Éléments de logique

1 Pour s'entraîner

1 Étant données P, Q et R trois assertions, vérifier en dressant les tables de vérité que

$$[P \text{ ou } (Q \text{ et } R)] \quad \text{est synonyme de} \quad [(P \text{ ou } Q) \text{ et } (P \text{ ou } R)]$$

2 $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ désigne une suite de nombres réels.
Associer à chaque phrase de la première liste, sa traduction mathématique.

1. $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée.
2. $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente, de limite zéro.
3. $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est strictement croissante.

(a) $\forall n\in\mathbb{N},\ u_{n+1} > u_n$

(b) $\forall \varepsilon>0,\ \exists N_0\in\mathbb{N}\,;\ \forall n\in\mathbb{N},\ (n\geqslant N_0 \Longrightarrow |u_n|<\varepsilon)$

(c) $\exists k\in\mathbb{R}^+\,;\ \forall n\in\mathbb{N},\ |u_n|\leqslant k$

(d) $\forall n\in\mathbb{N},\ \exists M\in\mathbb{R}^+\,;\ -M\leqslant u_n\leqslant M$

Phrase n°	1.	2.	3.
Traduction			

3 Soit f une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Traduire en termes de quantificateurs les expressions suivantes :

1. f est négative,
2. f est impaire,
3. f n'est pas la fonction nulle,
4. f est majorée,
5. f est bornée,
6. f s'annule une seule fois,
7. f est croissante sur $\mathbb{R}$,
8. f atteint toutes les valeurs de $\mathbb{N}$.
9. f est périodique.

4 Soit f une fonction définie sur un intervalle I à valeurs réelles.
Exprimer par une phrase en français chacune des assertions suivantes

1. $\exists c\in\mathbb{R}\,;\ \forall x\in I,\ f(x)=c$
2. $\forall a\in I,\ \forall b\in I,\ \big(a<b \Longrightarrow f(a)>f(b)\big)$
3. Dans le cas où $I=\mathbb{R}$: $\forall x\in\mathbb{R},\ f(x+1)=f(x)$
4. $\forall x\in I,\ \big(f(x)=0 \Longrightarrow x=0\big)$

5 Soit I un intervalle non vide de $\mathbb{R}$ et $f : I\to\mathbb{R}$ une fonction à valeurs réelles définie sur I. Écrire la négation de chacune des assertions suivantes :

1. $\forall x\in I,\ f(x)\neq 0$
2. $\forall y\in\mathbb{R},\ \exists x\in I\,;\ y=f(x)$
3. $\exists M\in\mathbb{R}^+\,;\ \forall x\in I,\ |f(x)|\leqslant M$
4. $\forall x\in I,\ \big(f(x)>0 \Longrightarrow x\leqslant 0\big)$

6

1. Si P et Q sont deux assertions logiques, rappeler la négation et la contraposée de $P\Rightarrow Q$.
2. On se donne deux nombres réels a et b.
   On considère l'implication $(\star)$ suivante :
   $$\big(\exists k\in\mathbb{Z}\,;\ a=b+2k\pi\big) \Longrightarrow \sin(a)=\sin(b)$$
   Cette implication $(\star)$ est-elle vraie ?
   Écrire la contraposée de l'implication $(\star)$.
   Écrire la négation de l'implication $(\star)$.
   Écrire la réciproque de l'implication $(\star)$.
   Cette réciproque est-elle vraie ? Pourquoi ?

7 On considère l'assertion (P) suivante :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \left(x^2 \geqslant 5 \Longrightarrow x \geqslant \sqrt{5}\right)$$

Écrire la négation de (P). (P) est-elle vraie ? Justifier la réponse.

8 Pour chacune des assertions suivantes, donner sa négation et dire ensuite, en justifiant la réponse, si elle est vraie ou fausse.

- P_1 : $\exists x \in \mathbb{R}, \, x^2 + x + 1 \leqslant 0$
- P_2 : $\forall x \in \mathbb{R}, \, x^2 \geqslant x$
- P_3 : $\forall x \in \mathbb{R}, \, (x+1)^3 = x^3 + 3x^2 + 3x + 1$
- P_4 : La suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$, définie par $u_n = 3 \times (-2)^n$, est décroissante.
- P_5 : $\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \left(n \geqslant N \Longrightarrow \frac{1}{n} < \varepsilon\right)$

2 Pour approfondir

9 *Disjonction des cas.* n désigne un entier naturel.
Démontrer, par disjonction des cas, que $n^3 - n$ est divisible par 3.
On discutera en distinguant les restes de la division euclidienne de n par 3.

10 *Raisonnement par contraposée.* Soit n un entier naturel non nul.

- Rappeler la définition d'un nombre premier.
- Démontrer que, si $2^n - 1$ est un nombre premier, alors n est un nombre premier.

11 *Raisonnement par analyse/synthèse* .
On cherche à déterminer toutes les fonctions f définies sur $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{R}$ telles que

$$\forall x \in \mathbb{R}, \, \forall y \in \mathbb{R}, \quad f(x)f(y) - f(xy) = x + y$$

1. On suppose qu'une telle fonction f existe. Prouver que $f(0) = 1$.
2. En déduire l'expression de $f(x)$.
3. Conclure.

12 *Raisonnement par récurrence* .
Démontrer que pour tout entier naturel non nul n,

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + (n-1)^2 + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

3 TP sous Maxima

13 Exécuter les deux programmes suivants. Pourquoi donnent-ils des résultats différents ?

```
--> n :1$ s :0$ while s<10 do (s :s+n , n :n+1) ;
--> print("n=",n," et s=",s) ;

--> n :1$ s :0$ while s<10 do (n :n+1 , s :s+n) ;
--> print("n=",n," et s=",s) ;
```

14 *On utilisera :* `not`, `and`, `or`, `true`, `false`

Créer une fonction `prop(A,B)` qui, à tout couple d'assertions A et B associe l'assertion :

$$\text{non}(A \text{ et } B) \text{ ou } ((\text{non } A) \text{ et } (\text{non } B))$$

Que vaut `prop(A,B)` lorsque A est vraie et B est fausse ?

4 Pour travailler seul

15 Soit les quatre assertions suivantes :

(P_1) $\exists x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R}, \quad x + y > 0$ – (P_2) $\forall x \in \mathbb{R}, \exists y \in \mathbb{R}; \quad x + y > 0$

(P_3) $\forall x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R}, \quad x + y > 0$ – (P_4) $\exists x \in \mathbb{R}; \forall y \in \mathbb{R}, \quad y^2 > x$.

1. Les assertions P_i sont-elles vraies ou fausses ?
2. Donner leur négation.

Calculs dans $\mathbb{R}$

1 Pour s'entraîner

16 Encadrer $x+y$, $x-y$, xy et $\dfrac{x}{y}$
sachant que $2 \leqslant x \leqslant 3$ et $-6 \leqslant y \leqslant -2$.

17 Soient a, b et c des nombres réels positifs.
Démontrer les inégalités suivantes :

(i) $\dfrac{a+b}{2} \geqslant \sqrt{ab}$. En déduire que $(a+b)(b+c)(a+c) \geqslant 8abc$.

(ii) si $a > 0$ alors $a + \dfrac{1}{a} \geqslant 2$.

(iii) si $0 \leqslant a \leqslant 1$ alors $a(1-a) \leqslant \dfrac{1}{4}$.

(iv) si $a > 0$ et si $b > 0$ alors $\sqrt{a+b} < \sqrt{a} + \sqrt{b}$

(v) $a^2 + b^2 + c^2 \geqslant ab + ac + bc$.

18 Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation (E) d'inconnue x : $|2x+3| - |4-x| = -2$
en complétant le tableau ci-dessous.

x	$-\infty$	4	$+\infty$
$\lvert 2x+3\rvert = \ldots$			
$\lvert 4-x\rvert = \ldots$			
$(E) \iff \ldots$			

19 Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes :

(E_1) : $3x^4 + 5x^2 - 2 = 0$ (E_2) : $|x-5| = 2\,|x+5|$

(E_3) : $|2x-1| + |x+4| = 7$ (E_4) : $\left|x - 8x\sqrt{x} + 11\right| = 4$

(E_5) : $4x + 2 = \sqrt{3-2x}$ (E_6) : $3 + \sqrt{2x+7} = 17 - x$

20 Résoudre dans $\mathbb{R}$ les inéquations suivantes :

(a) $\dfrac{x}{x-4} \geqslant \dfrac{1}{x+5}$

(b) $x^3 + 5x \leqslant 6x^2$

(c) $|5-x| \leqslant 2$

(d) $\left|1 - 2x^2\right| \geqslant 3$

(e) $x + 1 < \sqrt{x+2}$

(f) $|x+2| \geqslant \dfrac{1-x}{1+x}$

(g) $(5 - \lfloor x \rfloor)(5 - x^2)\,|5 - 2x| > 0$

21 Déterminer les longueurs des côtés d'un triangle rectangle dont l'aire est de 60 cm^2 et le périmètre de 40 cm.

22 Soit x un nombre réel supérieur ou égal à 1. Simplifier l'expression

$$\sqrt{x + 2\sqrt{x-1}} + \sqrt{x - 2\sqrt{x-1}}$$

23 Soit x un nombre réel.
En discutant suivant la parité de l'entier $\lfloor x \rfloor$, montrer que

$$\left\lfloor \frac{x}{2} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{x+1}{2} \right\rfloor = \lfloor x \rfloor$$

24 Démontrer que, pour tous réels x et y,

$$\lfloor x \rfloor + \lfloor y \rfloor \leqslant \lfloor x+y \rfloor$$

25 Résoudre dans $[0, 2\pi[$ les inéquations trigonométriques :

$$\cos x \geqslant 0 \quad ; \quad 1 + 2\sin x < 0 \quad ; \quad 2\cos x \geqslant \sqrt{3}$$
$$2\sin^2 x > 1 \quad ; \quad 2\sin^2 x - 5\sin x + 2 > 0$$

26 En remarquant que $\frac{\pi}{12} = \frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4}$, calculer les valeurs exactes de :

$$\sin\frac{\pi}{12}, \cos\frac{\pi}{12}, \tan\frac{\pi}{12} \text{ et } \tan\frac{5\pi}{12}$$

27 On se donne un nombre réel a tel que $\pi \leqslant a \leqslant 3\pi$.

1. Donner le signe de $\cos\left(\frac{a}{2}\right)$
2. Exprimer $\cos\left(\frac{a}{2}\right)$ en fonction de $\cos a$.

28 Résoudre dans $\mathbb{R}$ chacune des équations suivantes, et placer sur le cercle trigonométrique les points associés aux solutions.

(a) $\sin x = \frac{1}{2}$

(b) $\sin(2x) = \cos x$

(c) $\tan x = -\sqrt{3}$

(d) $2\sin^2 x = 1$

(e) $\tan(5x) = \tan x$

(f) $4\sin x \cos x = 1$

(g) $2(\cos^2 x - \sin^2 x) = \sqrt{2}$

(h) $1 + \sin x - 2\sin^2 x = 0$

(i) $\sin^2 x + 3\cos x + \frac{3}{4} = 0$

(j) $\cos^4 x - \sin^4 x = \frac{1}{2}$

(k) $2\cos^2 x + 3\cos x + 1 = 0$

29 Soit n un entier supérieur à 2 et x un nombre réel. Écrire les sommes suivantes avec le symbole $\sum$ ou le symbole $\prod$:

$$\begin{aligned}
A_n &= 2^5 + 3^5 + 4^5 + \cdots + n^5 \\
B_n &= 2 \times 4 \times 6 \times \cdots \times (2n-2) \times (2n) \\
C_n(x) &= 1 - x + x^2 - x^3 + \cdots + (-1)^n x^n \\
D &= \left(1 - \frac{1}{3}\right)\left(1 - \frac{1}{3^3}\right)\left(1 - \frac{1}{3^5}\right) \times \cdots \times \left(1 - \frac{1}{3^{101}}\right)
\end{aligned}$$

30 On pose $y = \sum_{k=1}^{1023} \ln\left(\frac{k+1}{k}\right)$.

Simplifier y et calculer sa partie entière.

31 Soit n un entier naturel non nul. Expliciter les expressions suivantes sans utiliser les symboles $\sum$ et $\prod$:

1) $\sum_{k=0}^{n-1} (2k+1)$

2) $\sum_{k=0}^{n} 2^{2k}$

3) $\sum_{i=0}^{n} \frac{2^i}{3^{2i-1}}$

4) $\sum_{k=1}^{n} \left(k - \frac{2}{5^k}\right)$

5) $\sum_{k=n}^{2n} \sqrt{3^k}$

6) $\prod_{k=1}^{n} \left(1 + \frac{1}{k}\right)$

7) $\prod_{j=1}^{n} x^j$ où $x \in \mathbb{R}$.

8) $\prod_{k=2}^{n} \left(1 - \frac{1}{k^2}\right)$ où $n \geqslant 2$.

9) $\sum_{k=0}^{2n} |k - n|$

32 Montrer, sans raisonner par récurrence, que pour tout entier naturel n,

$$\prod_{k=0}^{n} (2k+1) = \frac{(2n+1)!}{n!\,2^n}$$

33 Montrer que pour tout entier naturel n non nul,

$$\sum_{k=1}^{2n} \frac{(-1)^{k+1}}{k} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n+k}$$

34 1. Que peut-on dire de $\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}$ et de $\frac{1}{k(k+1)}$ lorsque k est un entier naturel non nul ?
Calculer alors $\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k(k+1)}$.

2. Par une méthode analogue, simplifier la somme : $\sum_{k=1}^{n} k\,k!$.

35 Soit n un entier naturel non nul.

1. Pour k entier, développer la différence : $(k+1)^3-k^3$.
2. En déduire (sans raisonner par récurrence) la somme : $\sum_{k=1}^{n} k^2$.
3. Calculer : $1\times 2+2\times 3+3\times 4+\cdots+n\times(n+1)$.

36

1. Soient a et b deux réels. En appliquant la formule du binôme, développer $(a-b)^{12}$.
2. Déterminer le coefficient de x^3 dans le développement de l'expression $\left(2-\frac{x}{2}\right)^{12}$

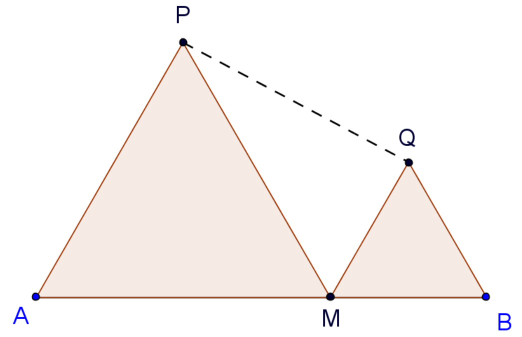
37 Soit $n\in\mathbb{N}^*$. Calculer les sommes suivantes avec la formule du binôme :

$$\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k} \quad ; \quad \sum_{k=0}^{n}(-1)^k\binom{n}{k} \quad ; \quad \sum_{j=1}^{2n}3^j\binom{2n}{j} \quad ; \quad \sum_{k=0}^{n-1}\frac{\binom{n}{k}}{3^k}$$

2 Pour approfondir

38 On pose $a=\sqrt[3]{7+5\sqrt{2}}+\sqrt[3]{7-5\sqrt{2}}$.
Calculer a^3 en fonction de a. En déduire que a est un nombre entier.

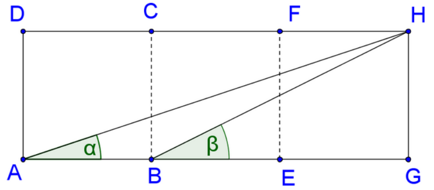
39 *Aire d'un triangle équilatéral* .
À tout point mobile M du segment $[AB]$, on associe les triangles équilatéraux directs AMP et BQM.
Déterminer la position du point M pour que l'aire du quadrilatère $ABQP$ soit minimale.



40 Soit $f:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$ la fonction périodique, de période 2 telle que pour tout réel $x\in]-1,1]$, $f(x)=|x|$.

1. Représenter graphiquement la fonction f.
2. Soit x un réel quelconque. Exprimer $f(x)$ en fonction de x avec le symbole de la partie entière $\lfloor . \rfloor$

41 On considère 3 carrés disposés comme l'indique la figure ci-dessous. Calculer $\cos(\alpha+\beta)$. Que vaut la somme des angles α et β ?



42 L'objectif de cet exercice est d'établir une formule sommatoire pour la somme $\sum_{k=1}^{n} k\,x^{k-1}$ où n désigne un entier naturel non nul et x un nombre réel différent de 1.

1. Développer puis simplifier l'expression $(1-x)\sum_{k=1}^{n} k\,x^{k-1}$.

   En déduire $\sum_{k=1}^{n} k\,x^{k-1}$.
2. Soit n un entier naturel non nul fixé. On pose pour tout réel $x \neq 1$, $f_n(x) = \sum_{k=0}^{n} x^k$
   Justifier que f_n est dérivable sur $\mathbb{R}\setminus\{1\}$.
   Calculer de deux façons différentes $f_n'(x)$.
   Expliciter $\sum_{k=1}^{n} k\,x^{k-1}$.
3. *Application* : déterminer $\lim\limits_{n\longrightarrow+\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{k}{3^k}$

43 Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

1. Démontrer que $\forall k \in [\![1, n]\!]$, $k\binom{n}{k} = n\binom{n-1}{k-1}$
2. Simplifier la somme $\sum_{k=0}^{n} k\binom{n}{k}$

3 TP sous Maxima

44 *On utilisera :* `float, is`

1. Définir la variable a égale à $\left(20+14\sqrt{2}\right)^{\frac{1}{3}} + \left(20-14\sqrt{2}\right)^{\frac{1}{3}}$
2. Évaluer numériquement a. À quel entier a semble-t-il être égal ?
3. Tester cette hypothèse à l'aide de l'instruction `is(...)`.

45 Donner la 149-ème décimale du nombre π en utilisant `fpprec` et `bfloat`.

46 *On utilisera :* `abs, plot2d, solve`

Résoudre graphiquement l'inéquation : $2\,|x+1| - |5x-2| \leqslant 1$.

4 Pour travailler seul

47 Résoudre dans $\mathbb{R}$, $|2-x| + |x+5| = 7$ et $|2x-1| - 2|4x+2| + |x+3| = 2$.

48 On se propose dans cet exercice, de résoudre l'équation (E) : $x^3 = 3x+1$

1. Avec le logiciel MAXIMA, tracer la courbe représentative de la fonction $f : x \longmapsto x^3$ ainsi que la droite d'équation $y = 3x+1$. Conjecturer le nombre de solutions de l'équation (E).
2. On admet que l'équation (E) a trois solutions que l'on notera a, b et c avec $a < b < c$.
   À l'aide du logiciel, proposer des valeurs approchées à 10^{-3} près de a, b et c.
3. (a) Exprimer $\sin(3t)$ en fonction de $\sin t$ pour un réel t quelconque.
   (b) Prouver que si α est un réel appartenant à $[-2;2]$ alors il existe un réel t appartenant à $\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$ tel que $\alpha = 2\sin t$.
   (c) En déduire que si α est une solution de (E) alors il existe un réel $t \in \left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$ tel que $\begin{cases} \alpha = 2\sin t \\ 1+2\sin(3t) = 0 \end{cases}$
4. Déterminer les valeurs exactes des trois solutions a, b et c de (E).

Ensembles et applications

1 Pour s'entraîner

49 Soient E un ensemble non vide et a un élément de E.
Expliciter l'ensemble $\mathscr{P}\big(\mathscr{P}(\{a\})\big)$.

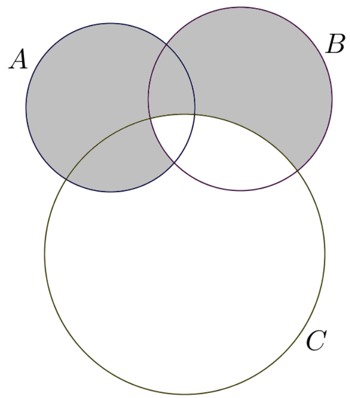
50 Soient E un ensemble non vide et a un élément de E. Peut-on écrire

(1) $a \subset E$ (2) $a \in E$ (3) $\{a\} \subset E$ (4) $\{a\} \in \mathscr{P}(E)$

(5) $\emptyset \subset E$ (6) $\emptyset \in E$ (7) $\{\emptyset\} \subset E$ (8) $\{\emptyset\} \subset \mathscr{P}(E)$?

51 On considère trois parties A, B et C d'un même ensemble E, représentées ci-dessous.

1. Exprimer l'ensemble représenté par la partie grisée en fonction de A, $\overline{A}$, B, $\overline{B}$, C, $\overline{C}$ et des symboles $\cap$, $\cup$.
2. Hachurer sur la figure la partie $\overline{A} \cap B \cap C$.



52 Étant données A, B et C trois parties d'un ensemble E, démontrer l'équivalence suivante :

$$A = B \iff A \cap B = A \cup B$$

53 On considère les quatre parties de $\mathbb{N}$ suivantes :

$$A = \{n \in \mathbb{N} \mid (\exists k \in \mathbb{N}\,;\, n = 3k)\} \qquad B = \{n \in \mathbb{N} \mid (\exists k \in \mathbb{N}\,;\, n = 12k)\}$$

$$C = \{n \in \mathbb{N} \mid (\exists k \in \mathbb{N}\,;\, n = 15k)\} \qquad D = \{n \in \mathbb{N} \mid n \leqslant 100\}$$

1. Définir chaque ensemble précédent à l'aide d'une phrase en français.
2. Donner la liste des éléments de $B \cap D$.
3. Déterminer $A \cup B \cup C$.
4. Déterminer $A \cap B \cap C$ et donner la liste des éléments de $D \cap B \cap C$

54 Un sondage effectué auprès de 150 personnes a donné les résultats suivants :
À la question «consommez-vous régulièrement de l'alcool ?», 50 personnes répondent oui.
À la question «êtes-vous fumeur ?», 80 personnes répondent oui.
À la question «êtes-vous un fumeur qui consomme régulièrement de l'alcool ?», 35 personnes répondent oui.
Combien de personnes ne sont pas fumeurs et ne consomment pas régulièrement de l'alcool ?

55 Soient E un ensemble et f une application de $\mathscr{P}(E)$ à valeurs dans $\mathbb{R}$ telle que pour toutes parties disjointes X et Y de E,

$$(\star) \qquad f(X \cup Y) = f(X) + f(Y)$$

1. Calculer $f(\emptyset)$.
2. Montrer que si A et D sont deux parties de E telles que $D \subset A$, alors $f(A \setminus D) = f(A) - f(D)$.
3. Soient A et B deux parties quelconques de E. En écrivant $A \cup B$ comme la réunion de deux parties disjointes de E, déduire de l'égalité $(\star)$ et de la question précédente que :

$$f(A \cup B) = f(A) + f(B) - f(A \cap B)$$

56 On considère les fonctions $f: \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \exp(x) \end{array}$ et $g: \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & x^2 \end{array}$

Donner les images par f et par g de l'intervalle $[-1, 2]$.

57 Les applications suivantes sont-elles bijectives ? Justifier.

1. $f: \begin{array}{ccc} \mathbb{N} & \longrightarrow & \mathbb{N} \\ n & \longmapsto & n+1 \end{array}$
2. $g: \begin{array}{ccc} \mathbb{Z} & \longrightarrow & \mathbb{Z} \\ n & \longmapsto & n+1 \end{array}$
3. $h: \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ (x, y) & \longmapsto & (x+y, x-y) \end{array}$
4. $\varphi: \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ (x, y) & \longmapsto & (x+y, xy) \end{array}$

58 Dire si les applications suivantes sont bijectives. Le cas échéant, déterminer la bijection réciproque.

$f: \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ (x, y) & \longmapsto & (2x-y, x+y) \end{array}$ $\qquad g: \begin{array}{ccc} \mathbb{C} & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ z & \longmapsto & \sqrt{2}\,\overline{z} + iz \end{array}$

$\varphi: \begin{array}{ccc} \mathscr{P}(\mathbb{N}) & \longrightarrow & \mathscr{P}(\mathbb{N}) \\ X & \longmapsto & A \cup X \end{array}$ où A est une partie non vide de $\mathbb{N}$

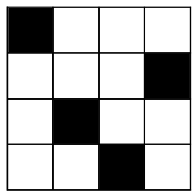
Pour l'application g, on pourra simplifier $(g \circ g)(z)$.

59 On considère l'application $f: \begin{array}{ccc} [2, +\infty[& \longrightarrow & [2, +\infty[\\ x & \longmapsto & \sqrt{x^2 - 4x + 8} \end{array}$

Montrer que f est bijective de $[2, +\infty[$ sur $[2, +\infty[$ et expliciter sa réciproque f^{-1}.

60 *Dénombrements élémentaires* .

1. De combien de façons différentes peut-on régler une somme de 100€ en payant avec des billets de 10€, 20€ et 50€ ?
2. Combien existe-t-il de nombres entiers naturels de 4 chiffres où le chiffre 9 figure une fois et une seule ?
3. On dispose de dix jetons numérotés de 1 à 10 et on en extrait simultanément trois pour former un «paquet». Combien de «paquets» contenant au moins un jeton ayant un numéro pair peut-on ainsi former ?
4. Un damier carré comporte 16 cases. On dispose de 4 jetons identiques que l'on place chacun sur une case du damier.
   (a) De combien de manières différentes peut-on placer les 4 jetons sur les 16 cases ?
   (b) De combien de manières peut-on placer les 4 jetons sachant qu'il doit y avoir un jeton et un seul sur chaque ligne et chaque colonne ?



5. Quel est le nombre d'anagrammes (ayant un sens ou non) du mot PERFIDE ?
6. $\star$ On doit ranger 6 chemises identiques dans 4 tiroirs distincts. Quel est le nombre de rangements différents ?

61 On pose $E = \{1,2,3\}$ et $F = \{1,2,3,4,5\}$

1. Quel est le nombre de sous-ensembles de F ?
2. Quel est le nombre d'applications de E dans F ?
3. Quel est le nombre de bijections de E sur E ?
4. Quel est le nombre d'applications strictement croissantes de E dans F ?

62 *Le jeu du poker.* Le poker peut se jouer avec un jeu de 32 cartes et chaque joueur reçoit une «main» de 5 cartes.
Combien existe-t-il de mains différentes contenant :

1. le carré d'as (c'est-à-dire les 4 as) ?
2. deux paires ?
3. au moins un roi ?

63 Soit n un entier supérieur à 3. On place n points sur un même cercle. Il définissent un polygone convexe de n côtés.

Quel est le nombre de côtés de ce polygone ?
quel est le nombre de ses diagonales ?

2 Pour approfondir

64 Soit $f : E \longrightarrow F$ une application. Soient A et B deux parties de E.
Démontrer que :

1. $f(A \cup B) = f(A) \cup f(B)$
2. $f(A \cap B) \subset f(A) \cap f(B)$

65 On pose pour tout entier naturel n, $\quad u_n = \dfrac{\binom{2n}{n}}{4^n}$

1. Calculer u_0, u_1 et u_2 .
2. Soit $n \in \mathbb{N}$. En utilisant l'écriture en factorielles des coefficients binomiaux, prouver que
$$u_{n+1} = \frac{2n+1}{2n+2} u_n$$
3. Démontrer que, pour tout entier naturel n non nul,
$$\frac{1}{4n} \leqslant u_n^2 \leqslant \frac{1}{2n+1}$$
4. En déduire un encadrement de $\sqrt{n}\, u_n$ par deux constantes réelles indépendantes de n.

66 Soit n un entier naturel non nul.

1. Vérifier que $\forall k \in [\![1, n]\!],\ k\binom{n}{k} = n\binom{n-1}{k-1}$
2. Soit E un ensemble fini cardinal n. Calculer
$$\sum_{X \in \mathcal{P}(E)} \mathrm{Card}(X)$$

67 Soit E un ensemble fini de cardinal n ($n \in \mathbb{N}^*$).

1. Déterminer le nombre de couples (A,B) de parties de E vérifiant $B \subset A$.
Indication : discuter suivant le nombre d'éléments de A, et déterminer le nombre de parties B possibles dans chaque cas où A est fixé.
2. Par un rasionnnement analogue, déterminer le nombre de couples (A,B) de parties de E vérifiant $A \cap B = \emptyset$.

3 TP sous Maxima

68 *On utilisera :* `divisors, intersection, gcd, cardinality.`

On pose $a = 2460$ et $b = 3030$.

1. Créer l'ensemble $\mathscr{D}_1$ des diviseurs positifs de a et l'ensemble $\mathscr{D}_2$ des diviseurs positifs de b.
2. En déduire l'ensemble $\mathscr{D}$ des diviseurs positifs communs à a et b en utilisant la fonction `intersection`.
3. Quel est le plus grand diviseur positif commun aux entiers a et b ?

69 *On utilisera :* `setdifference, union, intersection, divisors, for..from...thru...do, prev_prime, cardinality.`

1. Construire une fonction f qui, à tout couple d'ensembles (A, B) associe leur différence symétrique $A\Delta B = (A\cup B)\setminus(A\cap B)$.
   Montrer que $A\Delta B = (A\cap\overline{B})\cup(B\cap\overline{A})$.
2. Donner l'ensemble E des diviseurs positifs de 2023.
3. Créer l'ensemble F des nombres premiers qui sont inférieurs à 2022 et donner le cardinal de F.
4. En déduire $E\cap F$ et le cardinal de $E\Delta F$.

4 Pour travailler seul

70 Écrire en extension chacun des ensembles suivants :

1. $E = \{n\in\mathbb{N} \mid n^2 = 5\}$
2. $F = \{x\in\mathbb{R} \mid x^2 = 5\}$
3. $G = \{x\in\mathbb{R} \mid x^2 = 1 + x\}$
4. H est l'ensemble des couples d'entiers (i, j) tels que $\begin{cases} 1\leqslant i\leqslant 6\\ 1\leqslant j\leqslant 6\\ i+j=10\end{cases}$

71 Décrire en compréhension (c.à.d. par la donnée d'une propriété caractéristique des éléments) chacun des ensembles suivants :

1. $E = \{1, 3, 5, 7, 9, \dots\}$
2. $F = \{1, 10, 100, 1000, 10000, \dots\}$
3. $G =]-\infty;-4]\cup[4;+\infty[$

72 *QCM.* Pour chacune des six questions suivantes, une seule des quatre propositions est exacte.

1. Pour toutes parties A et B d'un ensemble E, $A\cup(A\cap B) = \dots$

   (a) A (b) B (c) $A\cap B$ (d) $A\cup B$

2. On pose $I = \{x\in\mathbb{R} \mid x^2 < 4\}$. Alors $I\cap\mathbb{Z} = \dots$

   (a) $\{-1;1\}$ (b) $\{0;1;2\}$ (c) $\{0;-1;1\}$ (d) $]-2;2[$

3. Le nombre d'éléments de l'ensemble $\mathscr{P}(\mathscr{P}(\{a, b\}))$ est égal à …

   (a) 2 (b) 4 (c) 8 (d) 16

4. On lance 3 fois de suite un dé cubique dont les faces sont numérotées de 1 à 6. On note les triplets ainsi obtenus. Combien y a-t-il de triplets différents ?

   (a) $3!$ (b) 3^6 (c) 6^3 (d) A_6^3

5. Quel est le coefficient de x^{87} dans l'écriture développée du polynôme $(1-x)^{100}$?

   (a) 87^{100} (b) $\binom{100}{87}$ (c) -87^{100} (d) $-\binom{100}{13}$

6. Soit E un ensemble fini de cardinal n où $n\in\mathbb{N}^*$.
   A et B sont deux parties de E, de cardinaux respectifs p et q tels que $1\leqslant p\leqslant q\leqslant n$.
   On suppose que $A\subset B$. Quel est le nombre de parties X de E telles que $A\subset X\subset B$?

   (a) 2^q (b) 2^q-2^p (c) 2^{q-p} (d) $\binom{q}{p}$

Suites réelles

1 Pour s'entraîner

73 On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par :

$$\begin{cases} u_0 = -1; \quad u_1 = 1 \\ \forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+2} = u_{n+1} - \dfrac{1}{4} u_n \end{cases}$$

On définit les suites $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par :

$$a_n = u_{n+1} - \frac{1}{2} u_n \quad \text{et} \quad b_n = 2^n u_n$$

1. Montrer que $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite géométrique dont on précisera la raison et le premier terme a_0. Exprimer a_n en fonction de n.
2. Montrer que $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite arithmétique dont on précisera la raison et le premier terme b_0. Exprimer b_n en fonction de n.
3. En déduire l'expression de u_n en fonction de n.
4. Calculer la somme $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} u_k$

74 Soit (u_n) une suite géométrique telle que $u_0 = 90$ et $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{n} u_k = 150$. Quelle est sa raison ?

75 On considère la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par :

$$\begin{cases} x_0 = 0 \quad ; \quad x_1 = 1 \\ \forall n \in \mathbb{N}, \, x_{n+2} = 1 - 2x_n + 3x_{n+1} \end{cases}$$

On pose $\forall n \in \mathbb{N}, \, u_n = x_{n+1} - x_n$

1. Calculer x_2 et x_3.
2. (a) Soit $n \in \mathbb{N}$. Exprimer u_{n+1} en fonction de u_n.
   (b) Que peut-on dire de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$?
   En déduire la formule explicite de u_n en fonction de n.
3. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. En calculant de deux façons différentes la somme $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} u_k$, expliciter x_n en fonction de n.

76

1. Soit a et b deux constantes réelles. On considère une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifiant pour tout entier naturel n,

$$u_{n+2} = a\,u_{n+1} + b\,u_n$$

   On suppose que l'équation d'inconnue x, $x^2 = ax + b$ admet au moins une solution c. Démontrer que la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $v_n = u_{n+1} - c\,u_n$ est géométrique de raison $a - c$.
2. On appelle suite de Fibonacci la suite $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par :

$$\begin{cases} F_0 = 0; \quad F_1 = 1 \\ \forall n \in \mathbb{N}, \, F_{n+2} = F_{n+1} + F_n \end{cases}$$

   (a) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $x^2 = x + 1$.
   On notera Φ la solution positive et φ la solution négative.
   (b) En utilisant 1., exprimer F_n en fonction de n, de Φ et de φ.
   (c) Déterminer la limite des quotients $\dfrac{F_{n+1}}{F_n}$ lorsque n tend vers $+\infty$.

77 Déterminer, dans chacun des cas, la limite de la suite (u_n) :

1. $u_n = \dfrac{3^n}{(-5)^n}$
2. $u_n = \dfrac{2n+3}{3n-5}$
3. $u_n = \mathrm{e}^{1-n}$
4. $u_n = 5n+17-n^2$
5. $u_n = n+5\sin n$
6. $u_n = \dfrac{(-1)^n}{n+1}$
7. $u_n = \sqrt{n+1}-\sqrt{n}$
8. $u_n = \dfrac{3^n}{n^3}$
9. $u_n = \dfrac{n\sqrt{n}+n}{n+2}$
10. $u_n = n-\ln n$
11. $u_n = \dfrac{n!}{5^n}$
12. $u_n = n^3-3^n$
13. $u_n = n\ln\left(1+\dfrac{2}{n}\right)$
14. $u_n = \left(1-\dfrac{1}{n}\right)^n$

78

1. Montrer qu'il existe une suite (u_n) convergeant vers 1/2 telle que
$$\forall n\in\mathbb{N},\quad \sqrt{n^2+n+1} = n+u_n$$
2. En déduire la convergence et la limite de la suite de terme général $\cos\left(\pi\sqrt{n^2+n+1}\right)$.

79 On pose pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, $\quad H_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}$

1. Montrer que $\forall n\in\mathbb{N}^*,\ H_{2n}-H_n \geqslant \dfrac{1}{2}$
2. En déduire la limite de H_n lorsque n tend vers $+\infty$.

80 On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par

$$u_0 = 3 \text{ et } \forall n\in\mathbb{N},\ u_{n+1} = \frac{u_n^2}{2u_n-1}$$

1. Prouver que $\quad \forall n\in\mathbb{N},\ u_n \geqslant 1$
2. (a) Soit $n\in\mathbb{N}$. Montrer que $2u_n-1 \geqslant u_n$.
   (b) Étudier la monotonie de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$
3. Justifier la convergence de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
4. Déterminer sa limite ℓ.

81 On définit la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par

$$u_0 = \frac{1}{2} \quad\text{et}\quad \forall n\in\mathbb{N},\ u_{n+1} = u_n-u_n^2$$

1. Étudier la monotonie de la suite (u_n).
2. Prouver que la suite (u_n) est minorée par 0.
3. En déduire que la suite (u_n) est convergente et donner sa limite.
4. On pose $\forall k\in\mathbb{N}^*$, $\quad x_k = \dfrac{1}{u_k}-\dfrac{1}{u_{k-1}}$
   Vérifier que pour tout entier $k\geqslant 1$, $\quad x_k = \dfrac{1}{1-u_{k-1}}$
5. Déterminer $\quad \displaystyle\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}x_k$ en admettant le *lemme de Césaro*.
6. En déduire un équivalent simple de u_n lorsque n tend vers $+\infty$.

82 Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite réelle définie par récurrence en posant $u_0 = 1$ et $\forall n\in\mathbb{N},\ u_{n+1} = \sqrt{1+u_n}$.

1. Montrer que (u_n) est croissante et majorée.
2. En déduire que (u_n) converge et calculer sa limite Φ.
3. (a) Montrer que $\forall n\in\mathbb{N},\ |u_{n+1}-\Phi| \leqslant \dfrac{1}{2}|u_n-\Phi|$
   (b) En déduire que $\forall n\in\mathbb{N},\ |u_n-\Phi| \leqslant \dfrac{1}{2^n}|u_0-\Phi|$

83 On définit les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ par

$$u_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} \quad \text{et} \quad v_n = u_n + \frac{1}{n\times n!}$$

1. Montrer que u et v convergent vers la même limite ℓ.
2. En déduire un encadrement de ℓ d'amplitude 10^{-5}.

84 *La constante d'Euler.* On admet que pour tout entier $k \geqslant 1$,

$$\frac{1}{k+1} \leqslant \ln(k+1) - \ln k \leqslant \frac{1}{k}$$

On pose pour tout entier naturel n non nul, $H_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$

1. Montrer que $\forall n \geqslant 2$, $H_n \geqslant \ln(n) + \frac{1}{n}$. *Indication* : $H_n = \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k} + \frac{1}{n}$
2. Montrer que $\forall n \geqslant 2$, $\quad H_n \leqslant 1 + \ln(n)$.
3. En déduire un encadrement de $\frac{H_n}{\ln n}$ puis un équivalent simple de H_n lorsque n tend vers $+\infty$.
4. On pose alors pour tout entier $n \geqslant 1$,

$$v_n = H_n - \ln n \quad \text{et} \quad w_n = v_n - \frac{1}{n}$$

   (a) Prouver que les suites (v_n) et (w_n) sont adjacentes.

   (b) En déduire qu'il existe une constante réelle γ et une suite $(\varepsilon_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ telles que

$$H_n = \ln n + \gamma + \varepsilon_n \quad \text{avec} \quad \lim_{n\to+\infty} \varepsilon_n = 0$$

   (c) À l'aide de la calculatrice, proposer un encadrement de γ d'amplitude inférieure à 2×10^{-3}.

85 Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\quad u_n = 2\sqrt{n} - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}} \quad$ et $\quad v_n = u_n + \frac{1}{\sqrt{n}}$

Montrer que ces deux suites sont adjacentes. Que peut-on en déduire ?

Donner un équivalent simple de $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}}$ lorsque n tend vers $+\infty$.

86 Classer par ordre croissant pour la relation «est négligeable devant»

$$(2n)! \quad , \quad n^n \quad , \quad e^{2n} \quad , \quad 2n \quad , \quad n\ln(n) \quad , \quad (\sqrt{n})^n \quad , \quad 2^n$$

87 Trouver un équivalent simple pour chacune des suites :

- $a_n = \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+5}$
- $b_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n}$
- $c_n = n^{\frac{1}{n}} - 1$
- $d_n = (n+1)^n - n^n$
- $u_n = \sum_{k=1}^{n} k$
- $w_n = \ln(n+1) - \ln(n+2)$

2 Pour approfondir

88

1. Justifier que $\forall n \geqslant 2$,

$$n! \leqslant \sum_{k=1}^{n} k! \leqslant (n-2)(n-2)! + (n-1)! + n!$$

2. Étudier la convergence de la suite V de terme général $v_n = \frac{1!+2!+3!+\cdots+n!}{n!}$ en utilisant le théorème des gendarmes.

89 *Médian 2012* .

1. Soient x et y deux réels positifs. Montrer que $\sqrt{xy} \leqslant \dfrac{x+y}{2}$.
2. Soient x et y deux réels vérifiant $0 < x \leqslant y$.
   Démontrer les inégalités :
   $$x \leqslant \frac{x+y}{2} \leqslant y \qquad \text{et} \qquad x \leqslant \sqrt{xy} \leqslant y$$
3. Soient a_0 et b_0 deux réels strictement positifs tels que $a_0 < b_0$.
   On définit deux suites réelles $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de la façon suivante :
   $$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad a_{n+1} = \sqrt{a_n b_n} \qquad \text{et} \qquad b_{n+1} = \frac{a_n + b_n}{2}$$
   (a) Montrer par récurrence sur n que, pour tout entier naturel n, $a_n \leqslant b_n$.
   (b) Montrer que (b_n) est une suite décroissante.
   (c) Montrer que (a_n) est une suite croissante.
   (d) En déduire que les suites (a_n) et (b_n) sont convergentes, et qu'elles admettent la même limite, que l'on notera ℓ.
4. Dans cette question uniquement, on suppose que $a_0 = 1$ et que $b_0 = 5$. Justifier que $\sqrt{a_0 b_0} \leqslant \ell \leqslant \dfrac{a_1 + b_1}{2}$.
   En déduire la partie entière de la limite ℓ.

90 1. On admet le résultat suivant : «Si $(t_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de nombres réels qui converge vers 0, alors la suite $(T_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définie par $T_n = \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{k=1}^{n} t_k$ converge aussi vers 0.»
Prouver alors le lemme de Césaro :

«Si une suite (x_n) converge vers un nombre réel ℓ,
alors $\displaystyle\lim_{n\longrightarrow+\infty} \frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n} = \ell$»
On pourra utiliser la suite (t_n) définie par : $t_n = x_n - \ell$.

2. On définit la suite (u_n) par :
$$\begin{cases} u_0 = 1 \\ \forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = u_n \,\mathrm{e}^{-u_n} \end{cases}$$
   (a) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}$, $0 < u_n \leqslant 1$.
   (b) Démontrer que la suite (u_n) est convergente. On note ℓ sa limite.
   (c) Déterminer la valeur de ℓ.
3. Déterminer $\displaystyle\lim_{n\longrightarrow+\infty} \left(\frac{1}{u_{n+1}} - \frac{1}{u_n}\right)$
4. En déduire que $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{u_k} - \frac{1}{u_{k-1}}\right) \underset{(n\to+\infty)}{\sim} n.$ Conclure.
5. On pose $S_n = u_0 + u_1 + u_2 + \cdots + u_n$. Vérifier que $u_{n+1} = \mathrm{e}^{-S_n}$.
   La suite (S_n) est-elle convergente ?

3 TP sous Maxima

91 *On utilisera :* `sum`, `float`, `simplify_sum`

On considère la suite $(s_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définie par $\forall n \in \mathbb{N}^*, \; s_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k+1}}{k}$

1. Faire calculer les valeurs exactes de s_1, s_2, s_5 et s_9
2. Donner des valeurs décimales approchées de s_{500} et s_{1000}
3. Charger le package `simplify_sum`
   et demander la valeur de $\displaystyle\lim_{n\longrightarrow+\infty} s_n = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k}$

92 La suite de Fibonacci est définie par :

$$F_0 = 0,\ F_1 = 1 \text{ et } \forall n \in \mathbb{N},\ F_{n+2} = F_n + F_{n+1}$$

1. Définir la suite u qui calcule le n-ième terme de la suite (F_n) de manière récursive.
2. Définir la suite w qui calcule le n-ième terme de la suite (F_n) de manière itérative, en utilisant seulement 2 variables a et b.
3. Peut-on obtenir F_{800} avec les deux méthodes ?

4 Pour travailler seul

93 Calculer, lorsqu'elles convergent, les limites des suites définies par

$$u_n = n - \sqrt{n^2 - n} \quad ; \quad v_n = \sqrt{n(n+a)} - n \quad ; \quad w_n = \frac{n}{2}\sin\frac{n\pi}{2} \quad ; \quad x_n = \frac{\sin(n^2) - \cos(n^3)}{n}$$

94 Soit (u_n) une suite de nombres réels strictement positifs. On suppose que

$$\sqrt[n]{u_n} \underset{(n\to+\infty)}{\longrightarrow} \ell$$

1. Montrer que si $\ell < 1$ alors $u_n \underset{(n\to+\infty)}{\longrightarrow} 0$.
2. Montrer que si $\ell > 1$ alors $u_n \underset{(n\to+\infty)}{\longrightarrow} +\infty$.
3. Montrer que dans le cas $\ell = 1$ on ne peut rien conclure.

95 On considère les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définies par

$$u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^3} \qquad \text{et} \qquad v_n = u_n + \frac{1}{2n^2}$$

1. Démontrer que les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ sont convergentes et ont la même limite.
   On pose $\ell = \lim\limits_{n\longrightarrow+\infty} u_n$
2. Déterminer un entier p tel que u_p soit une approximation de ℓ à 0,01 près.
3. Reproduire et compléter le tableau suivant à l'aide d'une calculatrice :

n	valeur approchée de u_n à 0,001 près par défaut	valeur approchée de v_n à 0,001 près par excès
5		
10		
15		

4. Déduire de ce tableau une valeur décimale approchée de ℓ aussi précise que possible.
   On indiquera la précision de cette approximation.

Limites et continuité

1 Pour s'entraîner

96 Le plan est muni d'un repère orthogonal $\left(O;\vec{i},\vec{j}\right)$.

Montrer que la courbe représentant la fonction f admet une asymptote oblique et étudier sa position par rapport à cette asymptote.

(a) $f(x)=\dfrac{x}{1-x^2}+3x$ (c) $f(x)=-x\,e^{-x}+1-3x$

(b) $f(x)=\dfrac{2+3x-x^2}{x}$ (d) $f(x)=\dfrac{x^3-4}{x^2+1}$

97 Déterminer la limite éventuelle en $+\infty$ de la fonction g définie par $g(x)=\ldots$

(a) $5x^3-3x^5+5$ (b) $\dfrac{x^3}{1+x+x^2}$ (c) $\dfrac{\sin x}{x-1}$

(d) $\dfrac{1+x\ln x}{x}$ (e) $x+\sin x$ (f) $x\exp\left(\dfrac{1}{x}\right)$

(g) $x\left\lfloor\dfrac{1}{x}\right\rfloor$ (h) $\sqrt{x+1}-\sqrt{x-1}$ (i) $\dfrac{x}{\ln x}e^{\cos x}$

98 Étudier la limite éventuelle en zéro de la fonction $f: x\longmapsto\ldots$

(a) $x^2\sin\left(\dfrac{1}{x}\right)$ (b) $\dfrac{1}{x^2}+\sin\left(\dfrac{1}{x}\right)$ (c) $\dfrac{x-\ln x}{x}$

(d) $\dfrac{\cos x}{x^2}$ (e) $\dfrac{\sqrt{1+x}-1}{x}$ (f) $\exp\left(\dfrac{1}{x^2}\right)$

(g) $\dfrac{\sin(3x)}{x}$ (h) $\dfrac{e^{5x}-1}{2x}$ (i) $\dfrac{\cos x-1}{x^2}$

99 Déterminer, sous réserve d'existence, les limites suivantes :

1. $\displaystyle\lim_{x\to3}\frac{\sqrt{x}-\sqrt{3}}{x-3}$
2. $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\left(e^x-x^2+1\right)$
3. $\displaystyle\lim_{x\to1}\left(\frac{1}{x-1}-\frac{2}{x^2-1}\right)$
4. $\displaystyle\lim_{x\to0}\frac{\sin x}{x^2-x}$
5. $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x}-\ln x\right)$
6. $\displaystyle\lim_{x\to0^+}\left(\sqrt{1+\frac{1}{x}}-\sqrt{\frac{1}{x}}\right)$
7. $\displaystyle\lim_{x\to0^+}x\left\lfloor\frac{1}{x}\right\rfloor$
8. $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}e^{x+\frac{1}{x}}-e^x$
9. $\displaystyle\lim_{x\to0}x^2\ln x$

100 Déterminer un équivalent simple aux expressions suivantes quand $x\longrightarrow+\infty$

$$\frac{\ln(x+1)}{\ln x}-1\quad;\quad\sqrt{x^2+1}+\sqrt{x^2-1}\quad;\quad x\ln(x+1)-(x+1)\ln x\quad;\quad\ln\left(1+\frac{1}{\lfloor x\rfloor}\right)$$

101 Déterminer un équivalent simple au voisinage de zéro de :

$$\sqrt{1+x^2}-\sqrt{1-x^2}\quad;\quad\ln(\sin x)\quad;\quad\tan x-\sin x\quad;\quad\ln(\cos x)$$

102 Déterminer un équivalent en 0 et en $+\infty$ des expressions de x suivantes :

1. $f(x)=\sqrt{x+\sqrt{x}}$
2. $f(x)=\sqrt{1+x}-1$
3. $f(x)=\dfrac{e^x+x+\ln(x)}{x+\sqrt{x}}$
4. $f(x)=\ln(1+x)-\ln x$
5. $f(x)=\dfrac{1+x^\alpha}{1+x^\beta}$ pour $\alpha>0$ et $\beta>0$.
6. $f(x)=\dfrac{\ln(1+x^\alpha)}{x^\beta}$ pour $\alpha>0$ et $\beta>0$.

103 Étudier la limite $\lim\limits_{x \longrightarrow 1} \dfrac{\sqrt{2-x^2}-1}{\ln x}$

104 Montrer que la fonction $f : x \longmapsto \cos \dfrac{1}{x}$ n'a pas de limite en zéro.

105
1. Déterminer $\lim\limits_{x \longrightarrow 0} \dfrac{\sqrt{1+x}-(1+\frac{x}{2})}{x^2}$
2. En déduire qu'il existe une fonction $\varepsilon : [-1,1] \longrightarrow \mathbb{R}$ telle que
$$\forall x \in [-1,1], \quad \sqrt{1+x} = 1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} + x^2\varepsilon(x) \qquad \text{avec} \quad \lim_{x \to 0} \varepsilon(x) = 0$$
3. Sans calculatrice, proposer une valeur décimale approchée de $\sqrt{0,96}$.

106 Soit $k \in \mathbb{R}$, k fixé.

On définit la fonction f sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x^2} & \text{si} \quad x \geqslant 1 \\ -2x+k & \text{si} \quad x < 1 \end{cases}$

Pour quelle valeur de k la fonction f est-elle continue sur $\mathbb{R}$?

107 Soit $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ et f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :
$$f(x) = \begin{cases} x^2+b & \text{si} \quad x \leqslant 0 \\ \dfrac{\sin(ax)}{x} & \text{si} \quad x > 0 \end{cases}$$
étudier la continuité de f sur $\mathbb{R}$ en fonction des paramètres a et b.

108 La fonction h définie sur $\mathbb{R}$ par $h(x) = \begin{cases} x\,e^{\frac{1}{x}} & \text{si} \quad x > 0 \\ 0 & \text{si} \quad x \leqslant 0 \end{cases}$ est-elle continue sur $\mathbb{R}$?

109 La fonction $f : x \longmapsto \lfloor x \rfloor + \sqrt{x - \lfloor x \rfloor}$ est-elle continue sur $\mathbb{R}$? Justifier la réponse.

110 Étudier si les fonctions suivantes définies sur $\mathbb{R}^*$, sont prolongeables par continuité en zéro.

1. $f(x) = x \sin\left(\dfrac{1}{x}\right)$
2. $g(x) = \dfrac{(1+x)^4-1}{x}$
3. $h(x) = \sin x \sin\left(\dfrac{1}{x}\right)$
4. $\varphi(x) = \dfrac{|\sin(x)|}{x}$
5. $\psi(x) = x^2 \ln(|x|)$

111 Montrer que chacune des équations suivantes admet une seule solution dans l'intervalle indiqué. À l'aide de la calculatrice, donner une valeur décimale approchée de cette solution à 10^{-3} près

(a) $x^5 - 3x^2 + 1 = 0$ dans $I = [-1,0]$

(b) $e^x = 2 - x$ dans $\mathbb{R}$.

(c) $\cos x = x$ dans $I = \left]0, \dfrac{\pi}{2}\right[$

(d) $\tan x = 1 - x$ dans $I = \left]-\dfrac{\pi}{2}; \dfrac{\pi}{2}\right[$

112 Soit f une fonction continue sur le segment $[0,1]$ et prenant ses valeurs dans $[0,1]$.
On note g la fonction définie sur $[0,1]$ par : $g(x) = f(x) - x$.

1. Quel est le signe de $g(0)$? celui de $g(1)$?
2. En déduire qu'il existe au moins un réel $c \in [0,1]$ tel que $f(c) = c$.

2 Pour approfondir

113 *Au sujet des fonctions périodiques.* Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction définie sur $\mathbb{R}$ et T−périodique avec $T > 0$.

1. Démontrer par l'absurde que f ne peut pas avoir de limite infinie en $+\infty$.
2. Démontrer que si f admet une limite finie ℓ en $+\infty$, alors f est constante sur $\mathbb{R}$.
3. On suppose que f est continue sur $\mathbb{R}$. Prouver que f est bornée.

114 Le but de cet exercice est de montrer que toute fonction continue sur $\mathbb{R}^+$, ayant une limite finie en $+\infty$, est bornée.
Soit f une telle fonction. On pose $\ell = \lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.

1. En utilisant la définition de la limite de f en $+\infty$, justifier l'existence d'un réel positif A tel que
$$\forall x \in \mathbb{R}^+, (x \geqslant A \Longrightarrow \ell - 1 \leqslant f(x) \leqslant \ell + 1)$$
2. Justifier l'existence de deux réels m et M tels que
$$\forall x \in [0, A],\ m \leqslant f(x) \leqslant M$$
3. Conclure.

115 Pour tout entier naturel n, on définit la fonction f_n sur l'intervalle $I = \left]-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right[$ par :
$$f_n(x) = \tan(x) - x - n$$

1. Soit n un entier naturel fixé.
   (a) Déterminer $\lim\limits_{x\to\pi/2} f_n(x)$ et $\lim\limits_{x\to-\pi/2} f_n(x)$
   (b) Étudier le sens de variation de la fonction f_n
   (c) Démontrer que l'équation d'inconnue x, $f_n(x) = 0$ admet une solution unique dans l'intervalle I. On note a_n cette solution. À l'aide de la calculatrice, proposer une valeur décimale approchée de a_{10} à 10^{-3} près.
   (d) Donner, suivant les valeurs de x, le signe de $f_n(x)$.
2. La question 1.(c) permet de définir la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$
   (a) Justifier que cette suite est bornée et calculer $f_n(a_{n+1})$ pour $n \in \mathbb{N}$.
   (b) En déduire que la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est strictement croissante.
   (c) Déterminer la limite de $\tan(a_n)$ lorsque n tend vers $+\infty$.
   (d) Prouver que la suite (a_n) est convergente.
   Quelle est sa limite ?

3 TP sous Maxima

116 *On utilisera :* `log, sqrt, plot2d, define, limit, diff, factor`

Soit f la fonction définie par $f(x)=\ln\left(x+\sqrt{x^2-1}\right)$

1. Donner $f(1)$ et $f(\sqrt{2})$.
2. Déterminer l'ensemble de définition de f en traçant la courbe d'équation $y=x+\sqrt{x^2-1}$.
3. Proposer un équivalent simple de $f(x)$ lorsque $x\to+\infty$.
4. Calculer $f'(x)$ et factoriser l'expression obtenue. En déduire le sens de variation de f.
5. Visualiser la courbe représentative de f.
6. (a) Demander une approximation de $f\left(\dfrac{\mathrm{e}^2+\mathrm{e}^{-2}}{2}\right)$
   (b) En déduire la résolution de l'équation $f(x)=2$.

117 *On utilisera :* `if...then...else, exp, assume, limit, forget, plot2d`

Soient a et b deux réels. On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{\mathrm{e}^x-1}{x} & \text{si} \quad x>0\\ a\,x+b & \text{si} \quad x\leqslant 0\end{cases}$$

1. Définir la fonction f à l'aide d'un test `if...then...else`.
2. `limit` ne peut pas interpréter une commande `if...then...`. Ainsi pour déterminer la limite à droite en zéro de f, il est nécessaire de préciser à quel intervalle x appartient.
   C'est ce que permet de faire la fonction `assume`.
   Entrer la commande `assume(x>0)` ; puis demander $\lim\limits_{x\to0^+} f(x)$.
   On peut annuler l'hypothèse faite sur x par `forget(x>0)` ;
3. En déduire la valeur de b pour laquelle f est continue sur $\mathbb{R}$.
4. Calculer le nombre dérivé à droite en zéro de la fonction f.
   En déduire la valeur de a pour laquelle f est dérivable en 0.

4 Pour travailler seul

118 Étudier la limite éventuelle de la fonction f à l'endroit indiqué :

1. $f: x\longmapsto \dfrac{\cos x}{1-x}$ en $+\infty$
2. $f: x\longmapsto \dfrac{\tan(3x)}{\sqrt{x}}$ en 0^+
3. $f: x\longmapsto \dfrac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{x}$ en 0

119 L'équation $x^5=5x-1$ admet-elle des solutions ? Si oui, combien ?

120 Pour tout entier naturel n, on note f_n la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f_n(x)=x^5+n\,x-1$$

1. Déterminer les limites de f_n en $+\infty$ et en $-\infty$.
2. Étudier le sens de variation de la fonction f_n .
3. Démontrer que l'équation d'inconnue x, $f_n(x)=0$ admet une solution unique dans l'intervalle $[0;1]$.
   Cette solution, qui dépend de n, sera notée u_n .
4. (a) Donner la valeur exacte de u_0 .
   (b) À l'aide de la calculatrice, proposer une valeur décimale approchée de u_1 à 10^{-3} près par excès.
5. (a) Quel est le signe de $f_n\left(\dfrac{1}{n}\right)$?
   Prouver que pour tout entier naturel n non nul, $u_n\leqslant\dfrac{1}{n}$
   (b) En déduire la limite de u_n lorsque n tend vers $+\infty$.
6. Déterminer un équivalent simple de u_n lorsque n tend vers $+\infty$.

Nombres complexes

1 Pour s'entraîner

121 Écrire sous forme algébrique :

$$(1+i\sqrt{3})^3 \quad ; \quad \frac{1-i}{3+2i}+\frac{1+3i}{2-3i} \quad ; \quad \left(\sqrt{2-\sqrt{2}}-i\sqrt{2+\sqrt{2}}\right)^4$$

122 Soient z et z' deux nombres complexes tels que $|z|=|z'|=1$ et $zz'\neq -1$. On pose $Z=\dfrac{z+z'}{1+zz'}$.

Démontrer que Z est un nombre réel.

123 On note $\mathbb{U}$ l'ensemble des complexes de module 1. Déterminer et représenter l'ensemble des points M du plan complexe dont l'affixe z vérifie : $\dfrac{z-i}{z-1}\in\mathbb{U}$

124 Soit $\theta\in\mathbb{R}$. En utilisant la formule de Moivre, exprimer $\cos 5\theta$ et $\sin 5\theta$ en fonction de $\cos\theta$ et $\sin\theta$.

125 *Formules d'Euler.* Soit θ un réel tel que $-\pi<\theta<\pi$.
Écrire sous forme algébrique le complexe :

$$\frac{\mathrm{e}^{i\theta}-1}{\mathrm{e}^{i\theta}+1}$$

On factorisera numérateur et dénominateur par $\mathrm{e}^{i\theta/2}$

126 Soit $x\in\mathbb{R}$, linéariser les expressions suivantes :

1. $\sin(x)\cos(x)$
2. $\cos^2 x.\sin^2 x$
3. $\sin(3x)\cos(2x)$
4. $\cos(2x)\sin^3 x$
5. $\cos^3 x+2\cos^2 x$
6. $\sin^2(3x)+\cos^2(2x)$

127 Résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations suivantes d'inconnue z :

$$z^2-z+1=0 \quad ; \quad z^6-z^3+1=0 \quad ; \quad z^2-(1+2i)z+i-1=0 \quad ;$$

$$z^2-\sqrt{3}z-i=0\,;\; z^2-(3+4i)z-1+5i=0\,;\; 2z^4-(2+i)z^2+1-i=0$$

128 Soit θ un nombre réel tel que $0<\theta<\pi$.
Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation d'inconnue z

$$z^2+\frac{1}{z^2}=2\cos\theta$$

129 Déterminer tous les complexes z vérifiant :

(a) $|z|=|z-1|=\left|\dfrac{1}{z}\right|$ (b) $\arg(z+1)=\arg(z-i)$

130 Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormal direct $(O;\vec{u},\vec{v})$.

Pour tout nombre complexe z, on note M, N et P les points d'affixes respectives z, z^2 et z^3. Déterminer l'ensemble des points M tels que :

1. les points M, N et P soient alignés ;
2. les points M, N et P forment un triangle équilatéral.

131 Soient x un nombre réel et n un entier naturel non nul.

1. Développer $\left(1+e^{ix}\right)^n$ en appliquant la formule du binôme.
2. Montrer que $1+e^{ix} = 2\cos\left(\frac{x}{2}\right)e^{ix/2}$.
3. En déduire la somme : $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\sin(kx)$.

132 Déterminer les racines

1. carrées de $11+4i\sqrt{3}$,
2. cubiques de $27i$,
3. sixièmes de -8,
4. cubiques de $1+i$.

133 Soit n un entier naturel supérieur à 2. On pose $z = e^{i\frac{\pi}{n}}$.

1. Vérifier que pour tout réel θ, $1-e^{i\theta} = -2i\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)e^{i\theta/2}$
2. Calculer la somme : $1+z+z^2+\dots+z^{n-1}$
3. En déduire $\displaystyle\sum_{k=1}^{n-1}\sin\left(\frac{k\pi}{n}\right)$
4. Déterminer $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n-1}\sin\left(\frac{k\pi}{n}\right)$.

134 Soit n un entier naturel supérieur à 2.

1. Calculer la somme et le produit des n racines n-ièmes de l'unité.
2. En déduire $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1}\cos\left(\frac{2k\pi}{n}\right)$

135

1. Soit θ un nombre réel tel que $0<\theta<\pi$. Vérifier que
$$\frac{e^{i2\theta}}{e^{i2\theta}-1} = \frac{1}{2\sin\theta}e^{i(\theta-\frac{\pi}{2})}$$
2. Soit n un entier supérieur à 2. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation d'inconnue z : $z^n = (z-1)^n$

136 Soit $n\in\mathbb{N}$, $n\geqslant 2$ et ω une racine n-ième de l'unité, $\omega\neq 1$. On pose
$$S = \sum_{k=1}^{n} k\,\omega^{k-1}$$
En calculant $(1-\omega)S$, déterminer la valeur de S.

137

1. Écrire sous forme exponentielle le nombre complexe $a = i-\sqrt{3}$.
2. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation d'inconnue z : $\exp(z) = a$

138 Résoudre les équations suivantes :

(i) $e^z = 1$

(ii) $e^z = 2i$

(iii) $e^z = \sqrt{3}+3i$

(iv) $e^z - 2e^{-z} + 2 = 0$

(v) $\begin{cases} e^z + e^{z'} = 2 \\ e^{z+z'} = 2 \end{cases}$

(vi) $e^{2z} = 1+i\sqrt{3}$

(vii) $e^z = -1$

139 On définie la suite $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}\in\mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ par la donnée de son premier terme $z_0\in\mathbb{C}$ et la relation de récurrence :
$$\forall n\in\mathbb{N},\quad z_{n+1} = 2+\frac{1}{3}(2z_n-\overline{z_n})$$
Expliciter z_n en fonction de n puis étudier la convergence de la suite $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

140 On définit les suites réelles $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par
$$\begin{cases} x_0 = 0 \\ y_0 = 1 \end{cases} \quad\text{et}\quad \forall n\in\mathbb{N},\ \begin{cases} x_{n+1} = \frac{1}{2}(x_n-y_n) \\ y_{n+1} = \frac{1}{2}(x_n+y_n) \end{cases}$$
En introduisant la suite complexe de terme général $z_n = x_n + i\,y_n$, exprimer x_n et y_n en fonction de n. En déduire la convergence des suites $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

2 Pour approfondir

141 *La droite d'Euler* .
On considère un triangle non aplati ABC et on note O le centre du cercle circonscrit à ABC.
On se place dans un repère orthonormal d'origine O, dans lequel on désigne par a, b et c les affixes respectives des points A, B et C.

1. Soit G le point d'affixe $\frac{1}{3}(a+b+c)$.
   Montrer que G est le point d'intersection des trois médianes de ABC.
2. Soit H le point d'affixe $a+b+c$.
   Montrer que H est le point d'intersection des trois hauteurs de ABC.
3. Que peut-on en déduire concernant les points O, G et H ?

142 On pose $E = \mathbb{C}\setminus\{1\}$ et on considère l'application

$$f : \begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & \mathbb{C}^* \\ z & \longmapsto & \dfrac{2}{(z-1)^2} \end{array}$$

1. (a) Déterminer les racines carrées du nombre complexe $8-6i$.
   (b) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation (E) : $f(z) = \dfrac{1}{4-3i}$.
2. Montrer que $f(E) = \mathbb{C}^*$. *On ne demande pas de calculer explicitement un antécédent de $k \in \mathbb{C}^*$ par f*
3. Soit θ un nombre réel tel que $0 < \theta < 2\pi$.
   (a) Démontrer que
   $$e^{i\theta} - 1 = 2i\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)e^{i\frac{\theta}{2}}$$
   (b) En déduire la forme exponentielle du nombre complexe $f(e^{i\theta})$.
4. On considère l'ensemble $\Delta = \{z \in \mathbb{C} \mid \Re(z) = 1\}$.
   Déterminer l'image directe de $\Delta\setminus\{1\}$ par l'application f.

143 On considère trois nombres réels a, b et c tels que

$$\cos a + \cos b + \cos c = 0 \quad \text{et} \quad \sin a + \sin b + \sin c = 0$$

1. Que valent les sommes $e^{ia} + e^{ib} + e^{ic}$ et $e^{-ia} + e^{-ib} + e^{-ic}$?
2. Développer $\left(e^{ia} + e^{ib} + e^{ic}\right)^2$ et $e^{i(a+b+c)}\left(e^{-ia} + e^{-ib} + e^{-ic}\right)$.
3. En déduire que
$$\cos 2a + \cos 2b + \cos 2c = 0 \text{ et } \sin 2a + \sin 2b + \sin 2c = 0$$

144 On considère le nombre complexe $u = \cos\left(\frac{2\pi}{7}\right) + i\sin\left(\frac{2\pi}{7}\right)$

On pose $S = u + u^2 + u^4$ et $T = u^3 + u^5 + u^6$

1. (a) Simplifier u^7
   (b) Calculer la somme $1 + u + u^2 + \cdots + u^6$
   (c) Calculer le produit $u\,u^2\,u^3 \ldots u^6$
2. (a) Montrer que S et T sont deux nombres complexes conjugués.
   (b) Donner la valeur de $S+T$ et calculer $S\times T$.
   (c) Démontrer que la partie imaginaire de S est positive.
   (d) En déduire les valeurs exactes de S et T.
3. Calculer la somme
$$\sin\left(\frac{2\pi}{7}\right) + \sin\left(\frac{4\pi}{7}\right) + \sin\left(\frac{8\pi}{7}\right)$$
4. ⋆ En utilisant les formules d'Euler, calculer le produit
$$\sin\frac{2\pi}{7}\sin\frac{4\pi}{7}\sin\frac{8\pi}{7}$$

3 TP sous Maxima

145 *On utilisera :* `%i, conjugate, rectform, imagpart`

On considère l'application f définie sur $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ par

$$f(z) = \frac{2z^2 - i}{z - \overline{z}}$$

1. Définir f sous maxima.
2. Calculer $f(i)$.
3. (a) Soient x et y des nombres réels.
   Écrire $f(x + iy)$ sous forme algébrique.
   (b) En déduire, dans le plan complexe, l'ensemble des points M d'affixe z pour lesquels $f(z)$ est un nombre réel.

4 Pour travailler seul

146

1. (a) Calculer les racines carrées de $\frac{1+i}{\sqrt{2}}$.
   (b) Mettre $\frac{1+i}{\sqrt{2}}$ sous forme exponentielle.
   (c) En déduire les valeurs de $\cos(\pi/8)$ et $\sin(\pi/8)$.
2. Calculer les valeurs de $\cos(\pi/12)$ et $\sin(\pi/12)$.

147 On désigne par θ un nombre réel tel que $-\pi < \theta < \pi$. On pose $u = 1 + e^{i\theta}$

1. Écrire $1 + e^{i\theta}$ sous forme exponentielle.
2. Montrer que u est solution dans $\mathbb{C}$ de l'équation d'inconnue z :

$$z^2 - (2 + 2\cos\theta)z + (2 + 2\cos\theta) = 0$$

   En déduire la seconde solution de cette équation.

148

1. (a) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $Z^4 = 1$.
   (b) Déduire de la question précédente les solutions dans $\mathbb{C}$ de l'équation d'inconnue z :

$$\left(\frac{2z+1}{z-1}\right)^4 = 1$$

   On donnera les solutions sous forme algébrique.
2. (a) Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormal direct $(O; \vec{u}, \vec{v})$
   Placer les points A, B et C d'affixes respectives :

$$a = -2 \quad ; \quad b = -\frac{1}{5} - \frac{3}{5}i \quad \text{et} \quad c = -\frac{1}{5} + \frac{3}{5}i$$

   (b) Prouver que les points O, A, B et C sont situés sur un cercle, que l'on déterminera.
3. Placer le point D d'affixe $d = -\frac{1}{2}$.
   Exprimer sous forme trigonométrique le nombre complexe z' défini par :

$$z' = \frac{a-c}{d-c}$$

   En déduire le rapport $\frac{CA}{CD}$. Quelle autre conséquence géométrique peut-on tirer de l'expression de z' ?

Dérivation

1 Pour s'entraîner

149 Dans chacun des cas suivants :
• préciser sur quel ensemble la fonction f est dérivable
• calculer sa dérivée f'
• déterminer une équation de la tangente à la courbe représentative de f au point d'abscisse a.

1. $f : x \longmapsto \ln(\ln x)$ avec $a = \mathrm{e}$
2. $f : x \longmapsto x\ln x - x$ avec $a = \sqrt{\mathrm{e}}$
3. $f : x \longmapsto \sqrt{4-\sin x}$ avec $a = 0$
4. $f : x \longmapsto \ln\left(\dfrac{1+x}{1-x}\right)$ avec $a = 0$
5. $f : x \longmapsto \mathrm{e}^{-x^2}$ avec $a = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$
6. $f : x \longmapsto x^x$ avec $a = 1$

150 Déterminer deux réels a et b de manière à ce que la fonction f définie ci-dessous sur $\mathbb{R}$ soit dérivable sur $\mathbb{R}$:

$$f(x) = \begin{cases} \sin x & \text{si } x \leqslant \pi \\ a x^2 + b x & \text{si } x > \pi \end{cases}$$

151 Étudier la dérivabilité des fonctions f, g, h et ϕ définies par :

- $f(x) = \dfrac{x}{1+|x|}$
- $g(x) = x^2 \cos\dfrac{1}{x}$ si $x \neq 0$ et $g(0) = 0$
- $h(x) = \sin(x)\sin\left(\dfrac{1}{x}\right)$ si $x \neq 0$ et $h(0) = 0$
- $\phi(x) = \dfrac{|x|\sqrt{x^2-2x+1}}{x-1}$ si $x \neq 1$ et $\phi(1) = 1$

152 Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^+ = [0\,, +\infty[$ par

$$\begin{cases} f(x) = x^{\frac{1}{x}} & \text{si } x > 0 \\ f(0) = a & \text{où } a \text{ est un réel fixé.} \end{cases}$$

1. Déterminer la valeur de a pour que f soit continue en zéro.
Dans la suite, on suppose que a prend la valeur qui rend f continue sur $\mathbb{R}$.
2. Justifier que f est dérivable sur $]0\,, +\infty[$.
Calculer $f'(x)$ pour tout réel x strictement positif.
3. Montrer que f est dérivable en zéro et donner $f'(0)$.

153 Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ la fonction définie par : $f(x) = \begin{cases} 3x + x^2 \sin\dfrac{1}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$

1. Prouver que f est dérivable en 0 et donner $f'(0)$.
2. On définit la fonction g sur $\mathbb{R}$ par : $g(x) = \sqrt{x^2+2x+2}$.
Justifier que g est dérivable sur $\mathbb{R}$ et calculer $(g \circ f)'(0)$.

154 Déterminer le plus grand intervalle de $\mathbb{R}$ sur lequel la fonction f est dérivable et calculer sa dérivée f' dans chacun des cas suivants

1. $f : x \longmapsto \dfrac{x^2-3x+1}{x+1}$
2. $f : x \longmapsto (x-1)\sqrt{x}$
3. $f : x \longmapsto \cos\left(\dfrac{1}{1+x^2}\right)$
4. $f : x \longmapsto \ln(x + \sqrt{x^2-1})$
5. $f : x \longmapsto \dfrac{\mathrm{e}^x}{(x+1)^2}$
6. $f : x \longmapsto \sqrt{x}\,\mathrm{e}^{-x}$
7. $f : x \longmapsto x^x$

155 On définit la fonction f sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^3 + x - 2$.
Démontrer que f est bijective de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}$ et calculer $\left(f^{-1}\right)'(0)$.

156 La fonction φ est définie sur $[1,+\infty[$ par $\varphi(x)=x\ln(x)-x$

1. Calculer $\varphi'(x)$. Montrer que φ est une bijection de $[1,+\infty[$ sur un intervalle J que l'on précisera.
2. On note φ^{-1} la bijection réciproque de φ. Calculer $(\varphi^{-1})'(0)$.

157 On définit la fonction f sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=\dfrac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}}$

1. Étudier la parité de f.
2. (a) Vérifier que $\forall x\in\mathbb{R},\quad f(x)=1-\dfrac{2}{1+e^{2x}}$
   (b) En déduire les limites de f en $+\infty$ puis en $-\infty$.
3. Étudier le sens de variation de f.
4. Montrer que pour tout réel x, $f'(x)=1-f^2(x)$
5. (a) Prouver que f est bijective de $\mathbb{R}$ sur un intervalle I que l'on précisera.
   (b) Démontrer que la réciproque f^{-1} est dérivable sur I et donner une expression simple de $\left(f^{-1}\right)'(x)$.

158 Soit $(a,b)\in\mathbb{R}^2$ tel que $a<b$. Soit f une fonction deux fois dérivable sur $[a\,,b]$ telle que $f(a)=f'(a)$ et $f(b)=f'(b)$.

En appliquant le théorème de Rolle à la fonction $g:x\longmapsto e^x\big(f(x)-f'(x)\big)$, démontrer qu'il existe un réel c de $]a\,,b[$ tel que $f(c)=f''(c)$.

159 Soit $(a,b)\in\mathbb{R}^2$ tel que $0<a<b$. Soit f une fonction continue sur le segment $[a,b]$ et dérivable sur $]a,b[$ telle que $f(a)=f(b)=0$.

1. Démontrer que $\exists c\in]a,b[\,;\ f'(c)=\dfrac{f(c)}{c}$
   On pourra considérer la fonction $g:x\mapsto\dfrac{f(x)}{x}$
2. Donner une interprétation graphique de ce résultat.

160 En utilisant le théorème des accroissements finis, démontrer que

1. $\forall x\in\mathbb{R}^+,\quad \sin x\leqslant x$
2. $\forall x\in\mathbb{R}^+,\quad \dfrac{x}{1+x}\leqslant\ln(1+x)\leqslant x$

161 1. Montrer que pour tout réel $x>-1$, $\ln(1+x)\leqslant x$
2. En déduire que pour tout entier naturel $n\geqslant 2$,

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\leqslant e\leqslant\left(1-\frac{1}{n}\right)^{-n}$$

162 Soit $k\in\mathbb{N}^*$. Par application du théorème des accroissements finis à la fonction ln sur $[k,k+1]$, démontrer que la suite $(H_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ de terme général $H_n=\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}$ est divergente.

163 Démontrer à l'aide de l'inégalité des accroissements finis, que

(a) $\forall(a,b)\in\mathbb{R}^2,\quad |\sin b-\sin a|\leqslant|b-a|$

(b) $\forall x>0,\quad \dfrac{1}{x+1}\leqslant\ln(x+1)-\ln x\leqslant\dfrac{1}{x}$

164 Calculer la dérivée n-ième de chacune des fonctions suivantes :

$$f:x\mapsto e^{5x}\quad;\quad g:x\mapsto\frac{1}{1+x}\quad;\quad h:x\mapsto x\,e^x\quad;\quad \varphi:x\mapsto\ln x$$

165 On considère la fonction $f:x\longmapsto(x+1)e^{-x}$.
Calculer la dérivée $n-$ième de f pour $n\in\mathbb{N}^*$.

166 Soit la fonction g définie sur $\mathbb{R}^*$ par $g(x)=e^{-\frac{1}{x^2}}$

1. Montrer que g se prolonge par continuité sur $\mathbb{R}$, en une fonction que l'on notera f.
2. Calculer $f'(x)$ pour tout $x\neq 0$. Prouver que f est $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.
3. Étudier les variations de f.

2 Pour approfondir

167 On considère la fonction $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x}{e^x - 1} & \text{si} \quad x \neq 0 \\ k & \text{si} \quad x = 0 \end{cases}$$

1. (a) Montrer que l'on peut choisir la constante k pour que f soit continue sur $\mathbb{R}$.
   (b) Justifier que f est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $]-\infty, 0[$ et sur $]0, +\infty[$. Calculer $f'(x)$ pour tout réel x non nul.
   (c) Montrer que $\quad f'(x) \underset{(x \longrightarrow 0)}{\longrightarrow} -\dfrac{1}{2}$
   (d) En déduire que f est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et préciser $f'(0)$.
2. (a) étudier les variations de la fonction $u : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, définie par

$$\forall x \in \mathbb{R},\ u(x) = (1-x)e^x - 1.$$

   (b) Montrer que $\quad \forall x \in \mathbb{R},\ f'(x) < 0.$
   (c) Déterminer les limites de f en $-\infty$ et en $+\infty$
   Dresser le tableau de variation de f.
   (d) Montrer que la courbe $\mathscr{C}$ représentant f, admet une droite asymptote au voisinage de $-\infty$.

168 Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $\quad f(x) = \dfrac{e^x}{e^{2x}+1}$

1. (a) Montrer que$f$ est paire. Étudier les variations de f
   (b) Prouver que l'équation $\ f(x) = x\ $ admet une seule solution que l'on notera ℓ.
   Vérifier que $0 \leqslant \ell \leqslant \dfrac{1}{2}$
   (c) Montrer que pour tout réel x, $\quad |f'(x)| \leqslant \dfrac{1}{2}$
2. On définit la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par :

$$u_0 = 0 \qquad \text{et } \forall n \in \mathbb{N} \quad u_{n+1} = f(u_n)$$

   (a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\quad u_n \in \left[0, \dfrac{1}{2}\right]$
   (b) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$|u_{n+1} - \ell| \leqslant \frac{1}{2}|u_n - \ell|$$

   (c) En déduire que : $\forall n \in \mathbb{N}, \quad |u_n - \ell| \leqslant \dfrac{1}{2^{n+1}}$
   (d) Conclure quant à la convergence de la suite (u_n).

169 *Final 2017.* Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On définit la fonction f_n sur $\mathbb{R}$ par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f_n(x) = e^{-x} \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!}$$

1. Justifier que f_n est dérivable sur $\mathbb{R}$ et démontrer que

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f_n'(x) = -\frac{x^n}{n!} e^{-x}$$

2. Montrer que $\forall x \in [0, 1], \quad \left|f_n'(x)\right| \leqslant \dfrac{1}{n!}$
3. Appliquer l'inégalité des accroissements finis à f_n sur l'intervalle $[0, 1]$.
4. On considère la suite de terme général $u_n = e f_n(1)$ pour $n \in \mathbb{N}^*$.
   (a) Utiliser la question 3. pour prouver la convergence de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$
   (b) En déduire la limite : $\quad \lim\limits_{n\to+\infty} \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}$

3 TP sous Maxima

170 *On utilisera :* `limit`, `if...then...else`, `diff`, `factor`, `define`, `plot2d`

La fonction f est définie sur $]0, +\infty[\setminus\{1\}$ par $f(x) = x^{\left(\frac{x}{1-x}\right)}$

1. Étudier les limites de f aux bornes des intervalles composant son ensemble de définition.
2. Peut-on prolonger par continuité la fonction f ?
3. Calculer $f'(x)$ et étudier son signe en recourant à une fonction auxiliaire h.
4. Visualiser le graphe $\mathscr{C}$ de f et faire apparaître sa droite asymptote.
5. Étudier la dérivabilité du prolongement par continuité de f aux points 0 et 1.

4 Pour travailler seul

171 Pour chacune des fonctions suivantes, déterminer le domaine de définition, les branches infinies aux bornes du domaine de définition, puis calculer leur dérivée.

1. $f(x) = \dfrac{x - \ln(1+x)}{x}$
2. $f(x) = \dfrac{-x\ln(x)}{1+x^2}$
3. $f(x) = \ln\left(\dfrac{e^x - 1}{x}\right)$
4. $f(x) = \dfrac{-x}{(1-x)\ln(1-x)}$

172 Pour tout entier naturel n non nul, on définit la fonction f_n sur $[-\pi, \pi]$ par :

$$f_n(x) = \sqrt{\frac{1}{n} + \sin^2(x)}$$

1. Calculer $f_n(0)$ et $f_n(\pi)$.
2. Montrer que f_n est une fonction paire.
3. (a) Justifier que f_n est dérivable sur $[-\pi, \pi]$ et calculer $f_n'(x)$.
   (b) Étudier les variations de la fonction f_n sur $[0, \pi]$. Dresser le tableau de variations de f_n sur $[-\pi, \pi]$.
4. (a) Soit x un réel fixé de l'intervalle $[-\pi, \pi]$.
   Déterminer la limite de $f_n(x)$ lorsque n tend vers $+\infty$.
   (b) On pose pour tout réel x de $[-\pi, \pi]$, $\varphi(x) = \lim\limits_{n \longrightarrow +\infty} f_n(x)$
   La fonction φ est-elle continue en zéro ?
   Est-elle dérivable en zéro ?

Polynômes

1 Pour s'entraîner

173 Soit P un polynôme de $\mathbb{K}[X]$ de degré $n \in \mathbb{N}^*$.
Quel est le degré du polynôme $P(X+1)-P(X)$?

174

1. Déterminer les réels p et q pour que le polynôme $A = X^3 + pX + q$ soit divisible par $B = X^2 + 3X - 1$.
2. Déterminer les complexes a, b et c pour que le polynôme $P = X^4 + aX^2 + bX + c$ soit divisible par $Q = X^2 + X + 1$.

175 Effectuer les divisions euclidiennes de

(a) $X^4 + X^2 + X + 2$ par $X^2 - 3$

(b) $X^4 - X^3 + X - 2$ par $X^2 - 2X + 4$

(c) $3X^5 + 2X^4 - X^2 + 1$ par $X^3 + X + 2$

(d) $4X^3 + X^2$ par $X + 1 + i$

176 Soit P un polynôme de $\mathbb{K}[X]$.

1. Soit a et b deux éléments distincts de $\mathbb{K}$.
Exprimer à l'aide de $P(a)$ et $P(b)$, le reste de la division euclidienne de P par $(X-a)(X-b)$.
À quelle condition P est-il divisible par $(X-a)(X-b)$?
2. En déduire le reste de la division euclidienne de $(X+\sqrt{3})^{17}$ par X^2+1.
3. Calculer en fonction de a, $P(a)$ et $P'(a)$, le reste de la division euclidienne de P par $(X-a)^2$.
À quelle condition P est-il divisible par $(X-a)^2$?
4. En déduire le reste de la division euclidienne de X^4+X par $(X-1)^2$.

177 Soit $n \in \mathbb{N}^*$.
Déterminer le reste de la division euclidienne de $X^n + X + 1$ par $(X-1)^2$.

178 Soit $n \in \mathbb{N}^*$.
Déterminer le reste de la division euclidienne de X^n par :

(a) $2X+5$ (b) X^2+X-6 (c) $(X-1)^2(X-2)$

179 Déterminer la multiplicité de 1 comme racine de

$P = X^3 - 4X^2 + 5X - 2$ et $Q = X^{2n} - nX^{n+1} + nX^{n-1} - 1$ où $n \geqslant 2$.

180 Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que le polynôme $P = 1 + \sum_{k=1}^{n} \frac{X^k}{k!}$ n'a que des racines simples dans $\mathbb{C}$.

181 Déterminer tous les polynômes $P \in \mathbb{R}[X]$ tels que $(P')^2 = 4P$.

182 Déterminer tous les polynômes $P \in \mathbb{R}[X]$ tels que

$$P(X+1) = P(X)$$

On pourra introduire le polynôme $Q(X) = P(X) - P(0)$.

183 Déterminer tous les polynômes $P \in \mathbb{C}[X]$ tels que

$$P(X^2) = (X^2+1)P(X)$$

On raisonnera par analyse/synthèse. Si un tel polynôme P existe, on donnera son degré et on calculera $P(1)$ et $P(i^2)$.

184 Déterminer tous les polynômes $P \in \mathbb{C}[X]$ vérifiant, pour tous nombres complexes z_1 et z_2,

1. $P(z_1 z_2) = P(z_1)P(z_2)$ *(étudier les racines)*
2. $P(z_1 + z_2) = P(z_1) + P(z_2)$ *(dériver)*

185 *Final 2018.* Le but de cet exercice est de prouver que la fonction exp définie sur $\mathbb{C}$ par

$$\forall z \in \mathbb{C},\ \exp(z) = \mathrm{e}^{\Re\mathrm{e}(z)}[\cos(\mathrm{Im}(z)) + i\sin(\mathrm{Im}(z))]$$

n'est pas polynomiale.

1. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $\exp(z) = 1$.
2. Soit $P \in \mathbb{C}[X]$ un polynôme vérifiant $\forall z \in \mathbb{C},\ P(z) = \exp(z)$. Quelles sont les racines du polynôme $Q = P - 1$?
3. Que peut-on dire d'un polynôme admettant une infinité de racines ?
4. Démontrer que la fonction exp n'est pas polynomiale.

186 p et q sont deux nombres complexes tels que $q \neq 0$.
On note a, b et c les solutions de l'équation d'inconnue z : $z^3 + pz + q = 0$.

Exprimer en fonction de p et q : $a+b+c$, abc et $\dfrac{1}{ab} + \dfrac{1}{bc} + \dfrac{1}{ac}$

187 Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $z^3 - 8z^2 + 23z - 28 = 0$ sachant que la somme de deux de ses solutions est égale à la troisième.

188 Dans $\mathbb{R}[X]$ et dans $\mathbb{C}[X]$, décomposer les polynômes suivants en produits de polynômes irréductibles.

(a) $3X^2 - X - 14$

(b) $X^3 - 27$

(c) $X^4 + 1$

(d) $X^6 - 1$

(e) $X^3 + X^2 + X + 1$

(f) $X^9 + X^6 + X^3 + 1$.

189 Soit n un entier, $n \geqslant 2$. On pose

$$\forall z \in \mathbb{C},\ P(z) = 1 + z + z^2 + \cdots + z^{n-2} + z^{n-1}$$

1. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $P(z) = 0$.
2. En déduire la factorisation de $P(z)$.
3. En calculant $P(1)$, prouver que $\displaystyle\prod_{k=1}^{n-1} \left|1 - \mathrm{e}^{\frac{2ik\pi}{n}}\right| = n$
4. En déduire que $\displaystyle\prod_{k=1}^{n-1} \sin\left(\frac{k\pi}{n}\right) = \frac{n}{2^{n-1}}$

2 Pour approfondir

190 Soit $n \in \mathbb{N}^*$.
Décomposer en produit de facteurs irréductibles sur $\mathbb{C}[X]$, puis sur $\mathbb{R}[X]$ le polynômes $P(X) = X^{2n} - 1$

191 *Polynômes de Tchebychev* .
On se propose d'étudier la suite $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de polynômes définis par :

$$\begin{cases} T_0 = 1, \quad T_1 = X \\ \forall n \in \mathbb{N},\ T_{n+2} = 2X\,T_{n+1} - T_n \quad (\star) \end{cases}$$

1. (a) Calculer T_n pour $n \in \{0, 1, 2, 3, 4\}$.
   (b) Parmi ces 5 polynômes, indiquer ceux (ou celui) qui sont irréductibles dans $\mathbb{R}[X]$.

2. On admet que T_n est un polynôme de degré n.
On désigne par a_n le coefficient dominant de T_n.
   (a) À l'aide de la relation ($\star$), exprimer a_{n+1} en fonction de a_n.
   (b) En déduire a_n en fonction de n.
3. On se fixe un réel a. Démontrer par récurrence, que pour tout entier naturel n,
$$T_n(\cos a) = \cos(n\,a)$$
4. Déterminer les valeurs de $T_n(1)$ et de $T_n(-1)$.
5. On suppose dans cette dernière question uniquement, que $n = 4$.
   (a) Résoudre dans l'intervalle $[0, \pi]$, l'équation d'inconnue a : $\cos(4a) = 0$
   (b) En déduire que le polynôme T_4 admet au moins 4 racines réelles distinctes que l'on précisera.
   (c) Décomposer T_4 en un produit de polynômes irréductibles dans $\mathbb{R}[X]$.

192 Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 2. On considère le polynôme
$$P(X) = (X+1)^n - (X-1)^n$$

1. Déterminer le degré et le coefficient dominant du polynôme P.
2. Soit α une racine complexe de P.
   (a) Calculer le polynôme dérivé $P'(X)$.
   (b) Démontrer que α est de multiplicité égale à 1.
3. On désigne par $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{n-1}$ les racines complexes de P.
Calculer la somme $\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_{n-1}$ et le produit $\alpha_1\alpha_2\dots\alpha_{n-1}$
4. (a) Démontrer que pour tout réel $\theta \in]0, 2\pi[$, $\dfrac{e^{i\theta}+1}{e^{i\theta}-1} = -i\,\text{cotan}\dfrac{\theta}{2}$
   (b) Déterminer les racines complexes de P.

193 Pour tout entier naturel n non nul, on définit le polynôme $P_n \in \mathbb{R}[X]$ par
$$P_n(X) = n\,X^{n+1} - (n+1)X^n + 1$$

1. Calculer son polynôme dérivé $P_n'(X)$.
2. Démontrer que 1 est la seule racine multiple de $P_n(X)$.
3. On considère la fonction polynômiale $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par
$$f(x) = 1 + x + x^2 + x^3 + \dots + x^n \qquad \text{où } n \in \mathbb{N}^*$$
   (a) En identifiant $f(x)$ comme étant la somme des premiers termes consécutifs d'une suite géométrique, calculer de deux façons différentes $f'(x)$ pour $x \neq 1$.
   (b) En déduire le quotient de la division euclidienne de $P_n(X)$ par $(X-1)^2$.
4. On note $Q(X)$ le quotient de la division euclidienne de $P_4(X)$ par $(X-1)^2$ et on désigne par a, b et c les racines complexes du polynôme $Q(X)$.
   (a) Factoriser $Q(X)$ en fonction de a, b et c dans $\mathbb{C}[X]$.
   (b) Calculer la somme $\quad \sigma = \dfrac{1}{a\,b} + \dfrac{1}{b\,c} + \dfrac{1}{a\,c}$.

3 TP sous Maxima

194 *On utilisera :* `if...then...elseif...`, `for...from...thru...do`, `print`

On considère la suite de polynômes $(H_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par :
$$\begin{cases} H_0 = 0 \quad , \quad H_1 = 2X \\ \forall n \in \mathbb{N}, \quad H_{n+2} = 2X\,H_{n+1} - 2(n+1)H_n \end{cases}$$

1. Écrire une fonction `herm` prenant un entier naturel n en paramètre et renvoyant le polynôme H_n.
2. Faire calculer les polynômes H_k pour k variant de 0 à 10.

4 Pour travailler seul

195 Soient $\theta \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}$.
Déterminer le reste de la division euclidienne du polynôme $P(X) = (X\sin\theta + \cos\theta)^n$ par $X^2 + 1$.

196 Soit n un entier supérieur ou égal à 2. On considère le polynôme $P \in \mathbb{C}[X]$ défini par :

$$P = (1+X)^n - X^n$$

1. Quel est le degré de P ? Donner son coefficient dominant.
2. Démontrer que si z est une racine de P alors $\Re e(z) = -\dfrac{1}{2}$
3. (a) Démontrer que, pour tout réel x, $\quad e^{ix} - 1 = 2i\sin\left(\dfrac{x}{2}\right)e^{i\frac{x}{2}}$
   (b) Déterminer les racines de P. On les exprimera en fonction des racines n-ièmes de l'unité.
   (c) Écrire chaque racine de P sous forme exponentielle. En déduire le module et un argument de chacune de ces racines.
4. On note $z_1, z_2, \ldots, z_{n-1}$ les racines du polynôme P. Calculer la somme :
$$\sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{z_k}$$
5. Résoudre dans $\mathbb{R}$, en discutant suivant les valeurs de l'entier $n \geqslant 2$, l'équation d'inconnue x :
$$(1+x)^n = x^n$$

197 *Final 2013* .

1. Soit P un polynôme à coefficients réels $\quad P = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} a_k X^k$.
   Montrer que si $\alpha \in \mathbb{C}$ est une racine de P, alors $\overline{\alpha}$ est aussi une racine de P.
2. On considère le polynôme
$$Q = -X^5 + 2X^4 + 7X^3 + 2X^2 + 8X.$$
   (a) Vérifier que $Q(i) = 0$.
   (b) Sans effectuer de calcul, montrer que Q est divisible par $X^2 + 1$.
   (c) Décomposer Q en produit de facteurs irréductibles sur $\mathbb{R}[X]$ et sur $\mathbb{C}[X]$.

arcsin, arccos, arctan

1 Pour s'entraîner

198 Simplifier les écritures des nombres réels suivants :

(a) $\arcsin\frac{1}{2}$ (b) $\arctan(1)$ (c) $\arccos\left(\frac{-1}{\sqrt{2}}\right)$ (d) $\arctan\sqrt{3}$

199 Démontrer les égalités ci-dessous :

1. $\forall x \in [-1,1], \quad \arccos x + \arccos(-x) = \pi$
2. $\forall x \in [-1,1], \quad \arcsin x + \arccos x = \pi/2$
3. $\forall x \in \mathbb{R}^{+*}, \quad \arctan x + \arctan(1/x) = \pi/2$
4. $\forall x \in \mathbb{R}, \quad \cos(\arctan x) = \dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}$
5. $\forall x \in \mathbb{R}, \quad \sin(\arctan x) = \dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}$

200 Écrire sous forme d'expression algébrique avec des racines carrées

$$\sin(\arccos x) \quad , \quad \cos(\arcsin x) \quad , \quad \tan(\arcsin x)$$

201 Tracer les courbes représentatives des fonctions suivantes :

1. $x \mapsto \cos(\arccos x)$ et $x \mapsto \arccos(\cos x)$
2. $x \mapsto \sin(\arcsin x)$ et $x \mapsto \arcsin(\sin x)$
3. $x \mapsto \tan(\arctan x)$ et $x \mapsto \arctan(\tan x)$

202 Résoudre dans $[-1,1]$ l'équation : $\arccos x = 2\arccos\left(\frac{4}{5}\right)$

203 1. Étudier la fonction f définie par $f(x) = \arccos(1-x^2)$

2. Étudier la fonction $g : x \longmapsto \arcsin\left(\dfrac{2x}{1+x^2}\right)$

204 Soient f et g les fonctions définies par :

$$f : x \longmapsto \arctan\left(\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\right) \quad \text{et} \quad g : x \longmapsto \arcsin x$$

1. Déterminer leurs ensembles de définition et leurs ensembles de dérivabilité.
2. Calculer les dérivées f' et g'.
3. En déduire une relation entre $f(x)$ et $g(x)$.

205 Soient x et y deux réels strictement positifs. On pose $z = x + iy$ et on note $\mathrm{Arg}(z)$ l'unique argument de z appartenant à l'intervalle $]-\pi;\pi]$.

1. Justifier que $\mathrm{Arg}(z) = \arctan\dfrac{y}{x}$
2. Développer $(3+i)^2(7+i)$
3. En déduire que $\dfrac{\pi}{4} = 2\arctan\dfrac{1}{3} + \arctan\dfrac{1}{7}$

206 1. Étudier le sens de variation de la fonction

$$f : x \longmapsto \arcsin(x) - \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$$

sur l'intervalle $[0;1[$.

2. En déduire que $\forall x \in [0;1[, \quad \arcsin(x) \leqslant \dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}}$.

2 Pour approfondir

207 Démontrer que pour tout réel $x \in [0,1]$,

$$\arcsin x = \arccos\left(\sqrt{1-x^2}\right)$$

En déduire une formule analoque lorsque $x \in [-1,0]$.

208 Soient f et g les fonctions définies par :

$$f : x \longmapsto \arctan\left(\frac{1}{2x^2}\right) \quad \text{et} \quad g : x \longmapsto \arctan\left(\frac{x}{x+1}\right) - \arctan\left(\frac{x-1}{x}\right)$$

1. Déterminer leurs ensembles de définition et leurs ensembles de dérivabilité.
2. Calculer les dérivées f' et g'.
3. En déduire des relations entre $f(x)$ et $g(x)$.
4. Visualiser les représentations graphiques de f et g dans un même repère.

209 *Final 2016.* On définit la fonction f sur $\mathbb{R}$ par

$$f(t) = t \arctan t$$

1. Soit $x > 0$. Appliquer le théorème des accroissements finis à la fonction f sur l'intervalle $[x, x+1]$.
2. Soit $x > 0$. Montrer que pour tout réel $t \in]x, x+1[$,
$$\frac{x}{1+(1+x)^2} + \arctan x < f'(t) < \frac{x+1}{1+x^2} + \arctan(x+1)$$
3. En déduire un encadrement de $f(x+1) - f(x)$ pour tout réel $x > 0$.
4. En déduire l'existence et la valeur de la limite :
$$\lim_{x\to+\infty} \big((x+1)\arctan(x+1) - x\arctan x\big)$$

3 TP sous Maxima

210 *On utilisera :* `asin, atan, plot2d, limit, sqrt, diff, radcan`

On pose $\quad f(x) = \arcsin\left(\frac{2x}{1+x^2}\right) - 2\arctan(x)$

1. Visualiser le graphe de la fonction f dans la fenêtre $[-15, 15] \times [-4, 4]$.
   Quel est l'ensemble de définition de la fonction f ?
2. Calculer $f(x) + f(-x)$. Que peut-on en déduire pour f ?
3. Donner les limites de f en $+\infty$ et en $-\infty$.
   Calculer $f(0)$, $f(1)$ et $f(\sqrt{3})$.
4. Que peut-on dire de f sur l'intervalle $[-1, +1]$?
5. Pour quelles valeurs de x peut-on calculer $f'(x)$?
   Effectuer ce calcul.
6. f est-elle dérivable en 1 ?
7. Démontrer que $\forall x \geqslant 1$, $f(x) = \pi - 4\arctan x$.

4 Pour travailler seul

211

1. Donner trois expressions différentes pour $\cos(2x)$.
2. Prouver l'égalité :
$$\arccos\left(\frac{3}{4}\right) = 2\arcsin\left(\frac{\sqrt{2}}{4}\right)$$