arcsin, arccos, arctan

1 Pour s'entraîner

1 Simplifier les écritures des nombres réels suivants :

$$a = \arctan \frac{1}{\sqrt{3}} \; ; \; b = \arccos\left(\cos \frac{6\pi}{5}\right) \; ; \; c = \arcsin\left(\cos \frac{5\pi}{7}\right)$$

2 Soit $x \in [-1, 1]$. Donner des expressions polynomiales de $\cos(2\arccos x)$ et $\cos(2\arcsin x)$

3 Démontrer les égalités ci-dessous :

1. $\forall x \in [-1, 1], \quad \arccos x + \arccos(-x) = \pi$
2. $\forall x \in [-1, 1], \quad \arcsin x + \arccos x = \pi/2$
3. $\forall x \in \mathbb{R}^{+*}, \quad \arctan x + \arctan(1/x) = \pi/2$
4. $\forall x \in \mathbb{R}, \quad \cos(\arctan x) = \dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}$
5. $\forall x \in \mathbb{R}, \quad \sin(\arctan x) = \dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}$

4 On définit la fonction f sur $[0, 1]$ par :

$$f(x) = \arcsin x + \arcsin \sqrt{1-x^2}$$

Justifier que f est dérivable sur $]0, 1[$ et calculer $f'(x)$ pour tout $x \in]0, 1[$. En déduire la valeur de $f(x)$ pour $x \in [0, 1]$.

5 Résoudre les équations, d'inconnue réelle x :

$$(E_1) : \arccos x + \arccos(2x) = \frac{\pi}{2} \qquad (E_2) : \arcsin(2x) = \arccos x$$

6 Montrer que pour tout réel strictement positif x,
$$\frac{x}{1+x^2} < \arctan x < x$$

7 En utilisant le théorème des accroissements finis, déterminer un équivalent simple de $\arctan(x+1) - \arctan x$ lorsque x tend vers $+\infty$.

2 Pour approfondir

8 Soient f et g les fonctions définies par :

$$f : x \longmapsto 2\arctan\left(\sqrt{x}\right) \quad \text{et} \quad g : x \longmapsto \arcsin\left(\frac{x-1}{x+1}\right)$$

1. Déterminer leurs ensembles de définition et leurs ensembles de dérivabilité.
2. Calculer les dérivées f' et g'. En déduire une relation entre $f(x)$ et $g(x)$.
3. Calculer $\displaystyle\int_1^3 \frac{1}{(x+1)\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x$

9
1. Démontrer que pour tous réels a et b appartenant à $\left]-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right[$,
$$\tan(a+b) = \frac{\tan a + \tan b}{1 - \tan a \tan b}$$
2. En déduire que pour tous réels p et q appartenant à $]-1, 1[$,
$$\arctan p + \arctan q = \arctan\left(\frac{p+q}{1-pq}\right)$$
3. Simplifier la somme : $\arctan\left(\frac{1}{2}\right) + \arctan\left(\frac{1}{5}\right) + \arctan\left(\frac{1}{8}\right)$

3 Avec Python

10 *On importera le module math :* `from math import *`
On utilisera : `for, range, tan, atan, print`
Écrire un script qui va calculer une valeur approchée de

$$T = \tan\left(\sum_{k=0}^{1000} \arctan \frac{1}{2k+1}\right)$$

⋆ Il est possible de faire calculer la valeur du rationnel T.

4 Pour travailler seul

11 Donner trois expressions différentes pour $\cos(2x)$.
Prouver l'égalité : $\arccos\left(\frac{3}{4}\right) = 2\arcsin\left(\frac{\sqrt{2}}{4}\right)$

Matrices

1 Pour s'entraîner

12 Résoudre les systèmes linéaires suivants :

$$\begin{cases} x+y+2z = 1 \\ x+2y+z = 2 \\ 2x-y+z = 1 \end{cases} \qquad \begin{cases} x - y + 2z + t = 1 \\ 2x - 3y + z - t = 1 \\ -x + 2y + z + t = 1 \end{cases}$$

13 L'espace est muni d'un repère $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$.
On considère les trois plans suivants

$$\begin{aligned} \mathscr{P} &: \quad x+2y+2z=5 \\ \mathscr{Q} &: \quad x+y-2z=3 \\ \mathscr{R} &: \quad 3x+5y+2z=13 \end{aligned}$$

Déterminer l'intersection des plans $\mathscr{P}$, $\mathscr{Q}$ et $\mathscr{R}$.

14 Déterminer tous les polynômes $P \in \mathbb{R}_3[X]$ tels que

$$P''+P'-P = X^3 - X$$

15 En fonction du paramètre réel m, préciser l'ensemble des solutions du système linéaire suivant :

$$(S)\begin{cases} x + y + mz = m \\ x + my - z = 1 \\ x + y - z = 1 \end{cases}$$

On donnera systématiquement la nature géométrique de l'ensemble $\mathscr{S}$ des solutions, en précisant, le cas échéant, un point, vecteur(s) directeur(s) de cet ensemble.

16 Pour quelles valeurs du paramètre réel m, le système linéaire suivant admet-il une seule solution ?

$$\begin{cases} mx+y+z = 1 \\ x+my+z = m \\ x+y+mz = m^2 \end{cases}$$

17 Soit la matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$. Trouver toutes les matrices $M = \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} \in \mathfrak{M}_2(\mathbb{R})$ qui vérifient $AM = MA$.

18 Soient les matrices $C = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} \in \mathfrak{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ et $L = \begin{pmatrix} -3, 2, 5 \end{pmatrix} \in \mathfrak{M}_{1,3}(\mathbb{R})$

1. Calculer $A = CL$ et LC.
2. Calculer A^2 en fonction de A.
3. En déduire A^n pour tout entier naturel $n \geqslant 1$.

19 On considère la matrice carrée d'ordre 3, $A = (a_{i,j})_{\substack{1\leqslant i\leqslant 3 \\ 1\leqslant j\leqslant 3}}$ dont le coefficient général $a_{i,j}$ est défini par : $a_{i,j} = \begin{pmatrix} i+j \\ i \end{pmatrix}$. Calculer A^2 .

20 On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1/3 \end{pmatrix} \in \mathfrak{M}_3(\mathbb{R})$

1. Calculer A^2.
2. On admet que $\forall n \in \mathbb{N}^*, \exists! a_n \in \mathbb{R}$; $A^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -a_n \\ 0 & 1 & a_n \\ 0 & 0 & 1/3^n \end{pmatrix}$

   En calculant $A^{n+1} = A^n \times A$, exprimer a_{n+1} en fonction de a_n.
3. En déduire la formule explicite de a_n en fonction de n.
4. Donner $\lim\limits_{n\longrightarrow+\infty} a_n$.

21 On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \in \mathfrak{M}_3(\mathbb{R})$

1. Calculer A^2 puis exprimer A^2 en fonction de A.
2. On pose $B = A + 2I_3$. Exprimer B^2 comme combinaison linéaire de B et de I_3.
3. En déduire que B est inversible et donner son inverse B^{-1} comme combinaison linéaire de B et de I_3.
4. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Exprimer B^n comme combinaison linéaire de I_3 et A.

22 La suite de Fibonacci est la suite d'entiers $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par :

$$F_0 = 0\,, \quad F_1 = 1 \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$$

On pose, pour tout entier naturel n, $X_n = \begin{pmatrix} F_{n+1} \\ F_n \end{pmatrix}$

1. Déterminer la matrice $A \in \mathfrak{M}_2(\mathbb{R})$ telle que $\forall n \in \mathbb{N}$, $X_{n+1} = AX_n$
2. Soit $n \in \mathbb{N}^*$.
   (a) Justifier que $X_n = A^n \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ et que $X_{n-1} = A^n \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$
   (b) En déduire les quatre coefficients de A^n en fonction des termes de la suite de Fibonacci.
3. Sans calculatrice, donner les quatre coefficients de la matrice A^8.
4. Vérifier que $A^2 = A + I_2$.

   ⋆ En déduire que $\forall m \in \mathbb{N}$, $F_{2m} = \sum_{k=0}^{m} \binom{m}{k} F_k$

23 Soit $a \in \mathbb{R}$. On considère les matrices

$$M = \begin{pmatrix} 1 & a & a^2 & a^3 \\ 0 & 1 & a & a^2 \\ 0 & 0 & 1 & a \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad N = \begin{pmatrix} 1 & -a & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -a & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -a \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

1. Calculer le produit MN.
2. Que peut-on déduire pour la matrice M ?

24 Soit $T = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

1. Calculer T^2, T^3. En déduire T^n pour tout entier $n \geqslant 3$.
2. On pose $A = 3I_3 + T$. Calculer A^n sous la forme d'un tableau de 9 coefficients réels.

25 On considère la matrice carrée $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 3 \end{pmatrix} \in \mathfrak{M}_3(\mathbb{R})$.

Vérifier que A est inversible et calculer A^{-1}.

26 Les matrices $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 2 & -3 & 4 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 3 \end{pmatrix}$ sont-elles inversibles ?

Si oui, calculer leurs inverses.

27 Pour tout nombre réel a, on définit la matrice $M(a) = \begin{pmatrix} 1-a & a \\ a & 1-a \end{pmatrix}$

1. Déterminer les réels a tels que $Ma)$ soit inversible.
2. Vérifier que pour tous réels a et b, $M(a)M(b) = M(a+b-2ab)$
3. On suppose que $a \neq 1/2$. Déterminer le réel b en fonction de a tel que $M(b) = M(a)^{-1}$

28 Déterminer tous les réels k pour lesquels la matrice $\begin{pmatrix} 0 & 1 & k \\ k & 1 & k \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ est inversible.

2 Pour approfondir

29
1. Effectuer la division euclidienne du polynôme X^5+X-1 par le polynôme X^2+X+1.
2. Soient $n\in\mathbb{N}^*$ et $A\in\mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$ tels que $A^5+A=I_n$.
   Montrer que A^2+A+I_n est inversible et exprimer son inverse en fonction de A.

30 On pose $A=\begin{pmatrix}-1 & -2\\ 3 & 4\end{pmatrix}$ et $P(X)=X^2-3X+2$.

1. Montrer que $P(A)=\mathbb{O}_2$.
   On dit alors que P est un polynôme annulateur de A.
2. Soit $n\in\mathbb{N}^*$. Déterminer le reste $R_n(X)$ de la division euclidienne de X^n par $P(X)$.
3. Justifier que $A^n=R_n(A)$.
   En déduire l'expression de A^n en fonction de n.

31 On donne les matrices :

$$A=\begin{pmatrix}3&0&1\\1&2&1\\1&0&3\end{pmatrix}\quad,\quad I=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}\quad,\quad T=\begin{pmatrix}1&0&1\\1&0&1\\1&0&1\end{pmatrix}$$

1. Calculer T^2 et T^3. En déduire T^k pour tout entier $k\geqslant 1$.
2. Déterminer deux nombres réels a et b tels que $A=aI+bT$.
3. Soit $n\in\mathbb{N}^*$. Exprimer A^n comme combinaison linéaire de I et T.
4. Montrer que $A\in GL_3(\mathbb{R})$ et calculer A^{-1}.

32 Soit x un nombre réel non nul. On considère les matrices carrées :

$$M=\begin{pmatrix}0&1/x&1/x^2\\x&0&1/x\\x^2&x&0\end{pmatrix}\quad\text{et}\quad I=I_3$$

1. (a) Calculer M^2 et exprimer M^2 comme combinaison linéaire des matrices M et I.
   (b) En déduire que M est inversible.
   Donner M^{-1} en fonction de M et I.
2. Déduire de la question précédente, la valeur du produit $(M-2I)(M+I)$.
3. On pose : $A=\dfrac{1}{3}(M+I)$ et $B=\dfrac{1}{3}(2I-M)$.
   (a) Calculer A^2 et B^2. Donner A^k et B^k pour tout entier $k\geqslant 1$.
   (b) Exprimer M comme combinaison linéaire de A et de B.
   (c) Vérifier que $AB=BA$.
   Déterminer M^n en fonction de M et de I pour tout entier naturel non nul n.

33 Soit n un entier supérieur ou égal à 2.
Toutes les matrices considérées appartiennent à $\mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$.
On appelle trace d'une matrice carrée M et on note $\mathrm{tr}(M)$ la somme de ses coefficients diagonaux.

1. Montrer que pour toutes matrices A et B de $\mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$ et pour tout réel λ,
$$\mathrm{tr}(\lambda A)=\lambda\,\mathrm{tr}(A)\quad\text{et}\quad\mathrm{tr}(A+B)=\mathrm{tr}(A)+\mathrm{tr}(B)$$
2. On pose $A=(a_{i,j})_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\1\leqslant j\leqslant n}}$ et $B=(b_{i,j})_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\1\leqslant j\leqslant n}}$.
   ⋆ En utilisant la définition du produit matriciel, démontrer que $\mathrm{tr}(AB)=\mathrm{tr}(BA)$
3. Montrer que l'égalité $AB-BA=I_n$ est impossible dans $\mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$.

34 Soit n un entier supérieur à 2. On dit qu'une matrice carrée $A\in\mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$ est *anti-symétrique* lorsque ${}^tA=-A$.
Démontrer par analyse/synthèse, que toute matrice carrée $M\in\mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$ peut s'écrire comme la somme d'une matrice symétrique et d'une matrice anti-symétrique.

3 Avec Python

35 *On importera le module numpy et son sous-module linalg :*

```
import numpy as np
import numpy.linalg as alg
```

On utilisera : `def, return, np.zeros, for, range, min, alg.inv`

Une aide pour Numpy.

Pour tout entier naturel n non nul, on définit la matrice A_n carrée d'ordre n par :

$$A_n = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 2 & 2 & \cdots & 2 \\ 1 & 2 & 3 & \cdots & 3 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 2 & 3 & \cdots & n \end{pmatrix}$$

1. Créer une fonction `A(n)`, d'argument n, qui renvoie la matrice A_n sous la forme d'un tableau numpy.
2. Faire afficher les inverses des matrices A_k pour $k \in [\![2, 8]\!]$.
3. Conjecturer l'inverse de la matrice A_n.

4 Pour travailler seul

36 On pose $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$. Calculer A^n pour tout entier naturel n.

37 On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

Soient $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix}$.

Montrer que $AB = AC$. A-t-on $B = C$? Que peut-on en conclure sur A ?

38 *Final 2021.* On se donne la matrice carrée $A = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \in \mathfrak{M}_2(\mathbb{R})$ et on désigne par F l'ensemble des matrices M de $\mathfrak{M}_2(\mathbb{R})$ telles que $AM = MA$.

On pose $M = \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix}$ où x, y, z et t sont des nombres réels.

En résolvant un système linéaire d'inconnues x, y, z, t, déterminer la forme des matrices M appartenant à F.

39 Pour tout nombre réel x, on considère la matrice

$$M(x) = \begin{pmatrix} 2^x & 0 & 0 \\ 0 & 1 & x \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathfrak{M}_3(\mathbb{R})$$

1. Pour $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, calculer $M(x)M(y)$. Que remarque-t-on ?
2. En déduire que $M(x)$ est inversible et donner son inverse.
3. Pour $n \in \mathbb{N}^\star$, déterminer $M(x)^n$.
4. Calculer A^7 où A est la matrice
$$A = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

40 Pour tout nombre réel x, on définit la matrice $M(x) \in \mathfrak{M}_3(\mathbb{R})$ par :

$$M(x) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -x^2 & 1 & x \\ -2x & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

1. Vérifier la relation $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \quad M(x)M(y) = M(x + y)$
2. En déduire que pour tout réel x et pour tout entier naturel n, $(M(x))^n = M(nx)$
3. Montrer que la matrice $M(x)$ est inversible. Quel est son inverse ?
4. Justifier que l'application $M : x \longmapsto M(x)$, de $\mathbb{R}$ vers $\mathfrak{M}_3(\mathbb{R})$, est injective. Cette application est-elle bijective ?
5. Dans cette question, on pose $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -4 & 1 & -2 \\ 4 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

   Donner l'expression de A^n sous la forme d'un tableau matriciel pour $n \in \mathbb{N}$.

Intégration

1 Pour s'entraîner

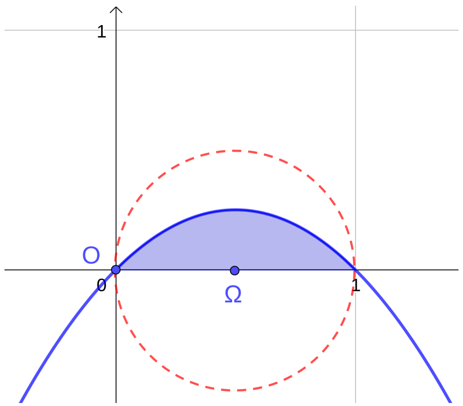
41 Représenter graphiquement la fonction f dans un repère orthonormal du plan. En déduire, par un calcul d'aire, l'intégrale : $\displaystyle\int_{-1}^{1} f(x)\,dx$

(1) $f(x)=\dfrac{1-x}{3}$ (2) $f(x)=|2-3x|$ (3) $f(x)=x-2\lfloor x\rfloor$

(4) $f(x)=\sqrt{1-x^2}$ (5) $f(x)=\sqrt{2-x^2}$ (6) $\star$ $f(x)=\sqrt{3+2x-x^2}$

42 Le plan est rapporté à un repère orthonormal $\left(O\,;\vec{i},\vec{j}\right)$.

1. Calculer l'aire de la surface située en dessous de la parabole d'équation $y=x(1-x)$ et au dessus de l'axe des abscisses $(O\,;\vec{i})$.



2. Donner l'équation du cercle de centre $\Omega\left(\dfrac{1}{2},0\right)$ et de rayon $1/2$.

   En déduire la valeur de l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 \sqrt{x}\sqrt{1-x}\,dx$.

43 Calculer les intégrales suivantes :

(a) $\displaystyle\int_0^{\pi/3} \frac{1}{\cos^2 u}\,du$

(b) $\displaystyle\int_1^{\sqrt{3}} \frac{1}{1+x^2}\,dx$

(c) $\displaystyle\int_0^{1/2} \frac{t+1}{\sqrt{1-t^2}}\,dt$

(d) $\displaystyle\int_0^{\pi/12} \cos t\,\sin t\,dt$

(e) $\displaystyle\int_{-\frac{\pi}{4}}^{0} \tan^2 x\,dx$

(f) $\displaystyle\int_1^{e} \frac{\ln x}{x}\,dx$

(g) $\displaystyle\int_e^{4} \frac{1}{x\ln x}\,dx$

(h) $\displaystyle\int_e^{2} \frac{1}{t(\ln t)^3}\,dt$

(i) $\displaystyle\int_0^{1} \frac{\arctan x}{1+x^2}\,dx$

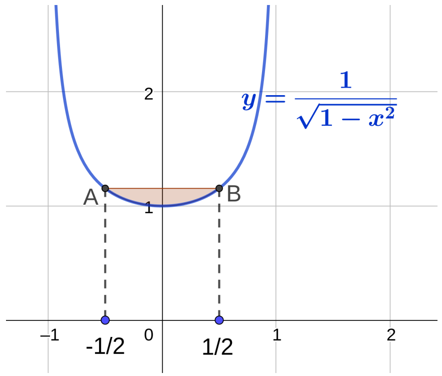
(j) $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \frac{1}{1+\cos t}\,dt$ après avoir linéarisé $2\cos^2\left(\dfrac{t}{2}\right)$.

44 $\displaystyle I=\int_0^{\pi/4} \frac{\cos x}{\sin x+\cos x}\,dx$ et $\displaystyle J=\int_0^{\pi/4} \frac{\sin x}{\sin x+\cos x}\,dx$

1. Calculer $I+J$ puis $I-J$. En déduire I et J.
2. $\star$ En procédant à un changement de variable, calculer l'intégrale

$$\int_0^{1/\sqrt{2}} \frac{du}{u+\sqrt{1-u^2}}$$

45 Calculer l'aire de la surface coloriée ci-dessous :



46 Déterminer les limites (lorsque $n \longrightarrow +\infty$) des sommes suivantes en les faisant apparaître comme des sommes de Riemann :

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n+3k} \quad ; \quad T_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{n^2+2kn}}$$

$$U_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{n+k}{n^2+k^2} \quad ; \quad V_n = \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{n}{k^2} \quad ; \quad W_n = \prod_{k=1}^{n} \left(1+\frac{k}{n}\right)^{1/n}$$

Pour V_n, on se ramènera à une somme indexée de 1 à n par changement d'indice.

47 On pose $\forall n \in \mathbb{N}^*, S_n = \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\sqrt{\frac{k}{n}}$

1. En faisant apparaître S_n comme une somme de Riemann, déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n$
2. En déduire un équivalent simple de $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\sqrt{k}$ lorsque $n \to +\infty$.

48 On définit la fonction f sur l'intervalle ouvert $I =]-1, +\infty[$ par

$$f(x) = x\int_0^x \frac{e^t}{1+t}\,dt$$

1. Justifier que f est dérivable sur I et calculer $f'(x)$.
2. Étudier les variations de f sur I.
3. Montrer que $\forall x \in \mathbb{R}^+, \quad f(x) \geqslant \dfrac{x}{1+x}(e^x-1)$
   En déduire $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$
4. ⋆ Après avoir minoré $f(x)$ pour $x \in]-1, 0]$, déterminer la limite de $f(x)$ lorsque x tend vers -1 par valeurs supérieures.

49 On définit la suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par : $\quad I_n = \displaystyle\int_0^1 \frac{1}{1+t+t^n}\,dt$

1. Calculer I_0 et I_1 .
2. Soit $n \in \mathbb{N}$ et $t \in [0,1]$. Comparer $\dfrac{1}{1+t+t^n}$ et $\dfrac{1}{1+t+t^{n+1}}$
   En déduire la monotonie de la suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$
3. Montrer que la suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est majorée par $\ln 2$.
4. En remarquant que $\ln 2 = \displaystyle\int_0^1 \frac{1}{1+t}\,dt$, montrer que
   $\forall n \in \mathbb{N}, \quad 0 \leqslant \ln(2) - I_n \leqslant \displaystyle\int_0^1 t^n\,dt.$ En déduire $\lim\limits_{n\longrightarrow+\infty} I_n$

50 Calculer, en intégrant par parties.

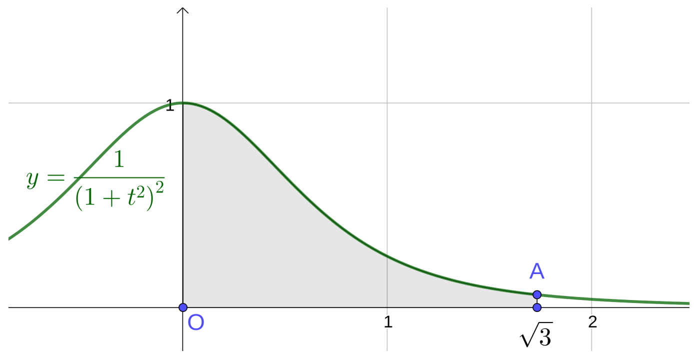
$$a = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{t}{\cos^2 t}\,dt \quad ; \quad b = \int_0^1 x\sqrt{x+1}\,dx \quad ; \quad c = \int_1^e \frac{\ln x}{x^2}\,dx$$

$$d = \int_0^{\frac{1}{2}} \arcsin x\,dx \quad ; \quad y = \int_1^{e^\pi} \sin(\ln x)\,dx \quad ; \quad z = \int_0^1 \ln(1+t^2)\,dt$$

$$\forall x > 0,\ f(x) = \int_1^x \frac{\arctan t}{t^2}\,dt \ \text{ en utilisant } \frac{1}{t(1+t^2)} = \frac{(1+t^2)-t^2}{t(1+t^2)}$$

51

1. Soit $x \in \mathbb{R}$. En effectuant une intégration par parties dans l'intégrale $\displaystyle\int_0^x \frac{1}{1+t^2}\,dt$, calculer $I(x) = \displaystyle\int_0^x \frac{1}{(1+t^2)^2}\,dt$.
2. En déduire l'aire de la surface coloriée en gris ci-dessous.



52 Soit x un nombre réel. On pose $I(x)=\int_1^x t\sin t\,\mathrm{d}t$ et $J=\int_1^{\pi^2}\sin\sqrt{t}\,\mathrm{d}t$

1. À l'aide d'une intégration par parties, calculer l'intégrale $I(x)$.
2. En effectuant le changement de variable $u=\sqrt{t}$ dans l'intégrale J, exprimer le nombre J à l'aide de la fonction I. En déduire la valeur de J.

53 Calculer chacune des intégrales suivantes en effectuant le changement de variable proposé.

1. Pour $a>0$ et $-a<x<a$, $\displaystyle\int_0^x \frac{1}{\sqrt{a^2-t^2}}\,\mathrm{d}t$. On posera $u=\dfrac{t}{a}$
2. $\displaystyle\int_0^{\ln 2}\frac{1}{\mathrm{e}^x-2+2\mathrm{e}^{-x}}\,\mathrm{d}x$. On posera $u=\mathrm{e}^x-1$
3. $\displaystyle\int_1^2\frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{t}+2t}$. On posera $u=\sqrt{t}$
4. $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{\mathrm{d}x}{1+\cos^2 x}$. On posera $u=\tan x$
5. $\displaystyle\int_0^{\pi/2}\frac{\sin(2x)}{1+\sin^2(x)}\,\mathrm{d}x$. On posera $u=\sin x$
6. $\displaystyle\int_0^1\frac{1}{1+x+x^2}\,\mathrm{d}x$. On posera $u=\dfrac{2x+1}{\sqrt{3}}$
7. $\displaystyle\int_0^{\pi/6}\frac{\mathrm{d}t}{\cos t}$. On posera $u=\sin t$ après avoir simplifié $\dfrac{1}{1+u}+\dfrac{1}{1-u}$ pour tout réel $u\in]-1,1[$.
8. $\star$ $\displaystyle\int_0^{1/2} t^2\sqrt{1-t^2}\,\mathrm{d}t$. On posera $t=\sin u$ et on linéarisera le produit $\sin^2 u\cos^2 u$.

54 Soient a et b deux réels tels que $a\leqslant b$. Soit f une fonction continue sur $[a,b]$ telle que $\forall x\in[a,b]$, $f(x)+f(a+b-x)\neq 0$.

1. À l'aide du changement de variable $u=a+b-x$, montrer que

$$\int_a^b\frac{f(x)}{f(a+b-x)+f(x)}\,\mathrm{d}x=\frac{b-a}{2}$$

2. En déduire $\displaystyle\int_2^4\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{6-x}+\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x$ et $\displaystyle\int_0^{\pi/2}\frac{\sqrt{\sin x}}{\sqrt{\sin x}+\sqrt{\cos x}}\,\mathrm{d}x$

55 *Un peu de trigonométrie.*

1. En utilisant les formules d'addition, démontrer que, pour tous réels a et b appartenant à $[0,\pi/4]$,

$$\tan(a-b)=\frac{\tan a-\tan b}{1+\tan a\,\tan b}$$

2. À l'aide du changement de variable $u=\dfrac{\pi}{4}-x$, calculer l'intégrale :

$$J=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\ln(1+\tan x)\,\mathrm{d}x$$

3. En déduire $\displaystyle\int_0^1\frac{\ln(1+t)}{1+t^2}\,\mathrm{d}t$

56 On définit la fonction f sur $\mathbb{R}$ en posant pour tout nombre réel x,

$$f(x)=\int_0^x\frac{1}{\sqrt{1+t^4}}\,\mathrm{d}t$$

1. (a) Justifier que f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et donner $f'(x)$ pour tout réel x.
   (b) Proposer un équivalent simple de $f(x)$ lorsque x tend vers 0.
   (c) Quel est le sens de variation de f sur $\mathbb{R}$?
2. À l'aide du changement de variable $u=-t$, exprimer $f(-x)$ en fonction de $f(x)$.
3. (a) En remarquant que, pour tout réel t, $\sqrt{1+t^4}\geqslant t^2$, démontrer que $\forall x\geqslant 1$, $f(x)-f(1)\leqslant 1$
   (b) En déduire que f admet une limite finie ℓ en $+\infty$.
4. (a) Prouver que, pour tout réel $x>0$, $f(x)-f(1)=f(1)-f\left(\dfrac{1}{x}\right)$
   (b) Exprimer ℓ en fonction de $f(1)$.

5. Calculer la dérivée de la fonction $g : x \longmapsto \displaystyle\int_x^{x^2} \frac{1}{\sqrt{1+t^4}}\,\mathrm{d}t$

57 En utilisant la formule de Taylor avec reste intégral, montrer que

$$\forall x \in [0, +\infty[, \quad x - \frac{x^3}{6} \leqslant \sin x \leqslant x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120}$$

2 Pour approfondir

58 On pose, pour tout entier naturel n,

$$a_n = \int_0^1 t^n\,\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t$$

1. (a) Soit $n \in \mathbb{N}$. Justifier que $\forall t \in [0,1],\ 0 \leqslant t^n\,\mathrm{e}^{-t} \leqslant t^n$.
   (b) En déduire la convergence et la limite de la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
2. Étudier la monotonie de la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
3. (a) Soit $n \in \mathbb{N}$. Démontrer que $a_{n+1} = -\mathrm{e}^{-1} + (n+1)a_n$
   (b) En déduire l'expression de a_n en fonction de n et de a_{n+1} .
   (c) Proposer un équivalent simple de a_n lorsque $n \longrightarrow +\infty$.

59 On admet qu'il existe une fonction $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continue sur $\mathbb{R}$ vérifiant :

$$(\star) \quad \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, \quad \varphi(x+y) = \varphi(x) + \varphi(y).$$

1. Calculer $\varphi(0)$.
2. Soit $x \in \mathbb{R}$ fixé.
   (a) En utilisant la propriété $(\star)$, démontrer l'égalité ci-dessous :

$$\varphi(x) = \int_0^1 \varphi(x+y)\,\mathrm{d}y - \int_0^1 \varphi(y)\,\mathrm{d}y.$$

   (b) À l'aide d'un changement de variable simple, en déduire l'égalité :

$$\varphi(x) = \int_x^{x+1} \varphi(t)\,\mathrm{d}t - \int_0^1 \varphi(y)\,\mathrm{d}y.$$

3. En déduire que φ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et calculer $\varphi'(x)$ pour tout réel x.
4. À l'aide des questions 3. et 1., prouver que φ est une linéaire.

60 Pour tout couple (n,p) d'entiers naturels, on pose :

$$B(n,p) = \int_0^1 x^n\,(1-x)^p\,\mathrm{d}x$$

1. Calculer pour tout $n \in \mathbb{N}$, $B(n,0)$.
2. À l'aide d'une intégration par parties, exprimer $B(n,p+1)$ en fonction de $B(n+1,p)$.
3. $\star$ Démontrer, par récurrence sur p, que

$$\forall m \in \mathbb{N},\ B(m,p) = \frac{m!\,p!}{(m+p+1)!}$$

4. En déduire $\displaystyle\int_0^1 x^3(1-x)^4\,\mathrm{d}x$.

61 On pose $\quad F(x) = \displaystyle\int_x^{x^2} \frac{1}{\ln t}\,\mathrm{d}t$

1. Donner l'ensemble de définition $\mathscr{D}$ de la fonction F.
2. (a) Pour $x \in \mathscr{D}$, calculer $\displaystyle\int_x^{x^2} \frac{1}{t\ln t}\,\mathrm{d}t$.
   (b) $\star$ Montrer que $\forall x > 1, \quad x\ln 2 \leqslant F(x) \leqslant x^2\ln 2$.
   (c) $\star$ Encadrer $F(x)$ par deux polynômes pour $x \in]0,1[$.
   En déduire la limite de F en 1.
3. Prouver que F est dérivable sur $[0,+\infty[$ et calculer $F'(x)$.
4. Dresser le tableau des variations de la fonction F.

62 On considère la fonction $f : t \longmapsto \ln(1+t)$ de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $]-1,+\infty[$.

1. Pour tout entier naturel k et pour tout réel $t > -1$, calculer $f^{(k)}(t)$.
2. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Écrire la formule de Taylor avec reste intégral à l'ordre n sur le segment $[0,1]$ pour la fonction f.
3. ⋆ En déduire

$$\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}}{k}$$

3 Avec Python

63 *On importera en totalité le module math :* `from math import *`
On utilisera : `def, for, range, return, sin, pi, abs, print`

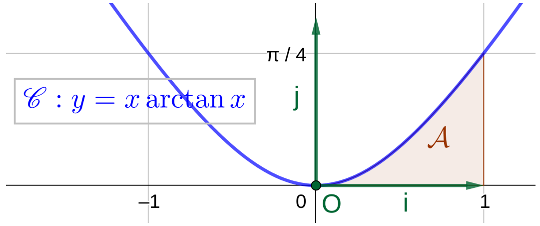
On considère dans cet exercice la méthode des rectangles avec point milieu. Cette approximation est construite à partir d'une subdivision régulière $a = x_0, x_1, x_2, \dots, x_n = b$ du segment $[a,b]$. L'intégrale $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ est alors approchée par la somme des aires des rectangles dont la largeur est l'amplitude h de l'intervalle $[x_{k-1}, x_k]$ et la hauteur est la valeur de f au centre de cet intervalle.

1. Écrire l'approximation obtenue comme une somme de Riemann, à la manière de ce qui a été fait en cours pour la méthode des rectangles à gauche.
2. Programmer une fonction `rectangles_milieu(f,a,b,n)` qui calcule cette approximation où n est le nombre d'intervalles de la subdivision.
3. Tester l'approximation pour le calcul approché de l'intégrale $I = \int_0^\pi \sin x\,\mathrm{d}x$. On fera calculer l'écart entre la valeur approchée renvoyée par `rectangles_milieu(sin,0,pi,n)`, et la valeur exacte de I pour $n \in \{10, 100, 1000, 10\,000\}$.

4 Pour travailler seul

64 *Final 2021. Les deux questions sont indépendantes.*

1. Le plan est rapporté à un repère orthonormal $\left(O;\vec{i},\vec{j}\right)$.
   On note $\mathscr{C}$ la courbe d'équation $y = x\arctan x$.
   Calculer l'aire $\mathscr{A}$ de la surface située en dessous de la courbe $\mathscr{C}$, au dessus de l'axe des abscisses $(O;\vec{i})$ et entre les droites verticales d'équations $x=0$ et $x=1$.



   On remarquera que : $\dfrac{x^2}{1+x^2} = \dfrac{(x^2+1)-1}{1+x^2}$.
2. En effectuant le changement de variable $u = \sqrt{x}$, calculer l'intégrale suivante :

$$I = \int_{1/4}^{3/4} \frac{1}{\sqrt{x(1-x)}}\,\mathrm{d}x.$$

65 a désigne un nombre réel positif fixé. Pour tout entier naturel n, on pose

$$I_n = \int_0^a \frac{x^n}{n!}\mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x$$

1. Calculer, en fonction de a, I_0.
2. (a) Montrer que, pour tout entier naturel n et pour tout réel x de l'intervalle $[0;a]$: $\quad 0 \leqslant \dfrac{x^n}{n!}\mathrm{e}^{-x} \leqslant \dfrac{x^n}{n!}$
   (b) En déduire un encadrement de I_n pour tout entier naturel n.
   (c) Déterminer la limite de la suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$
3. Démontrer, pour tout entier $k \geqslant 1$, l'égalité $I_k - I_{k-1} = -\dfrac{a^k}{k!}\mathrm{e}^{-a}$
4. Déduire de ce qui précède que, $\quad \forall n \in \mathbb{N}^*, \quad I_n - I_0 = -\mathrm{e}^{-a}\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{a^k}{k!}$
5. En déduire finalement $\quad \displaystyle\lim_{n\to+\infty}\sum_{k=0}^{n}\frac{a^k}{k!}$

Espaces vectoriels

1 Pour s'entraîner

66 On pose $\overrightarrow{u_1} = (1,2,3)$ et $\overrightarrow{u_2} = (4,5,6)$.
Parmi les vecteurs suivants, repérer ceux qui sont combinaisons linéaires de $\overrightarrow{u_1}$ et $\overrightarrow{u_2}$ puis expliciter la combinaison linéaire correspondante.
$\overrightarrow{a} = (2, 5/2, 3)$, $\overrightarrow{b} = (7,8,9)$, $\overrightarrow{c} = (1,3,4)$
$\overrightarrow{d} = (1,1,1)$, $\overrightarrow{f} = (1,0,-1)$, $\overrightarrow{0} = (0,0,0)$

67 Dans l'espace vectoriel $\mathbb{R}^3$, les sous-ensembles suivants sont-ils des sous-espaces vectoriels ?

1. $\mathscr{A} = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid z = 2x - y\}$
2. $\mathscr{B} = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x - 2y + z = 1\}$
3. $\mathscr{C} = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid xy - z = 0\}$
4. $\mathscr{D} = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x - 2y = 0 \quad \text{et} \quad x = z\}$
5. $\mathscr{E} = \{(-2\alpha, \beta, 3\alpha) \in \mathbb{R}^3 \mid \alpha \in \mathbb{R} \quad \text{et} \quad \beta \in \mathbb{R}\}$

Déterminer (s'il y a lieu) une base pour chacun de ces sous-espaces vectoriels.

68 Les ensembles suivants sont-ils des sous-espaces vectoriels de l'ensemble des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$?

1. l'ensemble des fonctions impaires, définies sur $\mathbb{R}$,
2. l'ensemble des fonctions décroissantes sur $\mathbb{R}$,
3. l'ensemble des fonctions qui s'annulent en 1,
4. l'ensemble des fonctions solutions sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle $y' + 3y = 0$.

69

1. L'ensemble des suites réelles convergentes constitue-t-il un $\mathbb{R}$-espace vectoriel ?
2. L'ensemble des suites réelles divergentes constitue-t-il un $\mathbb{R}$-espace vectoriel ?
3. Soit ℓ un nombre réel. L'ensemble des suites réelles convergeant vers ℓ, est-il un $\mathbb{R}$-espace vectoriel ?
4. L'ensemble des suites réelles arithmétiques est-il un $\mathbb{R}$-espace vectoriel ?

70 On se place dans l'espace vectoriel $\mathfrak{M}_2(\mathbb{R})$.
Les trois questions sont indépendantes.

1. On pose $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. Vérifier que $A^2 \in \text{Vect}(I_2, A)$.
2. Montrer que l'ensemble $\mathscr{C} = \{M \in \mathfrak{M}_2(\mathbb{R}) \mid AM = MA\}$ est un $\mathbb{R}-$espace vectoriel.
3. Montrer que l'ensemble $S_2(\mathbb{R})$ des matrices symétriques est un sous-espace vectoriel de $\mathfrak{M}_2(\mathbb{R})$, engendré par trois matrices que l'on précisera.

71 On se place dans $\mathbb{R}_2[X]$ l'espace vectoriel des polynômes de degré inférieur ou égal à 2.

1. L'ensemble $A = \{P \in \mathbb{R}_2[X] \mid P(1) = P(2)\}$ est-il un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}_2[X]$?
2. En écrivant P sous la forme $P(X) = aX^2 + bX + c$, quelle relation liant a et b caractérise les éléments de A ?
3. En déduire une base de A.

72

1. Dans l'espace vectoriel $\mathscr{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, on se donne les fonctions

$$f_1 : t \mapsto t \quad , \quad f_2 : t \mapsto \cos(2t) \quad \text{et} \quad f_3 : t \mapsto \sin(2t)$$

Montrer que la famille (f_1, f_2, f_3) est libre.

2. On considère ($\star$) l'équation différentielle linéaire du second ordre

$$(\star) : \quad y''(t) + 4y(t) = 0$$

   (a) Déterminer les fonctions solutions de ($\star$).
   (b) On note F l'ensemble des solutions de l'équation différentielle ($\star$). Démontrer que F est un $\mathbb{R}-$espace vectoriel dont on donnera une base.
   (c) Vérifier que la fonction $\varphi : t \longmapsto 1 + (\cos t - 2\sin t)\sin t$ appartient à F.

73 Dans $\mathbb{R}^3$, les vecteurs $\overrightarrow{u} = (0,1,-1)$; $\overrightarrow{v} = (1,0,-1)$ et $\overrightarrow{w} = (1,-1,0)$ sont linéairement indépendants. Vrai ou Faux ?

74 Dans $\mathbb{C}[X]$, on se donne les polynômes : $\begin{cases} P &= i \\ Q &= X+i \\ R &= (X+i)^2 \end{cases}$

1. Montrer que (P,Q,R) est une famille libre de $\mathbb{C}[X]$.
2. Justifier que le polynôme $T = X^2$ est combinaison linéaire de P, Q et R.

75 Donner une famille génératrice du sous-espace vectoriel de E :

1. le s.e.v. des matrices symétriques de $E = \mathfrak{M}_3(\mathbb{R})$,
2. le s.e.v. des fonctions affines de $E = \mathscr{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$.

76 Soit (Σ) le système d'équations linéaires :

$$\begin{cases} x + 3y + 2z = 0 \\ x + y + z + t = 0 \\ x - t = 0 \end{cases}$$

Montrer que l'ensemble des solutions de (Σ) forme un sous-espace vectoriel F de $\mathbb{R}^4$. Déterminer la dimension et une base de F.

77 Dans $\mathbb{R}_3[X]$, on considère les sous-espaces vectoriels suivants :

$$F = \{P \in \mathbb{R}_3[X] \mid P(0) = 0\} \text{ et } G = \text{Vect}\left(1+X, X+X^2, X^2+X^3\right)$$

Déterminer les dimensions de F, G, $F \cap G$ et de $F+G$.

78 Dans $E = \mathfrak{M}_{4,1}(\mathbb{R})$, on considère les sous-espaces vectoriels $F = \text{Vect}(a,b,c)$ et $G = \text{Vect}(d,e)$ avec :

$$a = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} \quad b = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} \quad c = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad d = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} \quad e = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

1. Déterminer les dimensions de F, G, $F+G$ et $F \cap G$.
2. Donner une base de $F \cap G$.

79 Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Pour une matrice carrée $A \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$, on note

$$\mathscr{C}(A) = \{M \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{R}) \mid AM = MA\}$$

le commutant de A.

1. (a) Soit k un entier naturel, vérifier que A^k appartient à $\mathscr{C}(A)$.
   (b) Montrer que $\mathscr{C}(A)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$.
2. On considère à présent la matrice $A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \in \mathfrak{M}_3(\mathbb{R})$
   (a) On pose $M = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & k \end{pmatrix} \in \mathfrak{M}_3(\mathbb{R})$.
   En résolvant un système linéaire, déterminer la forme des matrices M vérifiant $AM = MA$.
   (b) En déduire une base et la dimension de $\mathscr{C}(A)$.

80 Déterminer un supplémentaire du sous-espace vectoriel F de E dans chacun des cas suivants :

1. $E=\mathbb{R}^3$ et $F=\text{Vect}\big((1,2,1);(2,1,2)\big)$.
2. $E=\mathbb{R}^4$ et $F=\{(x,y,z,t)\in\mathbb{R}^4 \mid x+y+z+t=0\}$.
3. $E=\mathbb{C}_3[X]$ et $F=\{P\in E \mid P(0)=P'(0)=0\}$.

81 Soit $E=\{(u_n)_{n\in\mathbb{N}}\in\mathbb{R}^{\mathbb{N}} \mid (u_n)_n \text{ converge}\}$.

Montrer que l'ensemble des suites constantes et l'ensemble des suites convergeant vers 0 sont des sous-espaces supplémentaires de E.

82 On note $E=\mathbb{R}_2[X]$ le $\mathbb{R}-$espace vectoriel des polynômes à coefficients réels, de degré inférieur ou égal à 2.
Soit $F=\left\{P\in\mathbb{R}_2[X] \mid \int_{-1}^{1}P(t)\,\mathrm{d}t=0\right\}$.

1. Montrer que F est un sous-espace vectoriel de E.
2. Vérifier que X et $3X^2-1$ appartiennent à F.
   En déduire une base de F.
3. Déterminer un supplémentaire de F dans E.

83 *Par analyse/synthèse.* On note $E=\mathscr{C}\big([-1,1],\mathbb{R}\big)$ le $\mathbb{R}-$espace vectoriel des fonctions continues sur $[-1,1]$ à valeurs réelles. On pose

$$F=\left\{f\in E \mid \int_{-1}^{1}f(t)\,\mathrm{d}t=0\right\} \quad \text{et} \quad G=\{f\in E \mid f \text{ constante}\}$$

1. Vérifier que F et G sont des sous-espaces vectoriels de E.
2. $\star$ Montrer que F et G sont supplémentaires dans E.
3. F et G sont-ils de dimensions finies ?

84
1. On considère les vecteurs de $\mathbb{R}^4$: $\vec{u}=(1,2,-1,-1)$ et $\vec{v}=(2,3,0,-1)$. Calculer le rang de la famille de vecteurs $(\vec{u},\vec{v})$.
2. On se donne $\vec{u}=(-2,1,1,1)$; $\vec{v}=(0,3,1,-1)$; $\vec{w}=(-6,9,5,1)$
   Calculer le rang de la famille de vecteurs $(\vec{u},\vec{v},\vec{w})$.
3. Calculer le rang de la famille de polynômes de $\mathbb{R}_3[X]$:
   $\big((X-1)^3, X(X-1)^2, X^2(X-1), X^3\big)$.

85 Soit E un $\mathbb{K}-$espace vectoriel de dimension finie $n\geqslant 2$. On appelle hyperplan, tout s.e.v. de E, de dimension $n-1$.
On considère deux hyperplans **distincts** F et G de E.

Montrer que $E=F+G$. En déduire $\dim(F\cap G)$.

2 Pour approfondir

86 On note $\mathfrak{M}_3(\mathbb{R})$ le $\mathbb{R}-$espace vectoriel des matrices carrées d'ordre 3 à coefficients réels, I la matrice identité de $\mathfrak{M}_3(\mathbb{R})$, et $\mathbb{O}_3$ la matrice nulle de $\mathfrak{M}_3(\mathbb{R})$. Pour toute matrice $A\in\mathfrak{M}_3(\mathbb{R})$, on définit les ensembles suivants :

$$F_1(A)=\{M\in\mathfrak{M}_3(\mathbb{R}) \mid AM=M\}$$

$$F_2(A)=\{M\in\mathfrak{M}_3(\mathbb{R}) \mid A^2M=AM\}$$

1. Montrer que $F_1(A)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathfrak{M}_3(\mathbb{R})$.
   On admet que $F_2(A)$ est aussi un sous-espace vectoriel de $\mathfrak{M}_3(\mathbb{R})$.
2. (a) Montrer que $\forall A\in\mathfrak{M}_3(\mathbb{R})$, $F_1(A)\subset F_2(A)$.
   (b) Montrer que si A est inversible, alors $F_1(A)=F_2(A)$.
3. (a) Montrer que si $A-I$ est inversible, alors $F_1(A)=\{\mathbb{O}_3\}$.
   (b) *Application numérique* : posons $A=\begin{pmatrix}-1&1&0\\0&-1&1\\0&0&2\end{pmatrix}$.
   Déterminer $F_1(A)$ et $F_2(A)$.
4. On considère à présent la matrice diagonale $D=\text{diag}(0,1,2)$.

(a) Montrer que : $M=\begin{pmatrix} a & b & c\\ d & e & f\\ g & h & i\end{pmatrix}\in F_1(D) \iff M=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0\\ d & e & f\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$.

(b) En déduire une base et la dimension de $F_1(D)$.

87 On pose $E=\mathbb{R}_3[X]$, $F=\{P\in E \mid P(1)=P'(1)=0\}$ et $G=\{P\in E \mid P(1)=P(0) \text{ et } P'(1)=0\}$

1. Prouver que F et G sont des sous-espaces vectoriels de E et déterminer leurs dimensions.
2. Justifier que $F=\mathrm{Vect}\big((X-1)^2\,,\,X(X-1)^2\big)$.
3. Calculer la dimension de $F\cap G$ et en donner une base.
4. Proposer un supplémentaire de F dans E.

88 Soient $E=\mathbb{R}[X]$ et Q un polynôme non constant de E. On pose $F=\{P\in E \mid Q \text{ divise } P\}$

1. Montrer que F est un sous-espace vectoriel de E.
2. ⋆ En utilisant le théorème de la division euclidienne des polynômes, déterminer un supplémentaire G de F dans E. Donner une base de G.

3 Avec Python

89 *On importera le module Sympy :* `from sympy import *`
On utilisera : `Matrix, transpose, rank(), linsolve((M,V0))` `def, if, else, return` Une aide pour Sympy.

Dans $\mathbb{R}^4$, on se donne les vecteurs :

$$u_1=(1,1,-1,-1)\,;\,u_2=(0,1,0,1)\,;\,u_3=(1,0,1,1)\,;\,u_4=(0,1,1,0)$$

1. À l'aide de Python, vérifier que la famille $\mathscr{B}=(u_1,u_2,u_3,u_4)$ est une base de $\mathbb{R}^4$.
2. Soit $v_0=(1,2,3,4)$. Déterminer les coordonnées du vecteur v_0 dans la base $\mathscr{B}$.
3. Écrire une fonction Python `f(v)` qui prend en argument un vecteur v de $\mathbb{R}^4$ et qui renvoie `True` si $v\in\mathrm{Vect}(u_1,u_2,u_3)$ et `False` sinon. Le vecteur $v=(7,2,-3,-6)$ est-il combinaison linéaire de u_1, u_2 et u_3 ?

4 Pour travailler seul

90 On note $\mathscr{B}=(e_1,e_2,e_3)$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$.
On pose $u=e_1-e_2=(1,-1,0)$ et $w=e_1-2e_2+e_3$.
Démontrer que la famille $\mathscr{C}=(u,w,e_1)$ est une base de $\mathbb{R}^3$.

91 Montrer que l'ensemble $E=\left\{P\in\mathbb{R}_4[X] \mid P(\sqrt{2})=0\right\}$ est un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ et en donner une base.

92 On désigne par E le $\mathbb{R}$-espace vectoriel des fonctions de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.
Soient $F=\{f\in\mathscr{C}^1(\mathbb{R},\mathbb{R}) \mid f(0)=f'(0)=0\}$ et $G=\{x\mapsto ax+b \mid (a,b)\in\mathbb{R}^2\}$.
Montrer que F et G sont des sous-espaces vectoriels supplémentaires de $E=\mathscr{C}^1(\mathbb{R},\mathbb{R})$.

93 *Médian 2022.* On se place dans $E=\mathbb{R}[X]$ le $\mathbb{R}-$espace vectoriel des polynômes à coefficients réels, à une indéterminée X.
On considère les sous-ensembles de E suivants :

$$F=\left\{P\in E \mid P(1)=0 \text{ et } \int_0^1 P(t)\,\mathrm{d}t=0\right\} \quad \text{et} \quad G=\mathrm{Vect}(X^2+X+1)$$

1. Donner un exemple de polynôme non nul, de degré 2, appartenant à F.
2. Montrer que F est un sous-espace vectoriel de E.
3. Vérifier que F et G sont en somme directe.
4. Démontrer par l'absurde, que le polynôme constant égal à 1, n'appartient pas à $F+G$.
5. Les sous-espaces vectoriels F et G sont-ils supplémentaires dans E ?

94 Soit E un $\mathbb{K}-$ espace vectoriel de dimension finie égale à 4.
On considère deux sous-espaces vectoriels F et G de E tels que $\dim F=\dim G=3$ et $F\neq G$

1. Démontrer que $2\leqslant\dim(F\cap G)\leqslant 3$.
2. En déduire $\dim(F\cap G)$.

Développements limités

1 Pour s'entraîner

95 Soit f la fonction définie sur $]-1, +\infty[$ par : $f(x) = \dfrac{\cos x}{1+x}$

1. Rappeler les développements limités à l'ordre 3 au voisinage de 0 des fonctions $x \longmapsto \cos x$ et $x \longmapsto \dfrac{1}{1+x}$.
2. Calculer le développement limité, à l'ordre 3, au voisinage de 0, de la fonction f.

96

1. Calculer le développement limité à l'ordre 3 au voisinage de 0 de la fonction $f : x \longmapsto \sin x \cos x$
2. Déterminer le développement limité à l'ordre 2 au voisinage de 0 de la fonction $g : x \longmapsto \dfrac{e^x}{\sqrt{1-x}}$
3. Calculer le développement limité à l'ordre 3 au voisinage de 0 de la fonction $h : x \longmapsto \sqrt{1+\sin x}$
4. Calculer le développement limité à l'ordre 3 au voisinage de $\dfrac{\pi}{4}$ de la fonction sin.
5. Calculer le développement limité à l'ordre 3 au voisinage de 5 de la fonction $\varphi : x \longmapsto \sqrt{x}$
6. Calculer le développement limité à l'ordre 4 au voisinage de 2 de la fonction ln.

97 On définit la fonction φ sur $\mathbb{R}$ par $\varphi(x) = \dfrac{\sin x}{1+x^4}$.

Calculer $\varphi^{(5)}(0)$

98

1. Justifier que la dérivée de la fonction tan admet un développement limité à l'ordre 4 au voisinage de 0 donné par
$$\tan'(x) = a + b\,x^2 + c\,x^4 + x^4\,\varepsilon_1(x)$$
2. En déduire en fonction de a, b et c le $\mathrm{DL}_5(0)$ de la fonction tan.
3. Sachant que $\tan'(x) = 1 + \tan^2 x$, calculer a, b et c.

99 *Vrai* ou *Faux* ? Justifier chaque réponse.

Soit h une fonction définie sur un intervalle ouvert I contenant 0, telle que
$$\forall\, x \in I,\ h(x) = -x + 2x^2 + x^3\,\varepsilon(x) \quad \text{avec} \quad \lim_{x\to 0} \varepsilon(x) = 0.$$

1. h est dérivable en 0 et $h'(0) = 0$.
2. La fonction $x \longmapsto \dfrac{h(x)}{x}$ admet un développement limité d'ordre 2 en zéro.
3. $2t^2 - h(2t^2) \underset{(t\to 0)}{\sim} 8t^4$
4. Si de plus, h est de classe $\mathscr{C}^2$ sur I, alors $h^{(2)}(0) = 2$.
5. La fonction $x \longmapsto \sin(x)h(x)$ admet un développement limité d'ordre 4 en zéro.

100 On définit la fonction F sur $I = \left[-\dfrac{\pi}{4}, \dfrac{\pi}{4}\right]$ par : $F(x) = \displaystyle\int_0^x \sqrt{\cos(2t)}\,\mathrm{d}t$

1. (a) Calculer le développement limité à l'ordre 4 au voisinage de 0 de la fonction $t \mapsto \cos(2t)$.
   (b) Rappeler le développement limité à l'ordre 2 au voisinage de 0 de la fonction $u \mapsto \sqrt{1+u}$.
   (c) En déduire le développement limité à l'ordre 4 au voisinage de 0 de la fonction $t \longmapsto \sqrt{\cos(2t)}$.
2. (a) Justifier que F est dérivable sur I et donner $F'(x)$ pour tout réel $x \in I$.
   (b) En déduire le développement limité à l'ordre 5 au voisinage de 0 de F.
3. Par un changement de variable, montrer que F est impaire.

101 On définit la fonction f sur $[-1,+\infty[$ par : $f(x)=\mathrm{e}^x\sqrt{1+x}$
On note $\mathscr{C}$ la courbe représentative de la fonction f dans un repère $\left(O;\vec{i},\vec{j}\right)$ du plan.

1. Rappeler les $\mathrm{DL}_2(0)$ des fonctions $t\mapsto \mathrm{e}^t$ et $t\mapsto\sqrt{1+t}$
2. Déterminer le développement limité à l'ordre 2 au voisinage de 1 de la fonction f.
   On pourra d'abord déterminer le $\mathrm{DL}_2(0)$ de la fonction $g : h\mapsto f(1+h)$
3. (a) En déduire une équation de la tangente (T) à la courbe $\mathscr{C}$ au point A d'abscisse 1.
   (b) Préciser la position de $\mathscr{C}$ par rapport à (T) au voisinage du point A.

102 Déterminer les limites en zéro des fonctions

$$f : x\longmapsto \frac{\mathrm{e}^x-\sqrt{1+2x}}{x^2} \quad \text{et} \quad g : x\longmapsto \frac{1}{x}-\frac{1}{\ln(1+x)}$$

103 Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$g(0)=1 \quad \text{et} \quad \forall t\in\mathbb{R}^*,\ g(t)=\frac{\sin t}{t}$$

On admet que g est continue sur $\mathbb{R}$. On pose pour tout réel x,

$$f(x)=\int_x^{2x} g(t)\,\mathrm{d}t$$

$\mathscr{C}_f$ désigne la courbe représentative de la fonction f dans un repère $\left(O;\vec{i},\vec{j}\right)$ du plan.

1. En introduisant une primitive G de g sur $\mathbb{R}$, justifier que f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et calculer $f'(x)$ pour tout réel x.
2. (a) Rappeler le développement limité à l'ordre 4 au voisinage de 0 de la fonction $u\longmapsto \sin(u)$.
   (b) En déduire le développement limité à l'ordre 4 au voisinage de 0 de la fonction $x\longmapsto \sin(2x)-\sin x$ puis le $\mathrm{DL}_3(0)$ de la dérivée f'.
   (c) Calculer le développement limité, à l'ordre 4, au voisinage de 0, de f.
3. Donner une équation de la tangente (T) à la courbe $\mathscr{C}_f$ au point $O(0,0)$.
4. Préciser la position de $\mathscr{C}_f$ par rapport à (T) au voisinage du point $O(0,0)$.

104 Soit f la fonction définie sur $]0,+\infty[$ par $f(x)=x^2\ln\left(\dfrac{x+1}{x}\right)$

1. Rappeler le $\mathrm{DL}_3(0)$ de la fonction $u\longmapsto \ln(1+u)$
2. En déduire que la courbe $\mathscr{C}_f$ représentant f admet une asymptote oblique au voisinage de $+\infty$. On donnera l'équation réduite de cette asymptote et on précisera la position de cette asymptote par rapport à $\mathscr{C}_f$.

105

1. Après avoir rappelé le DL à l'ordre 2 au voisinage de 0, de la fonction $t\mapsto(1+t)^{-1/2}$, calculer le DL à l'ordre 2 au voisinage de 0, de la fonction $g : u\mapsto \dfrac{1}{\sqrt{1-3u}}$.
2. On définit la fonction f sur $]3,+\infty[$ par $f(x)=\dfrac{x\sqrt{x}}{\sqrt{x-3}}$.
   Montrer que la courbe $\mathscr{C}$ représentative de f admet une asymptote oblique Δ au voisinage de $+\infty$. On précisera la position locale de $\mathscr{C}$ par rapport à Δ.

2 Pour approfondir

106

1. Démontrer que, pour tout réel x, $\cos(\arctan x)=\dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}$
2. Déterminer un équivalent simple, au voisinage de zéro, de la fonction

$$\varphi : x\longmapsto \cos(\arctan x)-\cos x$$

107 Étudier la fonction f définie par $f(x)=\sqrt{x(x+2)}\,\exp\left(\dfrac{1}{x}\right)$.

108 Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = \ln\left(x + \sqrt{1+x^2}\right)$

1. Prouver que f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et calculer $f'(x)$.
2. Calculer le $\mathrm{DL}_4(0)$ de la fonction $x \longmapsto \dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}$.
3. En déduire le DL, à l'ordre 5, au voisinage de 0, de f.
   Proposer un équivalent simple au voisinage de 0 de la fonction f.
4. Déterminer un équivalent simple de $\dfrac{1}{\sin x} - \dfrac{1}{f(x)}$ lorsque $x \to 0$.

109 Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \displaystyle\int_x^{x^2} \sqrt{1+t^2}\,\mathrm{d}t$

1. (a) Rappeler le $\mathrm{DL}_2(0)$ de la fonction $u \longmapsto \sqrt{1+u}$.
   (b) En déduire le $\mathrm{DL}_4(0)$ de la fonction $t \longmapsto \sqrt{1+t^2}$.
   (c) Déterminer le $\mathrm{DL}_5(0)$ de la fonction f.
2. Que peut-on en déduire pour le graphe de f au point d'abscisse 0 ? (équation de la tangente, position de la courbe par rapport à la tangente)

3 Avec Python

110
```
from math import *
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt
```

On utilisera : `lambda, np.linspace, np.vectorize, plt.plot, plt.axis, plt.grid, plt.show`

Soit la fonction $f : x \longmapsto \cos(e^x - 1)$.

1. Déterminer, sans Python, le développement limité à l'ordre 3 en 0 de la fonction f.
   Calculer à la main, une valeur décimale approchée de $f(-0{,}02)$.
2. Créer la fonction `f` sous Python. Faire calculer `f(-0.02)`
3. Sur un même graphique, afficher les courbes représentatives de f et des polynômes de Taylor de degrés 2 et 3, de f en zéro.
   On choisira comme fenêtre graphique $[-2, 2] \times [-1.5, 1.5]$

4 Pour travailler seul

111 On considère l'application $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x}{e^x - 1} & \text{si} \quad x \neq 0 \\ 1 & \text{si} \quad x = 0 \end{cases}$$

On désigne par $\mathscr{C}$ la courbe représentative de f dans un repère orthogonal.

1. Calculer le développement limité à l'ordre 2 au voisinage de 0 de f.
2. En déduire une équation de la tangente (T) à la courbe $\mathscr{C}$ au point d'abscisse 0 et la position locale de (T) par rapport à $\mathscr{C}$ au voisinage de ce point.

112 *Final 2021.*

1. Déterminer le développement limité à l'ordre 4, au voisinage de zéro, de la fonction $f : x \longmapsto \dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}} - \cos x$
2. En déduire l'équation réduite de la tangente (T) à la courbe $\mathscr{C}$ représentative de f au point $O(0,0)$. Préciser la position locale de $\mathscr{C}$ par rapport à (T) au voisinage du point O.

113

1. Déterminer le $\mathrm{DL}_3(0)$ de $x \longmapsto \ln(1+x)$.
2. On considère la fonction f définie sur l'intervalle $I =]-1, +\infty[$ par

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\ln(1+x)}{x} & \text{si} \quad x \neq 0 \\ 1 & \text{si} \quad x = 0 \end{cases}$$

   (a) Montrer que f est continue en zéro.
   (b) Écrire le développement limité à l'ordre 2 au voisinage de 0 de f.
   (c) f est-elle dérivable en 0 ? Si oui, donner $f'(0)$.
3. On définit la fonction g sur $I \setminus \{0\}$ par $g(x) = (1+x)^{\frac{1}{x}}$.
   (a) Déterminer le développement limité à l'ordre 2 au voisinage de 0 de la fonction $x \longmapsto \exp(f(x) - 1)$.
   (b) En déduire le développement limité à l'ordre 2 en 0 de g.
4. On pose, pour tout entier naturel non nul n, $u_n = (1 + 1/n)^n$.
   (a) Pour $n \in \mathbb{N}^*$, exprimer u_n à l'aide de la fonction g.
   En déduire que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est convergente et préciser sa limite ℓ.
   (b) En utilisant la question 3.(b), proposer un équivalent simple de $u_n - \ell$ lorsque n tend vers $+\infty$.

Applications linéaires

1 Pour s'entraîner

114 On considère l'application

$$f: \begin{array}{ccc} \mathfrak{M}_{3,1}(\mathbb{R}) & \longrightarrow & \mathfrak{M}_{3,1}(\mathbb{R}) \\ X=\begin{pmatrix} x\\ y\\ z\end{pmatrix} & \longmapsto & \begin{pmatrix} 3x-2y+3z\\ 2z-x\\ 2z\end{pmatrix}\end{array}$$

1. Donner une matrice A carrée d'ordre 3, telle que $\forall X \in \mathfrak{M}_{3,1}(\mathbb{R}),\ f(X)=AX$
2. En déduire que f est un endomorphisme.
3. f est-elle bijective ?

115 Les applications suivantes sont-elles des applications linéaires ?

1. $f: \begin{array}{ccc} \mathbb{C}^3 & \to & \mathbb{C}^2 \\ (x,y,z) & \mapsto & (y+z\,,x+y+z)\end{array}$
2. $g: \begin{array}{ccc} \mathbb{R}\times\mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x,y) & \longmapsto & xy\end{array}$
3. $h: \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ (x,y) & \longmapsto & (x-|y|\,,x+2y)\end{array}$
4. $\varphi: \begin{array}{ccc} \mathfrak{M}_n(\mathbb{R}) & \longrightarrow & \mathfrak{M}_n(\mathbb{R}) \\ M & \longmapsto & AM-MA\end{array}$ pour $n\in\mathbb{N}^*$ et $A\in\mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$ fixés.
5. $\Delta: \begin{array}{ccc} \mathbb{C}[X] & \longrightarrow & \mathbb{C}[X] \\ P & \longmapsto & P'+P(i)\end{array}$
6. $\psi: \begin{array}{ccc} \mathscr{C}([0,1],\mathbb{R}) & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ f & \longmapsto & f(1)-\displaystyle\int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t\end{array}$

116 Soit $f:\mathbb{C}\longrightarrow\mathbb{R}^+$ l'application définie par $\forall z\in\mathbb{C},\ f(z)=|z|$.

1. L'application f est-elle injective ? Est-elle surjective ?
2. Déterminer et représenter dans le plan complexe l'image réciproque par f de l'intervalle $[1;2]$.

117 On définit l'application $f:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$ par

$$f(x)=\frac{2x}{1+x^2}$$

1. Déterminer $J=f(\mathbb{R})$. La fonction f est-elle surjective ?
2. f est-elle injective ? Justifier.
3. Montrer que l'application $g: \begin{array}{ccc} [-1,1] & \longrightarrow & J \\ x & \longmapsto & f(x)\end{array}$ est bijective.

   Déterminer sa bijection réciproque g^{-1}.
4. Calculer le développement limité d'ordre 5 au voisinage de 0 de f.

118 On considère la fonction f, restriction de la fonction sin à l'intervalle $]-\pi,\pi]$. Donner l'image réciproque par f de $[0,1/2]$.

119 On note $E=\mathbb{C}[X]$. Vérifier que l'application $\varphi: \begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & E \\ P(X) & \mapsto & XP(X)\end{array}$ est linéaire. φ est-elle injective ? surjective ? bijective ?

120 Soit $E=\mathbb{R}_2[X]$ et l'application $f: \begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ P & \mapsto & \big(P(1),P(2)\big)\end{array}$

1. Vérifier que f est linéaire. Déterminer son noyau.
2. En déduire le rang de f et $\mathrm{Im} f$.

121 On considère l'application $f: \begin{array}{ccc} \mathfrak{M}_{3,1}(\mathbb{R}) & \longrightarrow & \mathfrak{M}_{2,1}(\mathbb{R}) \\ U=\begin{pmatrix} x\\ y\\ z\end{pmatrix} & \longmapsto & f(U)=\begin{pmatrix} x-y+z\\ x+y+2z\end{pmatrix}\end{array}$

1. Donner la matrice $A \in \mathfrak{M}_{2,3}(\mathbb{R})$ telle que

$$\forall U \in \mathfrak{M}_{3,1}(\mathbb{R}),\ f(U) = AU$$

2. Vérifier que f est linéaire.
3. Déterminer $\operatorname{Ker}(f)$. f est-elle injective ?
4. En déduire le rang de f.

122 Soit f une application linéaire injective d'un $\mathbb{R}-$espace vectoriel E dans un $\mathbb{R}-$espace vectoriel F.
Soit $(\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, \dots, \overrightarrow{e_n})$ est une famille libre de E.

Montrer que $\left(f(\overrightarrow{e_1}), f(\overrightarrow{e_2}), \dots, f(\overrightarrow{e_n})\right)$ est une famille libre de F.
S'agit-il d'une base de F ?

123 On note E le $\mathbb{R}-$espace vectoriel des fonctions de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$, à valeurs dans $\mathbb{R}$. On écrit $E = \mathscr{C}^\infty(\mathbb{R},\mathbb{R})$. On définit l'application $\Phi : E \longrightarrow E$ par $\forall f \in E,\ \Phi(f) = 2f - f'$.

1. Montrer que Φ est un endomorphisme de E.
2. Déterminer le noyau de Φ. Φ est-elle une bijection ?
3. Soit $g \in E$. On pose $\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = -\mathrm{e}^{2x} \displaystyle\int_0^x g(t)\mathrm{e}^{-2t}\,\mathrm{d}t$.
   Simplifier $\Phi(f)$. En déduire $\operatorname{Im}(\Phi)$.
4. Prouver que l'application $\varphi : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_3[X] & \longrightarrow & \mathbb{R}_3[X] \\ P & \longmapsto & 2P - P' \end{array}$
   est bijective.

124 Justifier qu'il existe une unique application linéaire f de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^3$ telle que

$$f(1,2) = (1,1,0) \quad \text{et} \quad f(2,1) = (0,1,1)$$

Calculer $f(x,y)$ pour tous réels x, y. Déterminer $\operatorname{Im} f$ et $\operatorname{Ker} f$.

125 Soient E et F deux $\mathbb{K}-$espaces vectoriels de dimension finie $n \geqslant 1$.
Soit $f \in \mathscr{L}(E,F)$ telle que $\exists g \in \mathscr{L}(F,E)\,;\ g \circ f = \mathrm{id}_E$.
Montrer que f est injective. Que peut-on conclure ?

126 On note $\mathbb{R}_2[X]$ le $\mathbb{R}-$espace vectoriel des polynômes à coefficients réels, de degré inférieur ou égal à 2. Pour tout polynôme P de $\mathbb{R}_2[X]$, on pose $\Psi(P) = 2P + (X-1)P'$

1. Prouver que si P est de degré au plus 2, alors $\Psi(P) \in \mathbb{R}_2[X]$.
2. Vérifier que Ψ est une application linéaire de $\mathbb{R}_2[X]$ dans $\mathbb{R}_2[X]$.
3. On pose $Q_0 = 1$, $Q_1 = X - 1$ et $Q_2 = (X-1)^2$.
   Calculer $\Psi(Q_k)$ en fonction de Q_k pour chaque entier $k \in [\![0\,,2]\!]$.
4. Montrer que la famille (Q_0, Q_1, Q_2) est une base de $\mathbb{R}_2[X]$.
   En déduire $\operatorname{Im}(\Psi)$.
5. Soit $P \in \mathbb{R}_2[X]$. Calculer les coordonnées de P dans la base (Q_0, Q_1, Q_2).

127 On note $E = \mathbb{R}_2[X]$ dont la base canonique est $\mathscr{B} = (1, X, X^2)$.
On considère l'application $f : \begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & E \\ P(X) & \longmapsto & 2X\,P(X) - (X^2-1)P'(X) \end{array}$

1. (a) Soit $P(X) \in E$. En écrivant $P(X) = a + bX + cX^2$ (où a, b, c sont des coefficients réels), donner sous forme développée $f\big(P(X)\big)$. En déduire que f est «bien définie».
   (b) Prouver que f est un endomorphisme de E.
   (c) Calculer les polynômes $f(1)$, $f(X)$ et $f(X^2)$.
2. (a) Proposer une base de $\operatorname{Im} f$ et donner le rang de f.
   (b) En déduire la dimension du noyau de f et proposer une base de $\operatorname{Ker} f$. $\operatorname{Im} f$ et $\operatorname{Ker} f$ sont-ils supplémentaires ?

128 Soit E un $\mathbb{K}-$espace vectoriel. Soient u et w deux endomorphismes de E. Prouver que

$$\operatorname{Im}(u+w) \subset \big(\operatorname{Im}(u) + \operatorname{Im}(w)\big)$$

L'inclusion réciproque est-elle vraie ?

2 Pour approfondir

129 On note $E = \mathbb{R}[X]$. Soit $\varphi : E \longrightarrow E$ l'application définie par :

$$\forall P \in E, \quad \varphi(P) = P(X+1) - P(X)$$

1. Vérifier que φ est un endomorphisme de E.
2. ⋆ Déterminer le noyau de φ.
   Indication : que peut-on dire d'un polynôme de E, admettant une infinité de racines ?

130 On désigne par F l'ensemble des suites réelles $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ satisfaisant la relation de récurrence :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+2} = 6u_{n+1} + 7u_n$$

1. Montrer que F est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$.
   Déterminer les suites géométriques appartenant à F.
2. Prouver que l'application $\varphi : \begin{array}{ccc} F & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ (u_n)_{n\in\mathbb{N}} & \longmapsto & (u_0, u_1) \end{array}$
   est un isomorphisme.
3. En déduire une base de F.
4. La suite (v_n) est définie par $v_0 = 0$, $\quad v_1 = 1$ et
   $\forall n \in \mathbb{N}$, $v_{n+2} = 6v_{n+1} + 7v_n$. Expliciter v_n en fonction de n.

131 Soit E un $\mathbb{K}-$espace vectoriel de dimension finie n (où $n \in \mathbb{N}^*$). Soient f et g deux endomorphismes de E.

1. Montrer que $\quad \mathrm{Ker} f \subset \mathrm{Ker}(g\circ f)$ et $\quad \mathrm{Im}(g\circ f) \subset \mathrm{Im}\, g$.
2. En déduire que $\quad \mathrm{rg}(g\circ f) \leqslant \min\{\mathrm{rg}(f), \mathrm{rg}(g)\}$.

132 Soit $n \in \mathbb{N}^*$.
Soit $\varphi : \mathbb{K}_{n+1}[X] \longrightarrow \mathbb{K}_n[X]$ définie par $\varphi(P) = (n+1)P - XP'$.

1. Justifier que φ est bien définie puis que φ est une application linéaire.
2. Déterminer le noyau de φ.
3. En déduire, par le théorème du rang, que φ est surjective.

133 *Par analyse/synthèse.* Soient E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels. Soit $f \in \mathscr{L}(E,F)$ et $g \in \mathscr{L}(F,E)$ telles que $g\circ f = \mathrm{id}_E$.

1. Prouver que $(\mathrm{Ker} g \cap \mathrm{Im} f) \subset \left\{\overrightarrow{0_F}\right\}$
2. Démontrer que $F = \mathrm{Ker} g \oplus \mathrm{Im} f$

3 Pour travailler seul

134 *Avec le théorème du rang* . Soit $f \in \mathscr{L}(\mathbb{R}^3)$ tel que $f\circ f = \tilde{0}$.

1. Montrer que $\quad \mathrm{Im} f \subset \mathrm{Ker} f$.
2. On suppose de plus que $f \neq \tilde{0}$. $\quad$ Déterminer le rang de f.

135 *Final 2017* .
Soit $E = \mathscr{C}(\mathbb{R},\mathbb{R})$ l'espace vectoriel des fonctions continues sur $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{R}$. On considère l'application Φ qui, à toute fonction f de E, associe la fonction $\Phi(f)$ définie sur $\mathbb{R}$ par $\forall x \in \mathbb{R}$, $\Phi(f)(x) = \displaystyle\int_x^{x+1} f(t)\,\mathrm{d}t$

1. (a) Soit $f \in E$. En introduisant une primitive F de f sur $\mathbb{R}$, justifier que $\Phi(f)$ est dérivable sur $\mathbb{R}$.
   (b) En déduire que l'application Φ n'est pas surjective.
2. Montrer que Φ est un endomorphisme de E.
3. Soit la fonction $g : x \longmapsto \cos(2\pi x)$. Calculer pour tout réel x, $\Phi(g)(x)$.
   Φ est-elle injective ? Justifier.

136 Soient E un $\mathbb{K}-$espace vectoriel et f un endomorphisme de E.
On note $f^2 = f\circ f$. Démontrer l'équivalence suivante :
$\mathrm{Im} f \cap \mathrm{Ker} f = \left\{\overrightarrow{0_E}\right\} \iff \mathrm{Ker} f = \mathrm{Ker} f^2$

Fonctions de deux variables

1 Pour s'entraîner

137 Dessiner les parties suivantes de $\mathbb{R}^2$.
Sont-elles bornées ? ouvertes ? fermées ?

$$E_1 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid xy > 0\} \quad E_2 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 < 9\}$$

$$E_3 = \mathbb{R}^2 \setminus (\mathbb{R} \times \{0\}) \quad E_4 = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} \quad E_5 = [2,4] \times [-1,3]$$

$$E_6 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,;\, 1 < |x-4| < 3\} \quad E_7 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,;\, |x| + |y| < 2\}$$

138 On définit les fonctions f, g et h par :

$$f(x,y) = 2x + 3y - 5 \quad ; \quad g(x,y) = \sqrt{4 - x^2 - y^2} \quad ; \quad h(x,y) = \sqrt{1 - y^2}$$

1. Donner l'ensemble de définition de chacune de ces fonctions.
2. Décrire géométriquement les surfaces représentatives des fonctions précédentes.

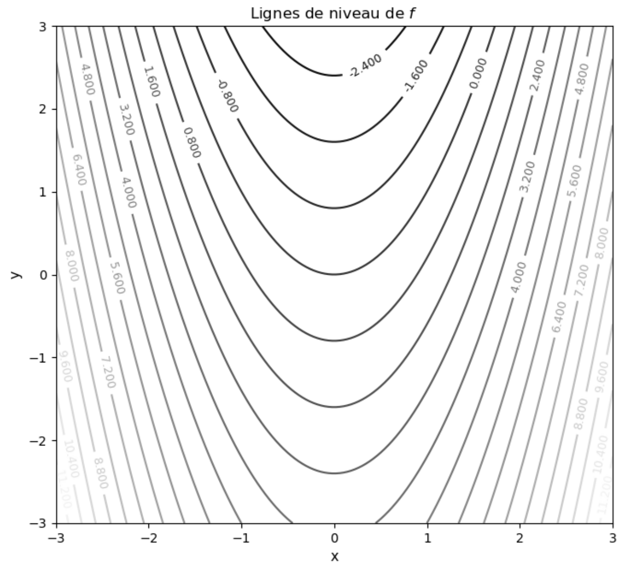
139 On considère la fonction $f : (x,y) \mapsto \ln(1 - x^2 - y^2)$.

1. Déterminer et représenter graphiquement l'ensemble de définition de f.
2. Soit $\alpha > 0$. Déterminer $\mathscr{L}_{-\alpha}$ la ligne de niveau $-\alpha$ de f.

140 On donne ci-contre les lignes de niveau d'une fonction de deux variables. Une seule des quatre fonctions suivantes peut convenir. Laquelle ?

$$f_1(x,y) = e^{x-y} \quad ; \quad f_2(x,y) = x - y^2$$

$$f_3(x,y) = \ln(x^2 + y^2) \quad ; \quad f_4(x,y) = x^2 - y$$



141 Montrer que la fonction $g : (x,y) \longmapsto \dfrac{\sin x}{y}$ n'a pas de limite en $(0,0)$.

142 On définit $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ par $f(x,y) = \dfrac{x^2 + 2xy + y^2}{x^2 + y^2}$ si $(x,y) \neq (0,0)$ et $f(0,0) = 1$.
Etudier les limites, pour $t \to 0$ de $f(0,t)$ et $f(t,-t)$. Conclusion ?

143 Déterminer la limite éventuelle en $(0,0)$ de la fonction f définie par $f(x,y) = \ldots$

(i) $\dfrac{x^2 + y^2}{x^2 - y^2}$

(ii) $\dfrac{\sin x \sin y}{xy}$

(iii) $y \sin\left(\dfrac{1}{x^2}\right)$

(iv) $\dfrac{2x^2 y}{x^4 + y^2}$

(v) $\dfrac{\ln(1 + xy)}{y}$

(vi) $\dfrac{1 - \cos\sqrt{xy}}{y}$

144 Soit f définie par $f(x,y)=y\dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$ pour $(x,y)\neq(0,0)$ et $f(0,0)=0$.
Montrer que f est continue sur $\mathbb{R}^2$.

145 On pose $f(x,y)=\arccos(xy-1)$.

1. $\star$ Déterminer l'ensemble de définition de f.
   Le représenter graphiquement dans un plan.
2. Calculer $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y)$.
3. Déterminer la ligne de niveau k de f pour $k\in[0,\pi]$.

146 Calculer les dérivées partielles premières de la fonction g :

(a) $g(x,y)=x^2y+\frac{1}{3}y^3$ (b) $g(x,y)=\sqrt{x+2y}$
(c) $g(x,y)=3xy+\mathrm{e}^y$ (d) $g(x,y)=y\sin(2xy+1)$
(e) $g(x,y)=\ln(x^2y^2)$ (f) $g(x,y)=\arcsin(1-xy)$

147 On pose $\Omega=\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}$. Soit la fonction $f:\mathbb{R}^2\longrightarrow\mathbb{R}$ définie par

$$f(x,y)=\frac{y^3}{x^2+y^2}\text{ si }(x,y)\in\Omega\quad\text{ et } f(0,0)=0$$

1. f est-elle continue sur $\mathbb{R}^2$?
2. Calculer les dérivées partielles premières de f sur Ω.
3. Calculer $\dfrac{\partial f}{\partial x}(0,0)$ et $\dfrac{\partial f}{\partial y}(0,0)$.
4. f est-elle de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$?

148 Déterminer une équation cartésienne du plan tangent à la surface d'équation $z=\dfrac{1}{x^2+y}$ au point $A(1,0,1)$.

149 Soit $f:\mathbb{R}^2\longrightarrow\mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$.
On définit la fonction $g:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$ par $\forall x\in\mathbb{R},\ g(x)=f(x,2x)$.
Alors g est dérivable sur $\mathbb{R}$.

Exprimer $g'(x)$ en fonction des dérivées partielles premières de f.

150 Soit f la fonction définie par $f(0,0)=0$ et
$f(x,y)=\dfrac{xy}{x^2+y^2}$ si $(x,y)\neq(0,0)$

1. Montrer que les applications partielles de f en $(0,0)$, sont continues en 0.
2. Examiner $f(x,x)$ et montrer que f n'est pas continue en $(0,0)$.
3. Prouver l'existence de dérivées partielles premières de f sur $\mathbb{R}^2$.
4. Vérifier par le calcul que les dérivées partielles ne sont pas continues en $(0,0)$.

151 Déterminer le développement limité à l'ordre 1 de la fonction f au point $a=(2;1)$:

(a) $f(x,y)=x^2y$ (b) $f(x,y)=\frac{1}{2}(x^2-y^2)$
(c) $f(x,y)=\ln(xy)$ (d) $f(x,y)=x\arctan y$

152 On considère la fonction f de deux variables définie par :
$f(x,y)=3x\mathrm{e}^y-x^3-\mathrm{e}^{3y}$. On admet que f est de classe $\mathscr{C}^2$ sur $\mathbb{R}^2$.

1. (a) Calculer les dérivées partielles premières de f.
   (b) Montrer que $a=(1,0)$ est le seul point critique de f.
2. (a) Calculer les dérivées partielles secondes de f.
   (b) En déduire que f admet un extremum local en a.
   S'agit-il d'un maximum ou d'un minimum ?
   (c) Cet extremum est-il absolu ?

153 Trouver les extremums locaux de la fonction f définie par :

1. $f(x,y) = 2x^2 + 2y^2 + 2xy - x - y$
2. $f(x,y) = x^3 + y^3 - 9xy + 1$
3. $f(x,y) = x^4 + y^4 - (x-y)^2$
   Compléter : $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$,
   $f(x,y) = (x^2-1)^2 + (y^2-1)^2 + \dots$
   En déduire les éventuels extremums globaux de f.
4. $f(x,y) = \sin(x) + y^2 - 2y + 1$
5. $f(x,y) = e^{x \sin y}$
6. $f(x,y) = xy(x+y-1)$

154 On considère la fonction f, de deux variables réelles, définie pour tous réels strictement positifs x et y par :

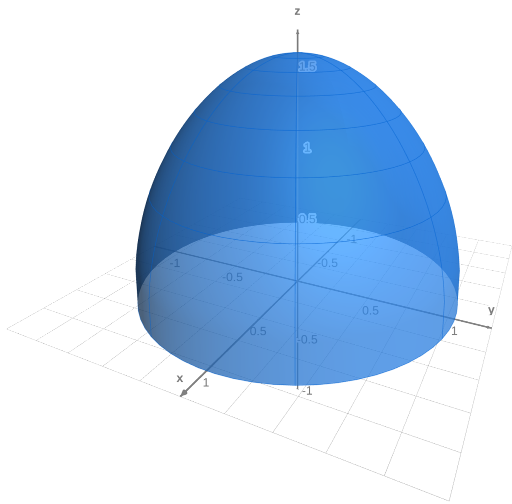
$$f(x,y) = xy + \frac{8}{x} + \frac{8}{y}$$

1. Déterminer les éventuels points critiques de f.
   La fonction f présente-t-elle des extremums locaux ?
2. **Application** :
   Une entreprise fabrique des bacs parallélépipédiques de largeur x, de longueur y et de hauteur z (x, y et z étant exprimées en dm). Ces bacs comportent un fond mais pas de couvercle et l'épaisseur des plaques formant ces bacs est négligeable.
   (a) Quelle est l'aire totale (en dm^2) des plaques nécessaires à la construction d'un bac ? On notera cette aire $\mathscr{A}(x,y,z)$.
   (b) On veut que chaque bac ait un volume de 4 litres.
   Comment choisir les dimensions pour minimiser l'aire $\mathscr{A}$?

2 Pour approfondir

155 Soit f la fonction donnée par $f : (x,y) \mapsto \arccos(x^2+y^2)$
Dans tout l'exercice, l'espace est muni d'un repère orthonormal $\left(O ; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\right)$.

1. Déterminer l'ensemble de définition $\mathscr{D}$ de f.
2. Soit t un nombre réel. Déterminer $\mathscr{L}_t$ la ligne de niveau t de f.



3. On note U l'intérieur du disque unité : $U = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2+y^2 < 1\right\}$ et on admet que f admet des dérivées partielles sur U.
   (a) Donner une équation du plan tangent à la surface représentative de f au point $A\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, f\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)\right)$.
   (b) Démontrer que f admet $(0,0)$ comme unique point critique sur U.
   (c) Calculer $f(0,0)$ et en déduire que f admet un maximum global en $(0,0)$.
4. Dans cette question, on admettra le résultat suivant :
   soit (Σ) un solide compris entre les plans d'équations $z = a$ et $z = b$ où a et b sont deux réels tels que $a < b$. Si, pour tout réel $t \in [a,b]$, on note $A(t)$ l'aire de la section de (Σ) par le plan d'équation $z = t$, et si la fonction $t \mapsto A(t)$ est continue sur le segment $[a,b]$, alors le volume $v(\Sigma)$ du solide (Σ) est donné par l'intégrale :

$$v(\Sigma) = \int_a^b A(t)\,\mathrm{d}t$$

   Calculer le volume du solide (Σ) situé au-dessus du plan $(0xy)$ et en dessous de la surface représentative de f.

156 On pose pour tout entier naturel n : $a_n = \displaystyle\int_0^1 \frac{t^n}{1+t^2}\,\mathrm{d}t$

1. Calculer a_0 et a_1 .
2. (a) Pour tout entier naturel n, exprimer $a_n + a_{n+2}$ explicitement en fonction de n.
   (b) En déduire les valeurs exactes de a_2, a_3 et a_4 .

   On considère la fonction $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par :
$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2,\ f(x,y) = \int_0^1 \frac{(t^2 + xt + y)^2}{1+t^2}\,\mathrm{d}t$$
3. Prouver que, pour tous réels x et y,
$$f(x,y) = a_2 x^2 + a_0 y^2 + 2a_1 xy + 2a_3 x + 2a_2 y + a_4$$
4. Démontrer que f admet un unique point critique b sur $\mathbb{R}^2$ sans chercher à calculer ce point critique.
5. (a) Calculer la matrice hessienne de f au point b.
   (b) En déduire que f présente un extremum local en b.
   S'agit-il d'un minimum ou d'un maximum ?

157 On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :
$$\forall t \in \mathbb{R},\quad f(t) = \begin{cases} \dfrac{\arctan t}{t} & \text{si} \quad t \neq 0 \\ 1 & \text{si} \quad t = 0 \end{cases}$$

1. (a) Déterminer le développement limité à l'ordre 2 au voisinage de 0 de la fonction f.
   (b) f est-elle dérivable en 0 ? Si oui, donner la valeur de $f'(0)$.
   (c) Calculer $f'(t)$ pour tout réel t non nul.
2. On définit à présent la fonction F sur $\mathbb{R}$ par :
$$\forall x \in \mathbb{R},\quad F(x) = \int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t$$
   et la fonction g sur $\mathbb{R}^2$ par :
$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2,\quad g(x,y) = F(xy) - F(x) - F(y).$$
   On admet que g est de classe $\mathscr{C}^2$ sur $\mathbb{R}^2$.
   (a) Soit $(x,y) \in \mathbb{R}^2$. Exprimer $\dfrac{\partial g}{\partial x}(x,y)$ et $\dfrac{\partial g}{\partial y}(x,y)$ à l'aide de la fonction f.
   (b) Montrer que si $x = 0$ ou $y = 0$ alors (x,y) n'est pas un point critique de g.
   (c) Démontrer que g admet un unique point critique que l'on précisera.
   (d) La fonction g présente-t-elle un extremum sur $\mathbb{R}^2$?

158 On considère la fonction F définie sur $\mathbb{R}^2$ par :
$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2,\quad F(x,y) = x^2 y + x y^2$$

Partie A

1. Calculer les dérivées partielles premières de F.
2. Montrer que F admet un unique point critique a que l'on précisera.
3. Étudier le signe de $F(x,x)$ pour $x \in \mathbb{R}$. La fonction F possède-t-elle un extremum ?

Partie B

On se propose dans cette partie, de déterminer toutes les fonctions $g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, de classe $\mathscr{C}^2$ sur $\mathbb{R}$, vérifiant la relation $(\star)$ suivante :
$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2,\quad g(x+y) = g(x) + g(y) + F(x,y) \qquad (\star)$$

1. On suppose qu'*il existe une telle fonction g*.
   (a) On pose $\begin{cases} A(x,y) = g(x+y) \\ B(x,y) = g(x) + g(y) + F(x,y) \end{cases}$
   Exprimer $\dfrac{\partial A}{\partial x}(x,y)$ et $\dfrac{\partial B}{\partial x}(x,y)$ à l'aide de g et de F.

(b) Prouver que $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, \quad g''(x+y) = \dfrac{\partial^2 F}{\partial y \partial x}(x,y)$

(c) En déduire que pour tout réel t, $g''(t) = 2t$. Calculer $g(0)$ grâce à $(\star)$.

2. Donner **toutes** les fonctions g de classe $\mathscr{C}^2$ sur $\mathbb{R}$ vérifiant la relation $(\star)$.

159 *Passage en coordonnées polaires.* On pose $U = \mathbb{R}^{+*} \times \mathbb{R}$.

1. Soit $f : U \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathscr{C}^1$ sur U.
On définit la fonction g sur $\Omega = \mathbb{R}^{+*} \times \left]-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right[$ par :

$$\forall (r,\theta) \in \Omega, \quad g(r,\theta) = f(r\cos\theta, r\sin\theta)$$

Exprimer $\dfrac{\partial g}{\partial r}(r,\theta)$ et $\dfrac{\partial g}{\partial \theta}(r,\theta)$ à l'aide des dérivées partielles premières de f.

2. Trouver toutes les fonctions $f : U \longrightarrow \mathbb{R}$ de classe $\mathscr{C}^1$ sur U telles que $\forall (x,y) \in U, \quad y\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) - x\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 0$

3. Trouver toutes les fonctions $f : U \longrightarrow \mathbb{R}$ de classe $\mathscr{C}^1$ sur U telles que $\forall (x,y) \in U, \quad x\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) + y\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \sqrt{x^2+y^2}$

3 Avec Python

160 PYPLOT dispose d'une commande appelée `contour` permettant de tracer des lignes de niveau d'une fonction de deux variables.
Soit la fonction f définie par $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, f(x,y) = x^2 - x^3 + y^2$

1. Modifier le fichier andre.turbergue.free.fr/wp-content/uploads/surface3D.txt, afin de tracer la nappe représentant la fonction f sur $[-2,2] \times [-2,2]$.
2. Conjecturer l'existence d'extrema locaux et/ou globaux de f.
Voit-on sur la surface un point critique ? Est-ce un extremum local ?
3. Visualiser des lignes de niveau de f pour des niveaux entre 0 et 2 avec un pas de 0,05. On pourra remplacer le `levels=80` de `plt.contour`, par un `np.arange`
4. Justifier que f est de classe $\mathscr{C}^2$ sur $\mathbb{R}^2$ et calculer ses dérivées partielles premières et secondes.
5. Déterminer les points critiques de f. Justifier les conjectures.

4 Pour travailler seul

161 *Final 2019.* On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}^2$ par :

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, \quad f(x,y) = x^4 - xy^3 + 3y^4$$

1. Calculer les dérivées partielles premières de f en tout point (x,y) de $\mathbb{R}^2$.
2. Démontrer que f admet un unique point critique a que l'on précisera.
3. (a) Développer l'expression : $\left(x^2 - \dfrac{y^2}{2}\right)^2 + \left(xy - \dfrac{y^2}{2}\right)^2 + \dfrac{5}{2}y^4$
(b) La fonction f possède-t-elle un extremum ?
Est-il global ou seulement local ?

162 *Final 2016.* **On admet** dans cet exercice que l'équation d'inconnue x, $e^x = \dfrac{1}{x^2}$ admet une solution et une seule α dans $]0,+\infty[$, et que $\dfrac{1}{2} < \alpha < 1$.

On considère l'ouvert $U =]0,+\infty[\times\mathbb{R}$ de $\mathbb{R}^2$ et la fonction f de classe $\mathscr{C}^2$ sur U définie par $\forall (x,y) \in U, f(x,y) = \dfrac{1}{x} + e^x - y^2 e^y$

1. Calculer les dérivées partielles premières de f en tout point $(x,y) \in U$.
2. Montrer que f admet deux points critiques et deux seulement, dont l'un des deux est $a = (\alpha, -2)$.
3. Est-ce que f admet un extremum local en a ? Si oui, préciser sa nature.

163 Le but de l'exercice est l'étude des extremums de la fonction f définie sur $\mathbb{R}^2$ par $f(x,y) = x^2 - 2xy + 2y^2 + e^{-x}$

1. (a) Montrer que l'équation d'inconnue réelle x, $e^{-x} = x$, admet une solution et une seule α.
(b) Vérifier que $\dfrac{1}{2} < \alpha < 1$. *On rappelle que* $e > 2$ *et* $\sqrt{e} < 2$.
2. (a) Calculer les dérivées partielles premières de la fonction f.
(b) Déterminer en fonction de α, le seul point critique de f, c'est-à-dire le seul couple de $\mathbb{R}^2$ en lequel f est susceptible de présenter un extremum.
3. (a) Calculer les dérivées partielles secondes de f.
(b) En déduire que f présente un extremum m en un unique point de $\mathbb{R}^2$. S'agit-il d'un minimum ou d'un maximum ?
(c) Exprimer en fonction de α la valeur exacte de cet extremum m.

Matrice d'une application linéaire

1 Pour s'entraîner

164 1. Justifier qu'il existe une unique application linéaire f de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^3$ telle que $f(1,0) = (1,2,3)$ et $f(0,1) = (2,1,3)$

2. Écrire la matrice de f dans les bases canoniques de $\mathbb{R}^2$ et $\mathbb{R}^3$.
3. Pour $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, calculer $f(x, y)$.
4. Déterminer le rang et le noyau de f.
   f est-elle injective ? surjective ? bijective?

165 Écrire la matrice M de l'application linéaire

$$\begin{array}{rccc} \Phi : & \mathbb{C}_3[X] & \longrightarrow & \mathbb{C}_2[X] \\ & P & \longmapsto & P(X+1)-P(X) \end{array}$$

relativement aux bases canoniques de $\mathbb{C}_3[X]$ et $\mathbb{C}_2[X]$.

Donner le rang de M. En déduire $\mathrm{Im}(\Phi)$ et $\mathrm{Ker}(\Phi)$.

166 Soit $\begin{array}{rccc} \varphi : & \mathbb{R}_3[X] & \longrightarrow & \mathbb{R}_3[X] \\ & P & \longmapsto & P-(X+1)P' \end{array}$

1. Vérifier que φ est un endomorphisme de $\mathbb{R}_3[X]$.
2. Montrer que $(1, (X+1), (X+1)^2, (X+1)^3)$ est une base de $\mathbb{R}_3[X]$.
3. Écrire la matrice de φ dans la base précédente.
4. En déduire l'image de φ, le rang de φ et le noyau de φ.

167 Soit $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ l'application linéaire dont la matrice dans la base canonique est :

$$M = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

1. Déterminer une base de $\mathrm{Ker} f$.
2. On pose $\varepsilon_1 = (1,0,-2)$; $\varepsilon_2 = (-1,2,3)$ et $\varepsilon_3 = (1,0,1)$
   (a) Montrer que la famille $\mathscr{B}' = (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3)$ est une base de $\mathbb{R}^3$.
   (b) Calculer la matrice de f dans cette nouvelle base $\mathscr{B}'$.

168 Soit $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ l'application linéaire définie par :

$$f((x,y,z)) = (z+y-x, x+z-y, x+y-z)$$

1. Écrire la matrice A de f dans la base canonique $\mathscr{B}$ de $\mathbb{R}^3$.
2. Déterminer la matrice de $f \circ f$ par les deux méthodes suivantes :
   a) en calculant les images par $f \circ f$ des vecteurs de la base canonique,
   b) en calculant le produit matriciel $A \cdot A$.
3. En déduire $(f \circ f)(x,y,z)$ pour tout $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$.
4. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. En donnant la matrice $J \in \mathfrak{M}_3(\mathbb{R})$ telle que $A = J - 2I_3$, exprimer A^n comme combinaison linéaire de I_3 et J.

169 Dans l'espace vectoriel $\mathbb{R}^3$ muni de sa base canonique $\mathscr{B} = (\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, \overrightarrow{e_3})$, on considère les trois vecteurs :

$$\overrightarrow{g_1} = (1,1,1) \qquad \overrightarrow{g_2} = (1,1,-1) \qquad \overrightarrow{g_3} = (1,-1,1)$$

1. Montrer que $\mathscr{C} = (\overrightarrow{g_1}, \overrightarrow{g_2}, \overrightarrow{g_3})$ est une base de $\mathbb{R}^3$.
2. On considère u l'application linéaire de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^3$ définie par les relations : $u(\overrightarrow{e_1}) = \overrightarrow{g_1}$ $\quad u(\overrightarrow{e_2}) = \overrightarrow{g_2}$ $\quad u(\overrightarrow{e_3}) = \overrightarrow{g_3}$
   (a) Expliciter la matrice M de u dans la base canonique $\mathscr{B}$.
   (b) Montrer que u est bijective.
3. Déterminer la matrice de $u^2 = u \circ u$ dans la base $\mathscr{B}$. Montrer que cette matrice est combinaison linéaire de M et I_3.
   En déduire une relation entre u, u^2 et $\mathrm{id}_{\mathbb{R}^3}$.
4. Exprimer u^{-1} comme combinaison linéaire de u et de $\mathrm{id}_{\mathbb{R}^3}$.

170 Soit $E=\mathbb{R}_2[X]$ muni de sa base canonique $\mathscr{B}_0=\left(1,X,X^2\right)$.

1. Démontrer que la famille $\mathscr{B}=\left((X-1)^2,(X-1)(X+1),(X+1)^2\right)$ est une base de E.
2. Donner la matrice de passage Q de la base canonique $\mathscr{B}_0$ vers la base $\mathscr{B}$.
3. Calculer Q^2. En déduire la matrice de passage de $\mathscr{B}$ à $\mathscr{B}_0$.
4. Déterminer les coordonnées du polynôme $1+X-X^2$ dans $\mathscr{B}$.

171 Soit $\mathbb{C}_2[X]$ l'espace vectoriel des polynômes à coefficients complexes, de degré inférieur ou égal à 2.
On considère l'application $\varphi:\begin{array}{ccc}\mathbb{C}_2[X] & \longrightarrow & \mathbb{C}_2[X]\\ P(X) & \longmapsto & P(X+1)-XP'(X)\end{array}$

1. Pour a, b et c complexes, calculer $\varphi(aX^2+bX+c)$.
2. Vérifier que φ est une application linéaire de $\mathbb{C}_2[X]$ dans $\mathbb{C}_2[X]$.
3. Déterminer une base du noyau de φ. En déduire le rang de φ.
4. Écrire la matrice de φ dans la base canonique $\mathscr{B}_0=(1,X,X^2)$ de $\mathbb{C}_2[X]$.

172 On note $E=\mathbb{R}_2[X]$ et $\mathscr{B}=\left(1,X,X^2\right)$ sa base canonique.
On note (e_1,e_2,e_3) la base canonique de $\mathbb{R}^3$.
On considère l'application $f:\begin{array}{ccc}E & \longrightarrow & \mathbb{R}^3\\ P & \longmapsto & (P(1),P(2),P(3))\end{array}$

1. Démontrer que f est un isomorphisme.
2. Pour chaque entier $i\in[\![1,3]\!]$, on pose $Q_i=f^{-1}(e_i)$.
   (a) Justifier que $\mathscr{B}'=(Q_1,Q_2,Q_3)$ est une base de E.
   (b) Soit P un polynôme de E. En remarquant que $P=f^{-1}\big(f(P)\big)$, déterminer les coordonnées de P dans la base $\mathscr{B}'$.
3. Dans la suite de l'exercice, on note M la matrice de passage de la base $\mathscr{B}$ à la base $\mathscr{B}'$.
   Expliciter M^{-1} en utilisant la question 2.(b).
4. (a) On rappelle que $f(Q_2)=e_2$.
   Donner les valeurs de $Q_2(1)$, $Q_2(2)$ et $Q_2(3)$.
   Calculer le polynôme $Q_2(X)$ sous forme développée.
   (b) Déterminer la matrice M.

173 Soit $f\in\mathscr{L}(\mathbb{R}^3)$ l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ canoniquement associé à la matrice

$$A=\begin{pmatrix}2&2&3\\-4&-7&-12\\2&4&7\end{pmatrix}$$

1. Calculer la matrice de $f\circ f$ dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$.
   Que peut-on en déduire pour $f\circ f$?
2. Montrer que $\quad \operatorname{Ker} f\cap\operatorname{Im} f=\left\{\overrightarrow{0}\right\}$.
3. Montrer que $\mathbb{R}^3=\operatorname{Ker} f\oplus\operatorname{Im} f$.
4. Proposer une base de $\operatorname{Ker} f$ et une base de $\operatorname{Im} f$.

174 On pose $B=\begin{pmatrix}1&-1&2\\0&1&0\\1&1&2\end{pmatrix}\in\mathfrak{M}_3(\mathbb{R})$ et on note g l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ canoniquement associé à B.
Déterminer le rang de g, $\operatorname{Im}(g)$, $\dim(\operatorname{Ker} g)$ et $\operatorname{Ker} g$.

175 Soit $N=\begin{pmatrix}0&1&2&-2\\1&2&-1&-4\end{pmatrix}\in\mathfrak{M}_{2,4}(\mathbb{R})$ et soit $\varphi\in\mathscr{L}(\mathbb{R}^4,\mathbb{R}^2)$ l'application linéaire canoniquement associée à N.

1. Déterminer le rang de φ. En déduire la dimension du noyau de φ.
2. Soit $t\in\mathbb{R}$ et $\overrightarrow{u}=(t,2t,t,t)\in\mathbb{R}^4$. Calculer $\varphi\left(\overrightarrow{u}\right)$.

176 Déterminer le rang de la matrice $M=\begin{pmatrix}1&2&-4&-2&-1\\0&-2&4&2&0\\1&1&-2&-1&1\end{pmatrix}$

177 On considère $f \in \mathscr{L}(\mathbb{R}^3)$ dont la matrice, dans la base canonique $\mathscr{B}_0$ de $\mathbb{R}^3$, est $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 0 \\ 4 & -1 & 2 \end{pmatrix}$. On donne les vecteurs :
$\overrightarrow{u_1} = (0,0,1)$; $\overrightarrow{u_2} = (0,1,1)$; $\overrightarrow{u_3} = (1,1,0)$.
On admet que $\mathscr{B}' = \left(\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_2}, \overrightarrow{u_3}\right)$ est une base de $\mathbb{R}^3$.

1. (a) Exprimer $f(\overrightarrow{u_1})$ en fonction de $\overrightarrow{u_1}$ et $f(\overrightarrow{u_2})$ en fonction de $\overrightarrow{u_2}$.
   (b) Calculer les coordonnées du vecteur $f(\overrightarrow{u_3})$ dans la base canonique $\mathscr{B}_0$ de $\mathbb{R}^3$.
   (c) Exprimer $f(\overrightarrow{u_3})$ comme combinaison linéaire de $\overrightarrow{u_2}$, $\overrightarrow{u_3}$.
2. (a) Donner la matrice de passage P de la base $\mathscr{B}_0$ vers $\mathscr{B}'$.
   (b) En déduire la matrice $T = P^{-1}AP$.

2 Pour approfondir

178 *Avec la formule du binôme.* Soient n un entier supérieur à 2 et φ l'endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$ défini par :

$$\forall P \in \mathbb{R}_n[X], \quad \varphi\big(P(X)\big) = P(X+1)$$

1. Écrire la matrice A de φ relativement à la base canonique de $\mathbb{R}_n[X]$. Justifier que A est inversible.
2. En utilisant la réciproque φ^{-1} de φ, déterminer l'inverse de A.

179 On note $E = \mathbb{R}_2[X]$ l'espace vectoriel réel des polynômes de degrés inférieurs ou égaux à 2. On désigne par $\mathscr{B} = (\mathbb{1}, X, X^2)$ la base canonique de E. Soit $L : E \longrightarrow \mathbb{R}$ l'application linéaire définie par :

$$\forall P \in E, \quad L(P) = \int_{-1}^{1} P(t)\,\mathrm{d}t$$

1. Calculer $L(\mathbb{1})$, $L(X)$ et $L(X^2)$.
2. Déterminer la dimension de $\mathrm{Ker}(L)$. Proposer une base $\mathscr{U}$ de $\mathrm{Ker}(L)$ dont le premier vecteur est X.
3. Montrer que $E = \mathrm{Vect}(\mathbb{1}) \oplus \mathrm{Ker}(L)$.
4. Soit k un nombre réel. On considère l'application $T_k : E \longrightarrow E$ définie par :
$$\forall P \in E, \quad T_k(P) = P + k\,L(P)\,X$$
   (a) Vérifier que T_k est un endomorphisme de E.
   (b) Déterminer la matrice M_k de T_k dans une base $(1, \mathscr{U})$ de E adaptée à la décomposition des questions 2. et 3.
   (c) Justifier que l'application T_k est bijective.
5. (a) Calculer $(L \circ T_k)(P)$ pour $P \in E$.
   (b) Pour tous réels a et b, simplifier $T_a \circ T_b$. Déterminer T_k^{-1}.

180 $\mathscr{B} = (e_1, e_2, e_3)$ désigne la base canonique de $\mathbb{R}^3$.
Soit $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ l'endomorphisme défini par

$$\forall (x,y,z) \in \mathbb{R}^3, \quad f(x,y,z) = \big(2x+y-z\,,\, 3x+y-3z\,,\, 4x+y-3z\big)$$

1. Donner la matrice A de f relativement à la base $\mathscr{B}$.
2. On considère les vecteurs : $u_1 = e_2 + e_3$, $u_2 = e_1 + e_3$ et $u_3 = e_2$.
   (a) Montrer que $\mathscr{B}' = (u_1, u_2, u_3)$ est une base de $\mathbb{R}^3$.
   (b) Donner la matrice de passage P de la base $\mathscr{B}$ vers la base $\mathscr{B}'$.
3. (a) Exprimer $f(u_3)$ comme combinaison linéaire de u_2 et u_3.
   (b) Écrire la matrice T de f dans la base $\mathscr{B}'$.
   (c) Que vaut $P^{-1}AP$?
4. (a) À l'aide d'une calculatrice, donner T^2, T^3 et T^4.
   (b) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Expliciter T^n.
   (c) ⋆ En déduire les 9 coefficients de A^n en fonction de n.

3 Avec Python

181 *On importera le module Sympy :* `from sympy import *`
On utilisera : `def`, `return`, `expand`, `diff`, `Matrix`, `rank()`, `transpose()`

On note $E = \mathbb{R}_2[X]$ le $\mathbb{R}-$espace vectoriel des polynômes à coefficients réels, de degré inférieur ou égal à 2. On considère l'application g définie sur E par :

$$\forall P \in E, \quad g(P) = (2X+1)P + (1-X^2)P'$$

1. Calculer $g(\mathbb{1})$, $g(X)$ et $g(X^2)$.
2. Vérifier que g est un endomorphisme de E.
   Cette question ne fera pas intervenir PYTHON.
3. Écrire la matrice A de g relativement à la base canonique $\mathscr{B} = (\mathbb{1}, X, X^2)$ de E.
4. Donner le rang de g. g est-il un isomorphisme de E sur E ?
5. (a) Donner la matrice de g^{-1} dans la base $\mathscr{B}$.
   (b) On pose $P = 7X^2 + 2X - 3$.
   Déterminer, à l'aide d'un produit matriciel, le polynôme $g^{-1}(P)$.

4 Pour travailler seul

182 *Final 2021.* On note $E = \mathbb{R}_3[X]$ l'espace vectoriel réel des polynômes de degré inférieur ou égal à 3. On considère l'application

$$\varphi : \begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & E \\ P & \longmapsto & P'' - \dfrac{1}{3}XP' + P. \end{array}$$

1. Donner sans justification la dimension de E. Prouver que φ est une application linéaire.
2. (a) Écrire la matrice A de φ dans la base canonique $\mathscr{B} = (1, X, X^2, X^3)$
   (b) Calculer le rang de A. En déduire la dimension du noyau de φ.
   (c) Exprimer $\varphi(X^3)$ en fonction de $\varphi(X)$. En déduire une base de $\operatorname{Ker}\varphi$.

183 E désigne un espace vectoriel sur $\mathbb{C}$ de dimension 3, rapporté à une base $\mathscr{B} = (e_1, e_2, e_3)$. Pour tout nombre complexe k, on considère l'endomorphisme f de E défini par :

$$f(e_2) = 0 \qquad \text{et} \qquad f(e_1) = f(e_3) = k\, e_1 + e_2 - k\, e_3$$

1. Calculer $f(e_1 + i\, e_2 - e_3)$.
2. (a) Déterminer une base de $\operatorname{Im} f$ et donner le rang de f.
   (b) En déduire la dimension du noyau de f et montrer que $\operatorname{Ker} f = \operatorname{Vect}(e_2, e_1 - e_3)$.
3. Écrire la matrice A de f dans $\mathscr{B}$ et calculer A^2.
   En déduire sans calcul $f \circ f$.
4. On pose $e'_1 = f(e_1)$, $e'_2 = e_1 - e_3$ et $e'_3 = e_3$
   (a) Montrer que (e'_1, e'_2, e'_3) est une base de E.
   (b) Donner la matrice A' de f dans cette base.
5. Pour tout complexe z non nul, on pose $B(z) = A - zI$,
   I désignant la matrice identité de $\mathfrak{M}_3(\mathbb{C})$.
   (a) Calculer $(A - zI)(A + zI)$. En déduire que $B(z)$ est inversible puis écrire $(B(z))^{-1}$ en fonction de z, I et A.
   (b) Pour tout n de $\mathbb{N}^*$, déterminer $(B(z))^n$ en fonction de z, n, I et A.

184 *Final 2018.* On note $\mathscr{B} = (e_1, e_2, e_3)$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$.
On considère l'endomorphisme f de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base $\mathscr{B}$ est :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -2 & -5 \\ -2 & 0 & 4 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

On pose enfin $\quad u = e_1 - e_2 = (1, -1, 0) \quad$ et $\quad w = e_1 + f(e_1)$

1. (a) Calculer le vecteur w.
   (b) Démontrer que la famille $\mathscr{C} = (u, w, e_1)$ est une base de $\mathbb{R}^3$.
   (c) Expliciter la matrice P de passage de la base $\mathscr{B}$ vers la base $\mathscr{C}$.
2. (a) Déterminer la matrice T de f dans la base $\mathscr{C}$.
   (b) L'endomorphisme f est-il bijectif ?
   (c) Donner sans justification, le lien entre les matrices T, A, P et P^{-1}.
3. Le but de la fin de l'exercice est de trouver une matrice carrée $X_0 \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ vérifiant l'égalité : $X_0^2 - 2X_0 - I_3 = A$.
   Soit X une matrice carrée de $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$. On pose $Y = P^{-1}XP$.

(a) Vérifier que $Y^2 = P^{-1}X^2P$.

(b) Montrer que si Y vérifie l'équation $(\star)$: $Y^2 - 2Y - I_3 = T$
alors X vérifie $X^2 - 2X - I_3 = A$.

4. (a) Déterminer la matrice $Y_0 = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & c \\ 0 & 0 & b \end{pmatrix}$ vérifiant l'équation $(\star)$ et dont les coefficients diagonaux sont strictement positifs.

(b) En déduire une matrice X_0 solution de $X^2 - 2X - I_3 = A$.
On exprimera X_0 à l'aide de P et de P^{-1} sans chercher à calculer les 9 coefficients de la matrice X_0.