(a) = 0 \quad \text{et} \quad t = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(a) = -(2 - 8 + 4)e^{-2} = 2e^{-2}$$

La matrice hessienne de f en a est donc :

$$\boxed{158} \quad \text{On pose } U =]0, +\infty[\times \mathbb{R} \text{ et } \forall (x, y) \in U, f(x, y) = \frac{1}{x} + e^x - y^2 e^y$$

1. U est le demi plan ouvert situé à droite de l'axe des ordonnées (axe exclu) des couples (x, y) de \mathbb{R}^2 pour lesquels $x > 0$.

Pour tout couple $(x, y) \in U$,

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = -\frac{1}{x^2} + e^x \quad \text{et} \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = -(2y e^y + y^2 e^y) = -y(2+y)e^y$$

2. Le(s) éventuel(s) point(s) critique(s) de f sont solution(s) du système :

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} -\frac{1}{x^2} + e^x = 0 \\ -y(2+y)e^y = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} e^x = \frac{1}{x^2} \\ y(2+y) = 0 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} x = \alpha \\ y = -2 \text{ ou } y = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x = \alpha \\ y = -2 \end{cases} \text{ ou } \begin{cases} x = \alpha \\ y = 0 \end{cases}$$

$$\boxed{159} \quad \text{car on a admis que l'équation } e^x = \frac{1}{x^2} \text{ admettrait une seule solution } \alpha \text{ dans }]0, +\infty[. \text{ La fonction } f \text{ admet donc exactement deux points critiques :}$$

$$\boxed{a = (\alpha, -2)} \quad \text{et} \quad \boxed{b = (\alpha, 0)}$$

3. Comme f est de classe C^2 sur l'ouvert U , il suffit de vérifier la condition suffisante d'extrémum d'ordre 2.

On calcule d'abord les dérivées partielles secondes de f sur U :

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y) = \frac{2}{x^3} + e^x, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x, y) = 0 \quad \text{et} \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x, y) = -(2 + 4y + y^2)e^y$$

En utilisant les notations de Monge au point $a = (\alpha, -2)$:

$$r = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a) = \frac{2}{\alpha^3} + e^\alpha,$$

$$H(f)_a = \begin{pmatrix} r & s \\ s & t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{2}{\alpha^3} + e^\alpha & 0 \\ 0 & 2e^{-2} \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} \text{son déterminant est } rt - s^2 &= 2 \left(\frac{2}{\alpha^3} + e^\alpha \right) e^{-2} > 0 \\ \text{donc } rt - s^2 &> 0 \text{ avec } r > 0. \end{aligned} \quad \boxed{\text{Ainsi } f \text{ présente un minimum local en } a.}$$

REMARQUES :

- on pourrait démontrer que ce **minimum n'est pas absolu**. En effet, la deuxième application partielle de f en un point quelconque (x_0, y_0) de U est la fonction $f_2 : t \mapsto f(x_0, t) = \frac{1}{x_0} + e^{x_0} - t^2 e^t$ qui a pour limite $-\infty$ lorsque $t \rightarrow +\infty$.
- on pourrait enfin prouver que f ne présente pas d'extrémum local en b .

$$f(x, y) = x^2 - 2xy + 2y^2 + e^{-x}$$

1. (a) On étudie le sens de variation de la fonction différence $h : x \mapsto x - e^{-x}$.

$$h \text{ est dérivable sur } \mathbb{R} \text{ et } \forall x \in \mathbb{R}, h'(x) = 1 + e^{-x} > 0.$$

- Limite de h en $+\infty$: $e^{-x} = \frac{1}{e^x} \xrightarrow{(x \rightarrow +\infty)} 0^+$.

$$\text{D'où } \lim_{x \rightarrow +\infty} h(x) = +\infty.$$

- Limite de h en $-\infty$: $\forall x < 0, h(x) = x \left(1 + \frac{e^{-x}}{-x} \right)$

$$\text{Or } \lim_{x \rightarrow -\infty} -x = +\infty \text{ et on sait que } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{X} = +\infty$$

On en déduit, par composition, que $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{e^{-x}}{-x} = +\infty$ puis que $\lim_{x \rightarrow -\infty} h(x) = -\infty$

x	$-\infty$	$+\infty$
$h'(x)$	+	
h	\nearrow	$+\infty$

\nearrow

La fonction h est dérivable donc *continue et strictement croissante sur l'intervalle* \mathbb{R} . L'image de \mathbb{R} par h est l'intervalle :

$$h(\mathbb{R}) = \left[\lim_{-\infty} h; \lim_{+\infty} h \right] = \mathbb{R} \quad \text{qui contient } 0.$$

Donc d'après le théorème dit «de la bijection», l'équation

$$\boxed{h(x) = 0 \iff e^{-x} = x \text{ admet une unique solution } \alpha \text{ dans } \mathbb{R}}$$

$$(b) \quad h(1/2) = \frac{1}{2} - \frac{1}{\sqrt{e}} = \frac{\sqrt{e}-2}{2\sqrt{e}} < 0 \quad \text{car } \sqrt{e} < 2$$

et $h(1) = 1 - e^{-1} = \frac{e-1}{e} > 0$ car $e > 2$,

on obtient alors $h(1/2) < h(\alpha) < h(1)$.

Or la bijection réciproque de h a le même sens de variation que h , à savoir strictement croissante sur \mathbb{R} . Donc $\boxed{1/2 < \alpha < 1}$

2. (a) f est de classe \mathcal{C}^1 sur \mathbb{R}^2 qui est ouvert.

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 2x - 2y - e^{-x} \quad \text{et} \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = -2x + 4y$$

- (b) Le(s) éventuel(s) point(s) critique(s) de f sont solution(s) du système :

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} 2x - 2y - e^{-x} = 0 \\ -2x + 4y = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x - e^{-x} = 0 \\ y = x/2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = \alpha \\ y = \alpha/2 \end{cases} \quad \text{car on a vu en 1.(a) que l'équation } x - e^{-x} = 0 \text{ admettait une seule solution } \alpha.$$

La fonction f admet donc un unique point critique $a = (\alpha, \alpha/2)$.

$$3. \quad (a) \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y) = 2 + e^{-x}; \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x, y) = -2 \quad \text{et} \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x, y) = 4$$

- (b) Comme f est de classe \mathcal{C}^2 sur l'ouvert \mathbb{R}^2 , il suffit de vérifier la condition suffisante d'extrénum d'ordre 2. En utilisant les notations de Monge au point $a = (\alpha, \alpha/2)$:

$$r = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a) = 2 + e^{-\alpha}, \quad s = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(a) = -2 \quad \text{et} \quad t = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(a) = 4$$

$$\text{D'où } rt - s^2 = 4(2 + e^{-\alpha}) - 4 = 4 + 4e^{-\alpha} > 0 \text{ avec } r > 0.$$

Donc f présente un minimum local en a . Notons m ce minimum.

REMARQUE : on pourrait démontrer que **ce minimum est absolue**.
 En effet, la deuxième application partielle de f en un point quelconque (x_0, y_0) de \mathbb{R}^2 est la fonction $f_2 : t \mapsto f(x_0, t) = x_0^2 - 2x_0 t + 2t^2 + e^{-x_0}$ qui présente un minimum absolu en $x_0/2$, minimum égal à $g(x_0) = x_0^2/2 + e^{-x_0}$.

En étudiant ensuite le sens de variations de la fonction $g : t \mapsto t^2/2 + e^{-t}$, on montre que $\forall t \in \mathbb{R}$, $g(t) \geq g(\alpha)$ avec $g(\alpha) = m$

- (c) Comme $m = f(a)$ et $e^{-\alpha} = \alpha$

$$\begin{aligned} m &= \alpha^2 - 2\alpha \frac{\alpha}{2} + 2\left(\frac{\alpha}{2}\right)^2 + e^{-\alpha} \\ &= \alpha^2 - \alpha^2 + \alpha^2/2 + \alpha \\ &= \frac{\alpha^2}{2} + \alpha \end{aligned}$$

TD7 : matrices et applications linéaires

1 Énoncés

178 *Final 2021.* On note $E = \mathbb{R}_3[X]$ l'espace vectoriel réel des polynômes de degré inférieur ou égal à 3. On considère l'application

$$\begin{aligned}\varphi : E &\longrightarrow E \\ P &\longmapsto P'' - \frac{1}{3}XP' + P.\end{aligned}$$

1. Donner sans justification la dimension de E . Prouver que φ est une application linéaire.
2. (a) Écrire la matrice A de φ dans la base canonique $\mathcal{B} = (1, X, X^2, X^3)$
 (b) Calculer le rang de A . En déduire la dimension du noyau de φ .
 (c) Exprimer $\varphi(X^3)$ en fonction de $\varphi(X)$. En déduire une base de $\text{Ker } \varphi$.

179 E désigne un espace vectoriel sur \mathbb{C} de dimension 3, rapporté à une base $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$. Pour tout nombre complexe k , on considère l'endomorphisme f de E défini par :

$$f(e_2) = 0 \quad \text{et} \quad f(e_1) = f(e_3) = k e_1 + e_2 - k e_3$$

1. Calculer $f(e_1 + ie_2 - e_3)$.
2. (a) Déterminer une base de $\text{Im } f$ et donner le rang de f .
 (b) En déduire la dimension du noyau de f et montrer que $\text{Ker } f = \text{Vect}(e_2, e_1 - e_3)$.
3. Écrire la matrice A de f dans \mathcal{B} et calculer A^2 . En déduire sans calcul $f \circ f$.
4. On pose $e'_1 = f(e_1)$, $e'_2 = e_1 - e_3$ et $e'_3 = e_3$
 - (a) Montrer que (e'_1, e'_2, e'_3) est une base de E .
 - (b) Donner la matrice A' de f dans cette base.
5. Pour tout complexe z non nul, on pose $B(z) = A - zI$,
 I désignant la matrice identité de $\mathfrak{M}_3(\mathbb{C})$.
 - (a) Calculer $(A - zI)(A + zI)$. En déduire que $B(z)$ est inversible puis écrire $(B(z))^{-1}$ en fonction de z , I et A .
 - (b) Pour tout n de \mathbb{N}^* , déterminer $(B(z))^n$ en fonction de z , n , I et A .

180 Final 2018.

On note $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ la base canonique de \mathbb{R}^3 .

On considère l'endomorphisme f de \mathbb{R}^3 dont la matrice dans la base \mathcal{B} est :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -2 & -5 \\ -2 & 0 & 4 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

On pose enfin $u = e_1 - e_2 = (1, -1, 0)$ et $w = e_1 + f(e_1)$

1. (a) Calculer le vecteur w .
 (b) Démontrer que la famille $\mathcal{C} = (u, w, e_1)$ est une base de \mathbb{R}^3 .
 (c) Expliciter la matrice P de passage de la base \mathcal{B} vers la base \mathcal{C} .
2. (a) Déterminer la matrice T de f dans la base \mathcal{C} .
 (b) L'endomorphisme f est-il bijectif ?
 (c) Donner sans justification, le lien entre les matrices T , A , P et P^{-1} .
3. Le but de la fin de l'exercice est de trouver une matrice carrée $X_0 \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ vérifiant l'égalité :

$$X_0^2 - 2X_0 - I_3 = A.$$

Soit X une matrice carrée de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$. On pose $Y = P^{-1}XP$.

- (a) Vérifier que $Y^2 = P^{-1}X^2P$.
 (b) Montrer que si Y vérifie l'équation (\star) : $Y^2 - 2Y - I_3 = T$
 alors X vérifie $X^2 - 2X - I_3 = A$.
4. (a) Déterminer la matrice $Y_0 = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & c \\ 0 & 0 & b \end{pmatrix}$ vérifiant l'équation (\star) et dont les coefficients diagonaux sont strictement positifs.
 (b) En déduire une matrice X_0 solution de $X^2 - 2X - I_3 = A$.
On exprimera X_0 à l'aide de P et de P^{-1} sans chercher à calculer les 9 coefficients de la matrice X_0 .

181 En bonus !

Soit $E = \mathbb{R}_2[X]$ l'espace vectoriel des polynômes de degré au plus 2, à coefficients réels, muni de la base canonique $\mathcal{B} = (1, X, X^2)$.

On définit l'application f sur E par : $\forall P \in E, f(P) = 2XP - (X^2 - 1)P'$.

1. Vérifier que si P appartient à E , alors $f(P)$ est de degré au plus 2.
2. Montrer que f est un endomorphisme de E .
3. Écrire la matrice A de f dans la base canonique \mathcal{B} de E . Quel est le rang de A ?
 f est-il bijectif ?
4. On pose $Q_1 = (1 + X)^2$, $Q_2 = 1 - X^2$ et $Q_3 = (1 - X)^2$.
 - (a) Démontrer que la famille $\mathcal{B}' = (Q_1, Q_2, Q_3)$ est une base de E .
 - (b) Calculer $f(Q_1)$, $f(Q_2)$ et $f(Q_3)$ en fonction de Q_1 , Q_2 et Q_3 .
 - (c) En déduire la matrice A' de f dans la base \mathcal{B}' .
 - (d) Déterminer le noyau de f .

2 Corrigés

1. On sait que $\dim E = 4$.

(b) Calculons le rang de A :

$$\begin{aligned} \text{rg}(A) &= \text{rg} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 2/3 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 1/3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \text{rg} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2/3 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 1/3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ &= \text{rg} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2/3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ &= \text{rg} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2/3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 3. \end{aligned}$$

Soient P et Q deux polynômes appartenant à E . Soit $\lambda \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned} \varphi(\lambda \cdot P + Q) &= (\lambda \cdot P + Q)'' - \frac{1}{3}X(\lambda \cdot P + Q)' + (\lambda \cdot P + Q) \\ &= \lambda P'' + Q'' - \frac{1}{3}X(\lambda P' + Q') + \lambda P + Q \quad \text{par linéarité de la dérivation} \\ &= \lambda \left(P'' - \frac{1}{3}XP' + P \right) + \left(Q'' - \frac{1}{3}XQ' + Q \right) \\ &= \lambda \cdot \varphi(P) + \varphi(Q). \end{aligned}$$

Donc φ est une application linéaire.

2. (a) Pour obtenir la matrice A de φ relativement à la base \mathcal{B} , on calcule les images par φ des polynômes de \mathcal{B} , en fonction des vecteurs de \mathcal{B} .

- $\varphi(1) = 1$

- $\varphi(X) = 0 - \frac{1}{3}X \cdot 1 + X = \frac{2}{3}X$

- $\varphi(X^2) = 2 - \frac{1}{3}X(2X) + X^2 = 2 + \frac{1}{3}X^2$

- $\varphi(X^3) = 6X - \frac{1}{3}X(3X^2) + X^3 = 6X$

Ainsi, par linéarité de φ :

$$\underline{\varphi(X^3 - 9X)} = \varphi(X^3) - 9\varphi(X) = 0 = \underline{0_E}.$$

Autrement dit : $X^3 - 9X \in \text{Ker}(\varphi)$.

Par conséquent, la famille $(X^3 - 9X)$ est une base de $\text{ker}(\varphi)$.

$$\text{On en déduit } A = \text{Mat}_{\mathcal{B}}(\varphi) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 2/3 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 1/3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

D'après le théorème du rang, puisque φ est un endomorphisme de $E = \mathbb{R}_3[X]$, on a :

$$\dim(E) = \dim(\text{Ker}(\varphi)) + \dim(\text{Im}(\varphi)).$$

Or $\dim(\text{Im}(\varphi)) = \text{rg}(\varphi) = \text{rg}(A)$. Donc, d'après la question précédente : $\dim(\text{Im}(\varphi)) = 3$. D'après la question 1, on a $\dim(E) = 4$. Par conséquent

$$\dim(\text{Ker}(\varphi)) = \dim(E) - \dim(\text{Im}(\varphi)) = 4 - 3 = 1.$$

- (c) Puisque $\text{Ker}(\varphi)$ est de dimension 1, tout vecteur non nul de $\text{Ker}(\varphi)$ forme une base de $\text{Ker}(\varphi)$. Or, dans la question 2(a), on avait obtenu :

$$\begin{cases} \varphi(X) = \frac{2}{3}X \\ \varphi(X^3) = 6X = \frac{18}{3}X = 9\left(\frac{2}{3}X\right) = 9\varphi(X). \end{cases}$$

Ainsi, par linéarité de φ :

$$\underline{\varphi(X^3 - 9X)} = \varphi(X^3) - 9\varphi(X) = 0 = \underline{0_E}.$$

Autrement dit : $X^3 - 9X \in \text{Ker}(\varphi)$.

Par conséquent, la famille $(X^3 - 9X)$ est une base de $\text{ker}(\varphi)$.

179 1. f étant linéaire,

$$f(e_1 + ie_2 - e_3) = f(e_1) + if(e_2) + (-1) \cdot f(e_3) = f(e_1) - f(e_3) = \overrightarrow{0}_E.$$

2. (a) Par définition de l'image,

$$\begin{aligned} w \in \text{Im } f &\iff \exists u \in E / w = f(u) \\ &\iff \exists (x, y, z) \in \mathbb{C}^3 / w = f(xe_1 + ye_2 + ze_3) \\ &\iff \exists (x, y, z) \in \mathbb{C}^3 / w = xf(e_1) + yf(e_2) + zf(e_3) \\ &\iff \exists (x, y, z) \in \mathbb{C}^3 / w = (x+z)f(e_1) \\ &\quad \dots \\ &\iff \exists \lambda \in \mathbb{C} / w = \lambda f(e_1) \\ &\iff w \in \text{Vect}(f(e_1)) \end{aligned}$$

Donc $\boxed{\text{Im } f = \text{Vect}(f(e_1))}$ et $(f(e_1))$ est une famille génératrice de
 $\text{Im } f$ et libre (un seul vecteur non nul) donc une base de $\text{Im } f$.

Enfin $\text{rg}(f) = \dim(\text{Im } f) = 1$

(b) • D'après le théorème du rang, $\dim(E) = \dim(\text{Ker } f) + \text{rg}(f)$
 Comme $\dim(E) = 3$, on obtient $\dim(\text{Ker } f) = 3 - 1 = 2$.

• Il suffit donc de vérifier que les deux vecteurs donnés appartiennent
 à $\text{Ker } f$ et qu'ils sont linéairement indépendants :

$$\begin{aligned} f(e_2) &= \overrightarrow{0}_E \text{ et } f(e_1 - e_3) = f(e_1) - f(e_3) \text{ car } f \text{ est linéaire} \\ \text{d'où } f(e_1 - e_3) &= \overrightarrow{0}_E. \text{ Donc ils appartiennent bien à } \text{Ker } f. \end{aligned}$$

Comme la famille (e_1, e_2, e_3) est une base, elle est libre.

Soit x et y deux nombres complexes tels que $x e_2 + y (e_1 - e_3) = \overrightarrow{0}_E$
 alors $x = y = -y = 0$.

Donc $(e_2, e_1 - e_3)$ est une famille libre de $\text{Ker } f$ de deux vecteurs.

Par conséquent $\boxed{(e_2, e_1 - e_3)}$ est une base de $\text{Ker } f$.

3. L'énoncé fournit les images par f des vecteurs e_1, e_2, e_3 dans la base
 $\boxed{(e_1, e_2, e_3)}.$

(b) On rappelle que $B(z) = A + (-z)I$

Comme les matrices A et $(-z)I$ commutent, on peut appliquer la formule du binôme de Newton.

$$\text{Et } A^2 = \begin{pmatrix} k & 0 & k \\ 1 & 0 & 1 \\ -k & 0 & -k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} k & 0 & k \\ 1 & 0 & 1 \\ -k & 0 & -k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \mathbf{0}_3$$

A^2 est la matrice associée à $f \circ f$ dans la base \mathcal{B} donc $\boxed{f \circ f = \widetilde{0}_{\mathcal{L}(E)}}$

4. (a) Montrons que la famille (e'_1, e'_2, e'_3) est libre dans E .

$$\begin{aligned} \text{Donc } \mathcal{B}' &= (e'_1, e'_2, e'_3) \text{ est une base de } E \end{aligned}$$

(b) On calcule les images par f de ces vecteurs puis leurs coordonnées dans la «nouvelle» base \mathcal{B}' :

$$\begin{aligned} f(e'_1) &= f(f(e_1)) = \overrightarrow{0}_E \text{ car } f \circ f = \widetilde{0}_{\mathcal{L}(E)} \\ f(e'_2) &= f(e_1 - e_3) = \overrightarrow{0}_E \text{ car } (e_1 - e_3) \in \text{Ker } f \\ f(e'_3) &= f(e_3) = f(e_1) = e'_1 = 1e'_1 + 0e'_2 + 0e'_3 \\ \text{Ainsi } A' &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

5. (a) • On développe : $(A - zI)(A + zI) = A^2 + zAI - zIA - z^2I^2 = -z^2I$
 • Or $z \neq 0$ Donc $B(z) \left[\frac{-1}{z^2} (A + zI) \right] = I$

avec $\frac{-1}{z^2} (A + zI) \in \mathfrak{M}_3(\mathbb{C})$. En conclusion, $B(z)$ est inversible et
 $\boxed{(B(z))^{-1} = -\frac{1}{z^2} (A + zI)}$

$$A = \begin{pmatrix} k & 0 & k \\ 1 & 0 & 1 \\ -k & 0 & -k \end{pmatrix}$$

(b) On rappelle que $B(z) = A + (-z)I$

D'où pour tout entier naturel $n \geq 2$,

$$\begin{aligned}[B(z)]^n &= \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} A^k (-zI)^{n-k} \text{ et comme } A^k = \mathbb{O}_3 \text{ pour } k \geq 2, \\ B(z)^n &= \sum_{k=0}^1 \binom{n}{k} A^k (-zI)^{n-k} + \sum_{k=2}^n \binom{n}{k} \mathbb{O}_3 \\ &= \sum_{k=0}^1 (-z)^{n-k} \binom{n}{k} A^k \\ &= (-z)^n I + n(-z)^{n-1} A\end{aligned}$$

Finalement pour tout entier $n \geq 1$,

$$[B(z)]^n = (-z)^{n-1}(nA - zI)$$

180 Soit $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ la base canonique de \mathbb{R}^3 .

$$A = \text{Mat}_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} 0 & -2 & -5 \\ -2 & 0 & 4 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad u = e_1 - e_2 = (1, -1, 0) \text{ et } w = e_1 + f(e_1)$$

1. (a) Notons E_1 et W les matrices colonnes des coordonnées respectives de e_1 et w dans la base canonique \mathcal{B} . Le vecteur $f(e_1)$ a pour coordonnées la première colonne de la matrice A .

$$\text{Alors } W = E_1 + AE_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

D'où $w = (1, -2, 1)$.

- (b) • Première méthode : montrons que la famille $\mathcal{C} = (u, w, e_1)$ est libre.

Soit α_1, α_2 et α_3 des réels tels que $\alpha_1 u + \alpha_2 w + \alpha_3 e_1 = \overrightarrow{0}_{\mathbb{R}^3}$.

$$\text{Alors } \alpha_1(1, -1, 0) + \alpha_2(1, -2, 1) + \alpha_3(1, 0, 0) = (0, 0, 0).$$

$$\text{D'où } \begin{cases} \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = 0 \\ -\alpha_1 - 2\alpha_2 = 0 \\ \alpha_2 = 0 \end{cases} \text{ d'où } \begin{cases} \alpha_3 = -(\alpha_1 + \alpha_2) \\ \alpha_1 = -2\alpha_2 \\ \alpha_2 = 0 \end{cases}$$

$$\text{Donc } \alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 0.$$

Ainsi $\mathcal{C} = (u, w, e_1)$ est une famille libre de 3 vecteurs dans l'espace vectoriel \mathbb{R}^3 qui est de dimension 3. \mathcal{C} est une base de E .

- Deuxième méthode : déterminons le rang de la famille de vecteurs $\mathcal{C} = (u, w, e_1)$.

Le rang de la famille \mathcal{C} est égal au rang de la famille (e_1, u, w) qui a le même rang que la matrice $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Or cette dernière matrice est triangulaire supérieure et ne comporte aucun zéro sur sa diagonale. Elle est donc inversible et de rang 3. La famille \mathcal{C} est de rang 3 et comporte 3 vecteurs. \mathcal{C} est donc une famille libre et on conclut comme dans la première méthode.

- (c) La matrice de passage de la base \mathcal{B} vers la base \mathcal{C} est

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

2. (a) Déterminer la matrice T de f dans la base \mathcal{C} revient à exprimer les vecteurs $f(u), f(w)$ et $f(e_1)$ comme combinaisons linéaires des vecteurs u, w, e_1 .

- $f(u) = f(e_1 - e_2) = f(e_1) - f(e_2)$ car f est linéaire.
D'où $f(u) = (0, -2, 1) - (-2, 0, 1) = (2, -2, 0) = 2 \cdot (1, -1, 0) = 2u$
- $f(w)$ a pour coordonnées dans la base canonique \mathcal{B} :

$$AW = \begin{pmatrix} 0 & -2 & -5 \\ -2 & 0 & 4 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} = -W$$

On en déduit que $f(w) = -w$

- Par hypothèse, $w = e_1 + f(e_1)$. D'où $f(e_1) = w - e_1$.
Ainsi $T = \text{Mat}_{\mathcal{C}}(f) = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$
- (b) La matrice T , qui représente f dans la base \mathcal{C} , est triangulaire supérieure et ne comporte aucun zéro sur sa diagonale.
Par conséquent T est inversible et l'endomorphisme f est bijectif.

(c) D'après la formule de changement de base pour un endomorphisme,

$$\boxed{T = P^{-1} A P}$$

3. Soit $X \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$. On pose $Y = P^{-1} X P$.

(a) Par associativité du produit matriciel :

$$\begin{aligned} Y^2 &= YY = (P^{-1} X P)(P^{-1} X P) = P^{-1} X (PP^{-1}) X P \\ &= P^{-1} X I_3 X P = P^{-1} X^2 P \end{aligned}$$

(b) On suppose que Y vérifie l'équation $(*)$: $Y^2 - 2Y - I_3 = T$.

$$\text{Alors } P^{-1} X^2 P - 2(P^{-1} X P) - I_3 = T. \text{ Or } I_3 = P^{-1} P.$$

$$\text{D'où } P^{-1} X^2 P - 2P^{-1} X P - P^{-1} P = T.$$

En factorisant le premier membre à gauche par P^{-1} , on obtient :
 $P^{-1}(X^2 P - 2X P - P) = T$. Puis $P^{-1}(X^2 - 2X + I_3)P = T$.

Or d'après la question 2.(c), $T = P^{-1} A P$.

$$\text{Donc } P^{-1}(X^2 - 2X + I_3)P = P^{-1} A P$$

En multipliant les deux membres de l'égalité précédente, à gauche par P et à droite par P^{-1} , on obtient $X^2 - 2X - I_3 = A$.

4. (a) On pose $Y_0 = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & c \\ 0 & 0 & b \end{pmatrix}$ avec $a > 0$ et $b > 0$.

$$\text{Alors } Y_0^2 = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & c \\ 0 & 0 & b \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & c \\ 0 & 0 & b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^2 & 0 & 0 \\ 0 & b^2 & bc \\ 0 & 0 & b^2 \end{pmatrix}$$

$$\text{D'où } Y_0^2 - 2Y_0 - I_3 = \begin{pmatrix} a^2 - 2a - 1 & 0 & 0 \\ 0 & b^2 - 2b - 1 & 2bc - 2c \\ 0 & 0 & b^2 - 2b - 1 \end{pmatrix}$$

Donc Y_0 est solution de $(*)$ si et seulement si,

$$\begin{pmatrix} a^2 - 2a - 1 & 0 & 0 \\ 0 & b^2 - 2b - 1 & 2bc - 2c \\ 0 & 0 & b^2 - 2b - 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a^2 - 2a - 1 = 2 \\ b^2 - 2b - 1 = -1 \\ 2bc - 2b = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a^2 - 2a - 3 = 0 \\ b^2 - 2b = 0 \\ 2c(b-1) = 1 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} &\Leftrightarrow \begin{cases} (a+1)(a-3) = 0 \\ b(b-2) = 0 \\ 2c(b-1) = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -1 \text{ ou } a = 3 \\ b = 0 \text{ ou } b = 2 \\ c = \frac{1}{2(b-1)} \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} a = 3 & \text{car } a > 0 \\ b = 2 & \text{car } b > 0 \\ c = 1/2 & \end{cases} \end{aligned}$$

- (a) Par associativité du produit matriciel :
- $$\text{Finallement } Y_0 = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1/2 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$
- (b) En choisissant la matrice $X_0 \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ telle que $Y_0 = P^{-1} X_0 P$, la question 3.(b) permet de dire que X_0 est une matrice solution de $X^2 - 2X - I_3 = A$.
- Donc $\boxed{X_0 = P Y_0 P^{-1}}$.

On pourrait calculer l'inverse de P et vérifier que

$$P^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

En effectuant ensuite deux produits matriciels, on obtiendrait :

$$X_0 = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 5 & -1 & -3 \\ -2 & 4 & 2 \\ 1 & 1 & 5 \end{pmatrix}$$

181 $E = \mathbb{R}_2[X]$ et l'application f est définie par

$$\forall P \in E, f(P) = 2XP - (X^2 - 1)P'$$

1. Soit P un polynôme de E .
Alors il existe des réels a, b et c tels que $P = aX^2 + bX + c$. D'où

$$\begin{aligned} f(P) &= 2XP - (X^2 - 1)P \\ &= 2X(aX^2 + bX + c) - (X^2 - 1)(2aX + b) \\ &= 2aX^3 + 2bX^2 + 2cX - (2aX^3 + bX^2 - 2aX - b) \\ &= bX^2 + 2(a + c)X + b \end{aligned}$$

Donc $f(P)$ est de degré au plus 2 (b peut éventuellement être égal à 0).

Ainsi f est bien à valeurs dans E .

Variante : on raisonne sur le degré de $P \in E$ en distinguant deux cas.

- 1ER CAS : si $\deg(P) \leq 1$ alors P' est constant (éventuellement nul) et $\deg(X^2 - 1)P' \leq 2$.
De plus $\deg(2XP) = \deg(2X) + \deg(P) = 1 + \deg(P) \leq 2$.
Donc $\deg(f(P)) \leq \max\{\deg(2XP), \deg[(X^2 - 1)P']\} \leq 2$.
- 2ÈME CAS : si $\deg(P) = 2$, on note a le coefficient dominant de P . Alors le monôme de plus haut degré de P' est $2aX$, celui de $(X^2 - 1)P'$ est donc $2aX^3$; et le monôme de plus haut degré de $2XP$ est également $2aX^3$.

3. On commence par calculer les images par f des polynômes formant la base \mathcal{B} .

$$\begin{aligned} f(1) &= 2X - (X^2 - 1) \times 0 = 2X, & f(X) &= 2X^2 - (X^2 - 1) \times 1 = 1 + X^2, \\ \text{et } f(X^2) &= 2X^3 - (X^2 - 1)2X = 2X. & \text{On en déduit que} \end{aligned}$$

$$A = \text{Mat}_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

La matrice A a deux colonnes identiques. Elle a le même rang que la matrice

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Or les deux colonnes de cette dernière matrice ne sont pas proportionnelles.
Donc A est de rang 2.

Comme A n'est pas de rang égal à son ordre 3, A n'est pas inversible.

Par conséquent l'application linéaire f n'est pas bijective.

4. On pose $Q_1 = (1 + X)^2$, $Q_2 = 1 - X^2$ et $Q_3 = (1 - X)^2$.

Il est faux d'écrire que $Q_1 = (1, 2, 1)$ ou encore que

$$\mathcal{B}' = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$$

Un polynôme n'est pas une matrice colonne et $E \neq \mathbb{R}^3$.

- (a) Soient α_1, α_2 et α_3 des réels tels que $\alpha_1 Q_1 + \alpha_2 Q_2 + \alpha_3 Q_3 = 0$.

Alors $\alpha_1 (1 + X)^2 + \alpha_2 (1 - X^2) + \alpha_3 (1 - X)^2 = 0$.

D'où $\alpha_1 (1 + 2X + X^2) + \alpha_2 (1 - X^2) + \alpha_3 (1 - 2X + X^2) = 0$.

Donc $(\alpha_1 - \alpha_2 + \alpha_3)X^2 + 2(\alpha_1 - \alpha_3)X + (\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3) = 0$.

On en déduit par identification des coefficients :

$$\begin{cases} \alpha_1 - \alpha_2 + \alpha_3 = 0 \\ 2(\alpha_1 - \alpha_3) = 0 \\ \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} \alpha_1 - \alpha_2 + \alpha_3 = 0 \\ \alpha_1 - \alpha_3 = 0 \\ \alpha_1 + \alpha_3 = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} L_2 \leftarrow \frac{1}{2}L_2 \\ L_3 \leftarrow \frac{1}{2}(L_3 + L_1) \\ L_1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \alpha_1 - \alpha_2 + \alpha_3 = 0 \\ \alpha_1 - \alpha_3 = 0 \\ \alpha_1 + \alpha_3 = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} \alpha_1 = 0 \\ \alpha_2 = 0 \\ \alpha_3 = 0 \end{cases}$$

Par conséquent f est une application linéaire de E dans E .

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \alpha_2 = 0 \\ \alpha_3 = 0 \\ \alpha_1 = 0 \end{cases}$$

Ainsi $\mathcal{B}' = (Q_1, Q_2, Q_3)$ est une famille libre de 3 vecteurs dans un espace vectoriel E qui est de dimension 3.
 $\mathcal{B}' = (Q_1, Q_2, Q_3)$ est une base de E .

(b)

$$\begin{aligned} f(Q_1) &= 2XQ_1 - (X^2 - 1)Q'_1 \\ &= 2X(1 + X)^2 - (X - 1)(X + 1) \times 2(1 + X) \\ &= 2X(1 + X)^2 - 2(X - 1)(1 + X)^2 \\ &= (1 + X)^2[2X - 2(X - 1)] \\ &= 2(1 + X)^2 \\ &= 2Q_1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f(Q_2) &= 2X(1 - X^2) - (X^2 - 1) \times (-2X) \\ &= (1 - X^2)(2X - 2X) \\ &= 0 \end{aligned}$$

(c) On en déduit directement que

$$\begin{aligned} A' &= \text{Mat}_{\mathcal{B}'}(f) = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Il ne fallait pas utiliser ici la formule du changement de base $A' = P^{-1}AP$ dans laquelle P désigne la matrice de passage de la base canonique \mathcal{B} vers la base \mathcal{B}' .

(d) D'après le théorème du rang, $\dim(E) = \dim(\text{Ker } f) + \text{rg}(f)$.
D'où $\dim(\text{Ker } f) = \dim(E) - \text{rg}(f) = 3 - 2 = 1$. Or d'après la question précédente, $f(Q_2) = 0$. Donc $Q_2 \in \text{Ker } f$ avec $Q_2 \neq 0$.

Finalelement $\boxed{\text{Ker } f = \text{Vect}(1 - X^2)}$