MTA - Automne 2020
http ://andre.turbergue.free.fr

Éléments de logique

1 Énoncé

15 Soient les quatre assertions suivantes :

$$(P_1)\ \exists x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R}, \quad x+y>0 \quad - \quad (P_2)\, \forall x \in \mathbb{R}, \exists y \in \mathbb{R}; \quad x+y>0$$

$$(P_3)\, \forall x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R}, \quad x+y>0 \quad - \quad (P_4)\, \exists x \in \mathbb{R}; \forall y \in \mathbb{R}, \quad y^2 > x.$$

1. Les assertions P_i sont-elles vraies ou fausses ?
2. Donner leur négation.

2 Corrigé

15

1. (P_1) est fausse. Car sa négation qui est $\forall x \in \mathbb{R}, \exists y \in \mathbb{R}\ ;\ x+y \leqslant 0$ est vraie. Étant donné $x \in \mathbb{R}$, il existe toujours un $y \in \mathbb{R}$ tel que $x+y \leqslant 0$, par exemple on peut prendre $y = -(x+1)$ et alors $x+y = x-x-1 = -1 \leqslant 0$.
2. (P_2) est vraie, pour un x donné, on peut prendre (par exemple) $y = -x+1$ et alors $x+y = 1 > 0$.
   La négation de (P_2) est $\exists x \in \mathbb{R}\ ;\ \forall y \in \mathbb{R}, \quad x+y \leqslant 0$.
3. (P_3) est fausse, par exemple $x = -1$, $y = 0$.
   La négation est $\exists x \in \mathbb{R}, \exists y \in \mathbb{R}\ ;\ x+y \leqslant 0$.
4. (P_4) est vraie, on peut prendre $x = -1$.
   La négation est : $\forall x \in \mathbb{R}, \exists y \in \mathbb{R}\ ;\ y^2 \leqslant x$.

Calculs dans $\mathbb{R}$

1 Énoncés

47 Résoudre dans $\mathbb{R}$,

$$|2-x|+|x+5|=7 \quad \text{et} \quad |2x-1|-2|4x+2|+|x+3|=2$$

48 On se propose dans cet exercice, de résoudre l'équation (E) : $x^3=3x+1$

1. Avec le logiciel MAXIMA, tracer la courbe représentative de la fonction $f : x \longmapsto x^3$ ainsi que la droite d'équation $y=3x+1$. Conjecturer le nombre de solutions de l'équation (E).
2. On admet que l'équation (E) a trois solutions que l'on notera a, b et c avec $a<b<c$.
   À l'aide du logiciel, proposer des valeurs approchées à 10^{-3} près de a, b et c.
3. (a) Exprimer $\sin(3t)$ en fonction de $\sin t$ pour un réel t quelconque.
   (b) Prouver que si α est un réel appartenant à $[-2;2]$ alors il existe un réel t appartenant à $\left[-\dfrac{\pi}{2};\dfrac{\pi}{2}\right]$ tel que $\alpha=2\sin t$.
   (c) En déduire que si α est une solution de (E) alors il existe un réel $t\in\left[-\dfrac{\pi}{2};\dfrac{\pi}{2}\right]$ tel que $\begin{cases}\alpha=2\sin t\\ 1+2\sin(3t)=0\end{cases}$
4. Déterminer les valeurs exactes des trois solutions a, b et c de (E).

2 Corrigés

47 (E_1) : $\quad |2-x|+|x+5|=7$

x	$-\infty$ … -5	-5 … 2	2 … $+\infty$
$\lvert 2-x\rvert=\dots$	$2-x$	$2-x$	$x-2$
$\lvert x+5\rvert=\dots$	$-x-5$	$x+5$	$x+5$
$(E_1)\iff\dots$	$-2x-3=7$ $\Leftrightarrow x=-5$ est solution	$7=7$ $-5\leqslant x\leqslant 2$ sont solutions	$2x+3=7$ $\Leftrightarrow x=2$ est solution

(E_1) admet une infinité de solutions : tous les réels de l'intervalle fermé borné $[-5,2]$.

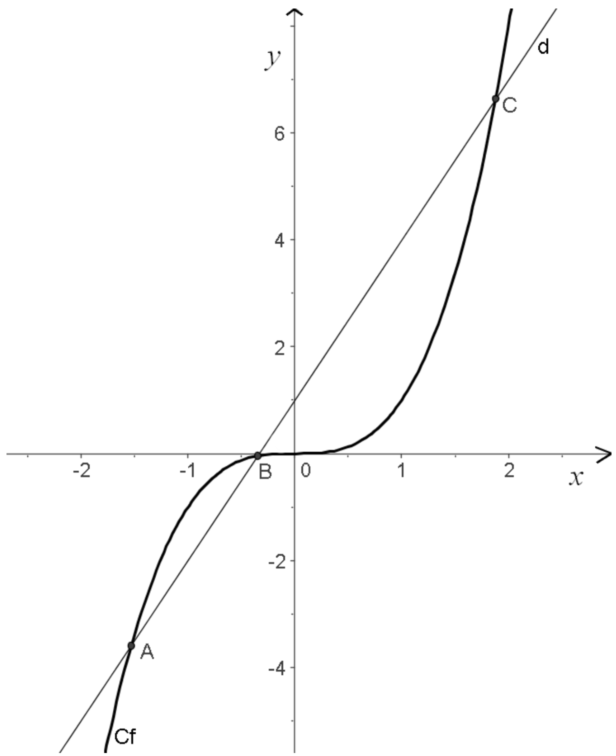
(E_2) : $\quad |2x-1|-2|4x+2|+|x+3|=2$

x	$-\infty$ … -3	-3 … $-1/2$	$-1/2$ … $1/2$	$1/2$ … $+\infty$
$\lvert 2x-1\rvert=\dots$	$1-2x$	$1-2x$	$1-2x$	$2x-1$
$\lvert 4x+2\rvert=\dots$	$-4x-2$	$-4x-2$	$4x+2$	$4x+2$
$\lvert x+3\rvert=\dots$	$-x-3$	$x+3$	$x+3$	$x+3$
$(E_2)\iff\dots$	$5x+2=2$ $\Leftrightarrow x=0$ impossible	$7x+8=2$ $\Leftrightarrow x=-6/7$ est solution	$-9x=2$ $\Leftrightarrow x=-2/9$ est solution	$-5x-2=2$ $\Leftrightarrow x=-4/5$ impossible

L'ensemble des solutions de (E_2) est $\mathscr{S}=\left\{-\dfrac{6}{7},-\dfrac{2}{9}\right\}$.

48

1. La droite d coupe la courbe $\mathscr{C}_f$ en trois points A, B et C. Donc l'équation (E) semble avoir trois solutions.



2. $a \approx -1{,}532$ à 10^{-3} près par excès.
   $b \approx -0{,}347$ à 10^{-3} près par excès.
   $c \approx 1{,}879$ à 10^{-3} près par défaut.

3. (a) Pour tout réel t,
   $\sin(3t) = \sin(2t+t) = \sin(2t)\cos t + \cos(2t)\sin t$
   $= 2\sin t\cos^2 t + (1-2\sin^2 t)\sin t$
   $\boxed{\sin(3t) = 3\sin t - 4\sin^3 t}$

   (b) Soit α un réel appartenant à $[-2;2]$ alors $-1 \leqslant \dfrac{\alpha}{2} \leqslant 1$ donc on voit sur le cercle trigonométrique qu'il existe un point d'ordonnée $\dfrac{\alpha}{2}$ sur ce cercle, situé à droite de l'axe des ordonnées. Ainsi il existe un réel t appartenant à $\left[-\dfrac{\pi}{2};\dfrac{\pi}{2}\right]$ tel que $\sin t = \dfrac{\alpha}{2}$ c.à.d. $\alpha = 2\sin t$.

   (c) Soit α une solution de (E) alors $-2 < \alpha < 2$ d'après la question 2. Donc d'après 3.(b), il existe $t \in \left[-\dfrac{\pi}{2};\dfrac{\pi}{2}\right]$ tel que $\alpha = 2\sin t$ avec $\alpha^3 = 3\alpha + 1$ d'où $8\sin^3 t = 3(2\sin t) + 1 = 6\sin t + 1$.
   Or d'après 3.(a), $4\sin^3 t = 3\sin t - \sin(3t)$
   donc $2(3\sin t - \sin 3t) = 6\sin t + 1$.
   Ainsi $\quad -2\sin 3t = 1 \quad$ puis $\quad 1 + 2\sin 3t = 0$

4. • Soit α une solution de (E) alors il existe $t \in \left[-\dfrac{\pi}{2};\dfrac{\pi}{2}\right]$ tel que $\begin{cases} \alpha = 2\sin t \\ 1 + 2\sin(3t) = 0 \end{cases}$

   • Résolvons dans $\left[-\dfrac{\pi}{2};\dfrac{\pi}{2}\right]$ l'équation $1 + 2\sin(3t) = 0$.

$$1 + 2\sin(3t) = 0 \iff \sin(3t) = \sin\left(\frac{-\pi}{6}\right)$$
$$\iff 3t = \frac{-\pi}{6} + 2k\pi \quad \text{ou} \quad 3t = \pi - \left(\frac{-\pi}{6}\right) + 2k'\pi \quad (k, k' \text{ entiers})$$
$$\iff t = -\frac{\pi}{18} + k\frac{2\pi}{3} \quad \text{ou} \quad t = \frac{7\pi}{18} + k'\frac{2\pi}{3}$$
$$\iff t = -\frac{\pi}{18}\,(k=0) \quad \text{ou} \quad t = \frac{7\pi}{18}\,(k'=0) \quad \text{ou} \quad t = \frac{-5\pi}{18}\,(k'=-1)$$

   • Si α est solution de (E) alors
   $\alpha = -2\sin\dfrac{\pi}{18} \quad$ ou $\quad \alpha = 2\sin\dfrac{7\pi}{18} \quad$ ou $\quad \alpha = -2\sin\dfrac{5\pi}{18}$
   Or on a vu que (E) admettait exactement trois solutions deux à deux distinctes.

   On en déduit que $\boxed{a = -2\sin\dfrac{5\pi}{18}, \quad b = -2\sin\dfrac{\pi}{18}, \quad c = 2\sin\dfrac{7\pi}{18}}$

Ensembles et applications

1 Énoncés

70 Écrire en extension chacun des ensembles suivants :

1. $E = \{n \in \mathbb{N} \mid n^2 = 5\}$
2. $F = \{x \in \mathbb{R} \mid x^2 = 5\}$
3. $G = \{x \in \mathbb{R} \mid x^2 = 1 + x\}$
4. H est l'ensemble des couples d'entiers (i, j) tels que $\begin{cases} 1 \leqslant i \leqslant 6 \\ 1 \leqslant j \leqslant 6 \\ i + j = 10 \end{cases}$

71 Décrire en compréhension (c.à.d. par la donnée d'une propriété caractéristique des éléments) chacun des ensembles suivants :

1. $E = \{1, 3, 5, 7, 9, \ldots\}$
2. $F = \{1, 10, 100, 1000, 10000, \ldots\}$
3. $G =]-\infty; -4] \cup [4; +\infty[$

72 *QCM.* Pour chacune des six questions suivantes, une seule des quatre propositions est exacte.

1. Pour toutes parties A et B d'un ensemble E, $A \cup (A \cap B) = \ldots$

   (a) A (b) B (c) $A \cap B$ (d) $A \cup B$

2. On pose $I = \{x \in \mathbb{R} \mid x^2 < 4\}$. Alors $I \cap \mathbb{Z} = \ldots$

   (a) $\{-1; 1\}$ (b) $\{0; 1; 2\}$ (c) $\{0; -1; 1\}$ (d) $]-2; 2[$

3. Le nombre d'éléments de l'ensemble $\mathscr{P}(\mathscr{P}(\{a, b\}))$ est égal à …

   (a) 2 (b) 4 (c) 8 (d) 16

4. On lance 3 fois de suite un dé cubique dont les faces sont numérotées de 1 à 6. On note les triplets ainsi obtenus. Combien y a-t-il de triplets différents ?

   (a) $3!$ (b) 3^6 (c) 6^3 (d) A_6^3

5. Quel est le coefficient de x^{87} dans l'écriture développée du polynôme $(1-x)^{100}$?

   (a) 87^{100} (b) $\binom{100}{87}$ (c) -87^{100} (d) $-\binom{100}{13}$

6. Soit E un ensemble fini de cardinal n où $n \in \mathbb{N}^*$.
   A et B sont deux parties de E, de cardinaux respectifs p et q tels que $1 \leqslant p \leqslant q \leqslant n$.
   On suppose que $A \subset B$. Quel est le nombre de parties X de E telles que $A \subset X \subset B$?

   (a) 2^q (b) $2^q - 2^p$ (c) 2^{q-p} (d) $\binom{q}{p}$

2 Corrigés

70

1. $E = \emptyset$
2. $F = \left\{-\sqrt{5}, \sqrt{5}\right\}$
3. $G = \left\{\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}, \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\right\}$
4. $H = \{(4;6), (5;5), (6;4)\}$

71

1. $E = \{2k+1 \in \mathbb{N} \mid k \in \mathbb{N}\} = \left\{n \in \mathbb{N} \mid \left(\exists k \in \mathbb{N} ; n = 2k+1\right)\right\}$
2. $F = \left\{10^k \in \mathbb{R} ; k \in \mathbb{N}\right\}$
3. $G = \{x \in \mathbb{R} ; |x| \geqslant 4\}$

72

1.(a) 2.(c) 3.(d) 4.(c) 5.(d) 6.(c)

Suites réelles

1 Énoncés

93 Calculer, lorsqu'elles convergent, les limites des suites définies par

$$u_n = n - \sqrt{n^2 - n} \quad ; \quad v_n = \sqrt{n(n+a)} - n$$

$$w_n = \frac{n}{2}\sin\frac{n\pi}{2} \quad ; \quad x_n = \frac{\sin(n^2) - \cos(n^3)}{n}$$

94 Soit (u_n) une suite de nombres réels strictement positifs. On suppose que

$$\sqrt[n]{u_n} \underset{(n\to+\infty)}{\longrightarrow} \ell$$

1. Montrer que si $\ell < 1$ alors $u_n \underset{(n\to+\infty)}{\longrightarrow} 0$.
2. Montrer que si $\ell > 1$ alors $u_n \underset{(n\to+\infty)}{\longrightarrow} +\infty$.
3. Montrer que dans le cas $\ell = 1$ on ne peut rien conclure.

95 On considère les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définies par

$$u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^3} \qquad \text{et} \qquad v_n = u_n + \frac{1}{2n^2}$$

1. Démontrer que les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ sont convergentes et ont la même limite.
   On pose $\ell = \lim\limits_{n\longrightarrow+\infty} u_n$
2. Déterminer un entier p tel que u_p soit une approximation de ℓ à 0,01 près.
3. Reproduire et compléter le tableau suivant à l'aide d'une calculatrice :

n	valeur approchée de u_n à 0,001 près par défaut	valeur approchée de v_n à 0,001 près par excès
5		
10		
15		

4. Déduire de ce tableau une valeur décimale approchée de ℓ aussi précise que possible.
   On indiquera la précision de cette approximation.

2 Corrigés

93

- $\forall \in \mathbb{N}^*$, $u_n = \dfrac{(n-\sqrt{n^2-n})(n+\sqrt{n^2-n})}{n+\sqrt{n^2-n}} = \dfrac{n}{n\left(1+\sqrt{1-\frac{1}{n}}\right)} \underset{(n\to+\infty)}{\longrightarrow} \dfrac{1}{2}$
- $\forall n \in \mathbb{N}^* \cap [-a, +\infty[$, $\quad v_n = \dfrac{(\sqrt{n(n+a)}-n)(\sqrt{n(n+a)}+n)}{(\sqrt{n(n+a)}+n)}$

$= \dfrac{an}{n\left(\sqrt{1+\frac{a}{n}}+1\right)} = \dfrac{a}{\sqrt{1+\frac{a}{n}}+1} \underset{(n\to+\infty)}{\longrightarrow} \dfrac{a}{2}$

- $\forall n \in \mathbb{N}$, $w_{2n} = 0$ et $w_{4n+1} = \left(n+\dfrac{1}{2}\right)\sin\left(2n\pi+\dfrac{\pi}{2}\right) = n + 1/2 \underset{(n\to+\infty)}{\longrightarrow} +\infty$

La suite (w_n) ne converge pas.

- $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $|x_n| \leqslant \dfrac{2}{n}$. D'après le théorème d'encadrement, $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = 0$

94

1. Soit $\rho = \dfrac{1+\ell}{2}$, de sorte que $\ell < \rho < 1$. Comme $\sqrt[n]{u_n} \to \ell < \rho$, il existe un rang N à partir duquel $\sqrt[n]{u_n} \leqslant \rho$, donc $\forall n \geqslant N$, $0 \leqslant u_n \leqslant \rho^n \underset{(n\to+\infty)}{\longrightarrow} 0$.
2. Même raisonnement, mais par minoration.
3. $u_n = n$, $u_n = 1$, et $u_n = \dfrac{1}{n}$ sont des exemples qui montrent qu'on ne peut rien conclure.

95

1. • $\forall n\in\mathbb{N}^*,\ u_{n+1}-u_n=\dfrac{1}{(n+1)^3}$ Alors $\forall n\in\mathbb{N}^*,\ u_{n+1}-u_n>0$

Donc la suite $\boxed{(u_n)\text{ est strictement croissante}}$

• $\forall n\in\mathbb{N}^*,\ v_{n+1}-v_n=(u_{n+1}-u_n)+\dfrac{1}{2(n+1)^2}-\dfrac{1}{2n^2}$

$=\dfrac{1}{(n+1)^3}+\dfrac{1}{2(n+1)^2}-\dfrac{1}{2n^2}=\dfrac{2n^2+n^2(n+1)-(n+1)^3}{2n^2(n+1)^3}$

$=\dfrac{2n^2+n^3+n^2-(n^3+3n^2+3n+1)}{2n^2(n+1)^3}=\dfrac{-(3n+1)}{2n^2(n+1)^3}$

Alors $\forall n\in\mathbb{N}^*,\ v_{n+1}-v_n<0$.

Donc la suite $\boxed{(v_n)\text{ est strictement décroissante}}$

• $\forall n\in\mathbb{N}^*,\ v_n-u_n=\dfrac{1}{2n^2}$ avec $\lim\limits_{n\to+\infty}2n^2=+\infty$. Donc $\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty}v_n-u_n=0}$

• Ainsi les suites (u_n) et (v_n) sont adjacentes. On en déduit qu'elles sont convergentes et qu'elles ont même limite.

Cette limite commune est notée ℓ.

2. Nous avons $\forall n\in\mathbb{N}^*,\ u_n<\ell<v_n$. Donc $\forall n\in\mathbb{N}^*,\ 0<\ell-u_n<\dfrac{1}{2n^2}$

D'où $|u_n-\ell|<\dfrac{1}{2n^2}$ Pour que u_p soit une approximation de ℓ à 0,01 près, il suffit que $\dfrac{1}{2p^2}\leqslant 0,01$ c.à.d. $p^2\geqslant 50$. On prendra $\boxed{p=8}$

3.

n	valeur approchée de u_n à 0,001 près par défaut	valeur approchée de v_n à 0,001 près par excès
5	1,185	1,206
10	1,197	1,203
15	1,199	1,203

4. D'après le tableau ci-dessus : $1,199\leqslant u_{15}<\ell<v_{15}\leqslant 1,203$

Alors $1,199<\ell<1,203$ Posons $a=\dfrac{1,199+1,203}{2}=1,201$

On peut dire que $a=1,201$ est une valeur décimale approchée de ℓ à la précision $\dfrac{1,203-1,199}{2}=0,002$

Limites et continuité

1 Énoncés

118 Étudier la limite éventuelle de la fonction f à l'endroit indiqué :

1. $f : x \longmapsto \dfrac{\cos x}{1-x}$ en $+\infty$
2. $f : x \longmapsto \dfrac{\tan(3x)}{\sqrt{x}}$ en 0^+
3. $f : x \longmapsto \dfrac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{x}$ en 0

119 L'équation $x^5 = 5x-1$ admet-elle des solutions ? Si oui, combien ?

120 Pour tout entier naturel n, on note f_n la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f_n(x) = x^5 + nx - 1$$

1. Déterminer les limites de f_n en $+\infty$ et en $-\infty$.
2. Étudier le sens de variation de la fonction f_n .
3. Démontrer que l'équation d'inconnue x, $f_n(x) = 0$ admet une solution unique dans l'intervalle $[0;1]$.
   Cette solution, qui dépend de n, sera notée u_n .
4. (a) Donner la valeur exacte de u_0 .
   (b) À l'aide de la calculatrice, proposer une valeur décimale approchée de u_1 à 10^{-3} près par excès.
5. (a) Quel est le signe de $f_n\left(\dfrac{1}{n}\right)$?
   Prouver que pour tout entier naturel n non nul, $u_n \leqslant \dfrac{1}{n}$
   (b) En déduire la limite de u_n lorsque n tend vers $+\infty$.
6. Déterminer un équivalent simple de u_n lorsque n tend vers $+\infty$.

2 Corrigés

118

1. Soit $x > 1$. $-1 \leqslant \cos x \leqslant 1$ et $1-x<0$ d'où $\dfrac{-1}{1-x} \geqslant \dfrac{\cos x}{1-x} \geqslant \dfrac{1}{1-x}$

   Donc $\forall x > 1$, $\boxed{\dfrac{-1}{x-1} \leqslant f(x) \leqslant \dfrac{1}{x-1}}$ Or $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1}{x-1} = 0$.

   Ainsi $\lim\limits_{+\infty} f = 0$

2. $\forall x \in \left]0;\dfrac{\pi}{6}\right[$, $f(x) = \dfrac{\sin(3x)}{\sqrt{x}} \times \dfrac{1}{\cos(3x)}$ $\boxed{f(x) = \dfrac{\sin(3x)}{3x} \times \dfrac{3\sqrt{x}}{\cos(3x)}}$

   Or $\lim\limits_{x\to0} 3x = 0$ et $\lim\limits_{t\to0} \dfrac{\sin t}{t} = 1$ d'où par composition, $\lim\limits_{x\to0} \dfrac{\sin(3x)}{3x} = 1$

   De plus $\lim\limits_{x\to0} \cos(3x) = \cos(0) = 1$ et $\lim\limits_{x\to0} 3\sqrt{x} = 0$

   Par conséquent $\lim\limits_{0} f = 0$

3. $\forall x \in [-1;1]\setminus\{0\}$, $f(x) = \dfrac{(\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x})(\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x})}{x(\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x})}$

   $\forall x \in [-1;1]\setminus\{0\}$, $\boxed{f(x) = \dfrac{2}{\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}}}$

   Or $\lim\limits_{x\to0} \sqrt{1+x} = \lim\limits_{x\to0} \sqrt{1-x} = 1$. Donc $\lim\limits_{0} f = 1$

119 On introduit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^5 - 5x + 1$.
Alors l'équation $x^5 = 5x-1$ équivaut à $f(x) = 0$.
Étudions la fonction f.

1. Limites aux bornes de l'ensemble de définition.
   $\lim\limits_{+\infty} f = \lim\limits_{x\to+\infty} x^5 = +\infty$ et $\lim\limits_{-\infty} f = -\infty$.
2. Sens de variations de la fonction f.
   En tant que fonction polynômiale, f est dérivable sur $\mathbb{R}$.
   Pour tout réel x, $f'(x) = 5x^4 - 5 = 5(x^2-1)(x^2+1)$
   Puisque $x^2+1 \geqslant 1 > 0$, $f'(x)$ est du signe du trinôme x^2-1 dont les racines sont 1 et -1.
   On en déduit immédiatement le tableau de variations suivant :

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
f	$-\infty$	↗	5	↘	-3	↗	$+\infty$

3. Application du théorème de la bijection.

• La fonction f est continue et strictement croissante sur $]-\infty;-1[$.
Le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires permet alors de dire que f est bijective de $]-\infty;-1[$ sur l'intervalle image

$$f(]-\infty;-1[) = \left]\lim_{-\infty} f\,; f(-1)\right[=]-\infty;5[$$

Autrement dit, tout réel de $]-\infty;5[$ admet un unique antécédent par la fonction f dans l'intervalle $]-\infty;-1[$.
En particulier l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution dans l'intervalle $]-\infty;5[$, on notera α_1 cette première solution.

• On montre de façon analogue que l'équation $f(x) = 0$ admet une seule solution α_2 dans l'intervalle $[-1;1]$. Et enfin, l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution dans $]1;+\infty[$.

Finalement $\boxed{\text{l'équation } f(x)=0 \text{ admet exactement trois solutions}}$ α_1, α_2 et α_3 telles que :

$$\alpha_1 < -1 \leqslant \alpha_2 \leqslant 1 < \alpha_3$$

4. Utilisation de la calculatrice.
Par exemple, pour obtenir une approximation de α_2 sur Ti89, on entre :
`solve(x^5=5*x-1,x)|x>-1 and x<1`

$\boxed{\alpha_1 \approx -1{,}542}$ à 10^{-3} près **par défaut**.
$\boxed{\alpha_2 \approx 0{,}200}$ à 10^{-3} près par défaut.
$\boxed{\alpha_3 \approx 1{,}441}$ à 10^{-3} près par excès.

120

1. $\lim\limits_{x\to+\infty} f_n(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} x^5 = +\infty$. De même $\lim\limits_{x\to-\infty} f_n(x) = -\infty$
2. f_n est la somme des deux fonctions $u : x \mapsto x^5$ et $v : x \mapsto nx-1$.

La fonction u est une fonction puissance dont l'exposant 5 est un entier naturel impair. Donc u est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

La fonction v est affine, de coefficient directeur $n \geqslant 0$. Donc v est croissante sur $\mathbb{R}$.

Par conséquent $f_n = u + v$ est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

x	$-\infty$	$+\infty$
f_n	$-\infty$ $\nearrow$	$+\infty$

3. En tant que fonction polynôme, f_n est continue sur $\mathbb{R}$ a fortiori sur $[0;1]$.
Elle est de plus strictement croissante sur $[0;1]$.
Or $f_n(1) = n$ et $f_n(0) < 0 < f_n(1)$. On en déduit, d'après le **théorème de la bijection**, que l'équation d'inconnue x, $f_n(x) = 0$ admet une unique solution u_n dans l'intervalle $[0;1]$.

On retiendra que $f_n(u_n) = 0$ et que $0 \leqslant u_n \leqslant 1$.

4. (a) u_0 est l'unique solution dans $[0;1]$ de l'équation $x^5 - 1 = 0$. Donc $\boxed{u_0 = 1}$
(b) $\boxed{u_1 \approx 0{,}755}$ à 10^{-3} près par excès.

5. (a) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Alors $f_n(1/n) = \left(\dfrac{1}{n}\right)^5 + n\left(\dfrac{1}{n}\right) - 1 = \dfrac{1}{n^5} + 1 - 1 = \dfrac{1}{n^5}$
Donc $f_n(1/n) > 0$ c.à.d. $f_n(1/n) > f_n(u_n)$ $(\star)$

Si l'on avait $u_n > \dfrac{1}{n}$ alors on aurait, d'après la croissance de f_n sur $\mathbb{R}$, $f_n(u_n) \geqslant f_n\left(\dfrac{1}{n}\right)$ ce qui contredit $(\star)$.

Par conséquent $u_n \leqslant \dfrac{1}{n}$

(b) D'après 4. et 6.(a), $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $0 \leqslant u_n \leqslant \dfrac{1}{n}$ avec $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{n} = 0^+$
Le théorème des gendarmes permet de conclure que $\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0^+}$

6. On rappelle que pour tout entier naturel n, $f_n(u_n) = 0$

c.à.d. $u_n^5 + nu_n - 1 = 0$. D'où $\forall n \in \mathbb{N}$, $nu_n = 1 - u_n^5$
Or $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n^5 = 0$. Donc $\lim\limits_{n\to+\infty} (1 - u_n^5) = 1$. Finalement

$$\lim_{n\to+\infty} nu_n = 1 \quad \text{et} \quad \boxed{u_n \underset{(n\to+\infty)}{\sim} \frac{1}{n}}$$

Nombres complexes

1 Énoncés

146

1. (a) Calculer les racines carrées de $\dfrac{1+i}{\sqrt{2}}$.
   (b) Mettre $\dfrac{1+i}{\sqrt{2}}$ sous forme exponentielle.
   (c) En déduire les valeurs de $\cos(\pi/8)$ et $\sin(\pi/8)$.
2. Calculer les valeurs de $\cos(\pi/12)$ et $\sin(\pi/12)$.

147 On désigne par θ un nombre réel tel que $-\pi < \theta < \pi$. On pose $u = 1 + \mathrm{e}^{i\theta}$

1. Écrire $1 + \mathrm{e}^{i\theta}$ sous forme exponentielle.
2. Montrer que u est solution dans $\mathbb{C}$ de l'équation d'inconnue z :

$$z^2 - (2 + 2\cos\theta)z + (2 + 2\cos\theta) = 0$$

En déduire la seconde solution de cette équation.

148

1. (a) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $Z^4 = 1$.
   (b) Déduire de la question précédente les solutions dans $\mathbb{C}$ de l'équation d'inconnue z :

$$\left(\frac{2z+1}{z-1}\right)^4 = 1$$

   On donnera les solutions sous forme algébrique.
2. (a) Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormal direct $(O\,;\vec{u}\,,\vec{v}\,)$
   Placer les points A, B et C d'affixes respectives :

$$a = -2 \quad ; \quad b = -\frac{1}{5} - \frac{3}{5}i \quad \text{et} \quad c = -\frac{1}{5} + \frac{3}{5}i$$

   (b) Prouver que les points O, A, B et C sont situés sur un cercle, que l'on déterminera.
3. Placer le point D d'affixe $d = -\dfrac{1}{2}$.
   Exprimer sous forme trigonométrique le nombre complexe z' défini par :

$$z' = \frac{a-c}{d-c}$$

   En déduire le rapport $\dfrac{CA}{CD}$. Quelle autre conséquence géométrique peut-on tirer de l'expression de z' ?

2 Corrigés

146

1. Par la méthode usuelle nous calculons les racines carrées opposées ω et $-\omega$ de $z = \dfrac{1+i}{\sqrt{2}}$, nous obtenons

$$\omega = \sqrt{\frac{\sqrt{2}+1}{2\sqrt{2}}} + i\sqrt{\frac{\sqrt{2}-1}{2\sqrt{2}}} = \frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2} + i\frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}.$$

mais nous remarquons que z s'écrit également

$$z = \mathrm{e}^{i\frac{\pi}{4}}$$

et $\mathrm{e}^{i\frac{\pi}{8}}$ vérifie

$$\left(\mathrm{e}^{i\frac{\pi}{8}}\right)^2 = \mathrm{e}^{\frac{2i\pi}{8}} = \mathrm{e}^{i\frac{\pi}{4}}.$$

Cela signifie que $\mathrm{e}^{i\frac{\pi}{8}}$ est une racine carrée de z, donc $\mathrm{e}^{i\frac{\pi}{8}} = \cos\dfrac{\pi}{8} + i\sin\dfrac{\pi}{8}$ est égal à ω ou $-\omega$. Comme $\cos\dfrac{\pi}{8} > 0$ alors $\mathrm{e}^{i\frac{\pi}{8}} = \omega$ et donc par identification des parties réelles et imaginaires :

$$\cos\frac{\pi}{8} = \sqrt{\frac{\sqrt{2}+1}{2\sqrt{2}}} \quad \text{et} \quad \sin\frac{\pi}{8} = \sqrt{\frac{\sqrt{2}-1}{2\sqrt{2}}}.$$

2. On remarque que $\dfrac{\pi}{12} = \dfrac{\pi}{3} - \dfrac{\pi}{4}$. D'après l'une des formules d'addition de trigonométrie, pour tous réels x et y,
$\cos(x-y) = \cos[x+(-y)] = \cos x\cos(-y) - \sin x\sin(-y)$
$= \cos x\cos y + \sin x\sin y$

D'où $\cos\dfrac{\pi}{12} = \cos\dfrac{\pi}{3}\cos\dfrac{\pi}{4} + \sin\dfrac{\pi}{3}\sin\dfrac{\pi}{4} = \dfrac{1}{2}\dfrac{\sqrt{2}}{2} + \dfrac{\sqrt{3}}{2}\dfrac{\sqrt{2}}{2} = \dfrac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$

On vérifie de même que $\sin\dfrac{\pi}{12} = \sin\left(\dfrac{\pi}{3} - \dfrac{\pi}{4}\right) = \dfrac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$

147

1. $1+\mathrm{e}^{i\theta} = \mathrm{e}^{i\frac{\theta}{2}} \times \left(\mathrm{e}^{-i\frac{\theta}{2}} + \mathrm{e}^{i\frac{\theta}{2}}\right) = \mathrm{e}^{i\frac{\theta}{2}} \times 2\cos\dfrac{\theta}{2} = 2\cos\dfrac{\theta}{2}\mathrm{e}^{i\frac{\theta}{2}}$

Comme $\theta \in]-\pi,\pi[$, $\dfrac{\theta}{2} \in \left]-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right[$. Donc $2\cos\dfrac{\theta}{2} > 0$.

Ainsi $2\cos\dfrac{\theta}{2}\mathrm{e}^{i\frac{\theta}{2}}$ est la forme exponentielle de $1+\mathrm{e}^{i\theta}$.

2. Résolvons l'équation

$$z^2 - 2(1+\cos\theta)z + 2(1+\cos\theta) = 0 \qquad (1)$$

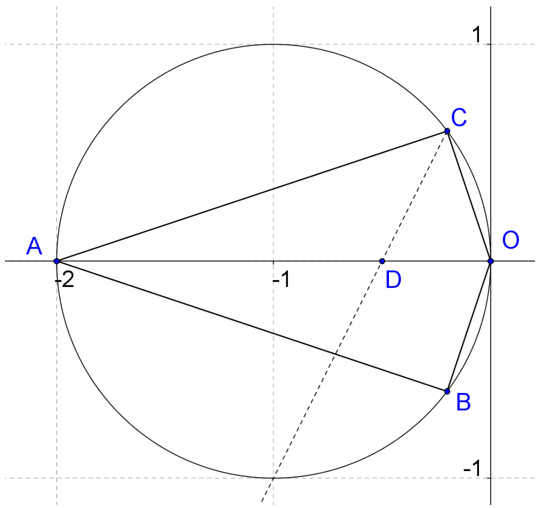
Son discriminant est : $\Delta = 4(1+\cos\theta)^2 - 8(1+\cos\theta) =$
$(1+\cos\theta)(4(1+\cos\theta)-8) = 4(\cos\theta+1)(\cos\theta-1) = -4\sin^2\theta$
$\Delta = (2i\sin\theta)^2$.
Les solutions de (1) sont donc
$\dfrac{2(1+\cos\theta)-2i\sin\theta}{2} = 1+\cos\theta - i\sin\theta$
et $\dfrac{2(1+\cos\theta)+2i\sin\theta}{2} = 1+\cos\theta + i\sin\theta = u$
Conclusion : les solutions de l'équation (1) sont u et $\overline{u}$.

148

1. (a) $Z^4=1 \iff (Z^2-1)(Z^2+1)=0 \iff (Z-1)(Z+1)(Z-i)(Z+i)=0$ admet comme ensemble solutions
$\boxed{\mathscr{S}=\left\{e^{\frac{i2k\pi}{4}}, k\in [\![0;3]\!]\right\}=\{1\,,\,i\,,\,-i\,,\,-1\}}$

   (b) On pose $Z=\dfrac{2z+2}{z-1}$ avec $z\neq 1$ et on utilise les solutions précédentes :
$Z=1 \Leftrightarrow 2z+1=z-1 \Leftrightarrow z=-2$
$Z=-1 \Leftrightarrow 2z+1=-z+1 \Leftrightarrow z=0$
$Z=i \Leftrightarrow 2z+1=iz-i \Leftrightarrow z=\dfrac{-1-i}{2-i} \Leftrightarrow z=-\dfrac{1}{5}-\dfrac{3}{5}i$
$Z=-i \Leftrightarrow 2z+1=-iz+i \Leftrightarrow z=\dfrac{-1+i}{2+i} \Leftrightarrow z=-\dfrac{1}{5}+\dfrac{3}{5}i$
L'équation admet comme ensemble de solutions :
$\boxed{\mathscr{S}=\left\{0\,,\,-2\,,\,-\dfrac{1}{5}-\dfrac{3}{5}i\,,\,-\dfrac{1}{5}+\dfrac{3}{5}i\right\}}$

2. a)



b) Calculons une mesure de l'angle orienté de vecteurs $\left(\widehat{\overrightarrow{CA},\overrightarrow{CO}}\right)$ en utilisant les affixes :

$$\left(\widehat{\overrightarrow{CA},\overrightarrow{CO}}\right)=\arg\left(\frac{0-c}{a-c}\right)=\arg\left(\frac{\frac{1}{5}-i\frac{3}{5}}{-2-\left(-\frac{1}{5}+i\frac{3}{5}\right)}\right)$$
$$=\arg\left(\frac{\frac{1}{5}-i\frac{3}{5}}{-\frac{9}{5}-\frac{3}{5}i}\right)=\arg\left(\frac{1}{3}i\right)$$
$$=\frac{\pi}{2}\text{ modulo }2\pi$$

donc les vecteurs $\overrightarrow{CA}$ et $\overrightarrow{CO}$ sont orthogonaux. On en déduit que le point C appartient au cercle de diamètre $[AO]$.
D'autre part les points B et C sont symétriques par rapport à l'axes des abscisses car $\overline{c}=b$.
D'où $\left(\widehat{\overrightarrow{BA},\overrightarrow{BO}}\right)=-\left(\widehat{\overrightarrow{CA},\overrightarrow{CO}}\right)=-\dfrac{\pi}{2}$
donc le point B appartient aussi au cercle de diamètre $[AO]$, ce qui prouve bien que les quatre points A, O, B et C sont situés sur le cercle de diamètre $[AO]$.

3. Nous avons : $z'=\dfrac{a-c}{d-c}=\dfrac{-2-\left(-\frac{1}{5}+\frac{3}{5}i\right)}{-\frac{1}{2}-\left(-\frac{1}{5}+\frac{3}{5}i\right)}=\dfrac{-\frac{9}{5}-\frac{3}{5}i}{-\frac{3}{10}-\frac{3}{5}i}=2-2i$
Or $|2-2i|=\sqrt{4+4}=2\sqrt{2}$ et

$$2-2i=2\sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}-i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=2\sqrt{2}\left(\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right)$$

On en déduit donc que $z'=2-2i=2\sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{4}}$
En utilisant les modules :

$$\frac{CA}{CD}=\frac{|a-c|}{|d-c|}=\left|\frac{a-c}{d-c}\right|=|z'|=2\sqrt{2}$$

On a aussi :

$$\left(\widehat{\overrightarrow{CD},\overrightarrow{CA}}\right)=\arg\left(\frac{a-c}{d-c}\right)=-\frac{\pi}{4}$$

Comme $\left(\widehat{\overrightarrow{CO},\overrightarrow{CA}}\right)=-\dfrac{\pi}{2}$

on peut en déduire que la droite (CD) est la bissectrice de l'angle $\left(\widehat{\overrightarrow{CO},\overrightarrow{CA}}\right)$.

Dérivation

1 Énoncés

171 Pour chacune des fonctions suivantes, déterminer le domaine de définition, les branches infinies aux bornes du domaine de définition, puis calculer leur dérivée.

1. $f(x) = \dfrac{x - \ln(1+x)}{x}$
2. $f(x) = \dfrac{-x\ln(x)}{1+x^2}$
3. $f(x) = \ln\left(\dfrac{e^x - 1}{x}\right)$
4. $f(x) = \dfrac{-x}{(1-x)\ln(1-x)}$

172 Pour tout entier naturel n non nul, on définit la fonction f_n sur $[-\pi, \pi]$ par :

$$f_n(x) = \sqrt{\frac{1}{n} + \sin^2(x)}$$

1. Calculer $f_n(0)$ et $f_n(\pi)$.
2. Montrer que f_n est une fonction paire.
3. (a) Justifier que f_n est dérivable sur $[-\pi, \pi]$ et calculer $f_n'(x)$.
   (b) Étudier les variations de la fonction f_n sur $[0, \pi]$. Dresser le tableau de variations de f_n sur $[-\pi, \pi]$.
4. (a) Soit x un réel fixé de l'intervalle $[-\pi, \pi]$.
   Déterminer la limite de $f_n(x)$ lorsque n tend vers $+\infty$.
   (b) On pose pour tout réel x de $[-\pi, \pi]$, $\varphi(x) = \lim\limits_{n \to +\infty} f_n(x)$
   La fonction φ est-elle continue en zéro ?
   Est-elle dérivable en zéro ?

2 Corrigés

171

1. $\mathscr{D}_f =]-1;0[\cup]0;+\infty[$, asymptote d'équation $y = 1$ en $+\infty$, asymptote verticale d'équation $x = -1$ et prolongement par continuité en 0 en posant $f(0) = 0$.

   De plus f est dérivable sur $\mathscr{D}_f$ avec $\forall x \in \mathbb{R}^*$, $f'(x) = \dfrac{(1+x)\ln(1+x) - x}{x^2(1+x)}$

   On verra plus tard (en MTB) que pour tout réel x voisin de 0,

   $$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + x^2\varepsilon(x) \quad \text{avec } \lim_{x\to 0} \varepsilon(x) = 0$$

   Donc f est dérivable en zéro avec $f'(0) = 1/2$.
   Mieux : f est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $]-1, +\infty[$.
2. $\mathscr{D}_f =]0;+\infty[$, prolongement par continuité en 0 en posant $f(0) = 0$, asymptote d'équation $y = 0$ en $+\infty$ et

   f est dérivable sur $\mathscr{D}_f$ avec $f'(x) = \dfrac{(x^2-1)\ln(x) - (x^2+1)}{(x^2+1)^2}$.

   $\forall x > 0$, $\dfrac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \dfrac{f(x)}{x} = -\dfrac{\ln x}{1+x^2} \underset{(x\to 0^+)}{\longrightarrow} +\infty$. Donc f n'est pas dérivable en zéro, mais sa courbe représentative admet une demi-tangente verticale au point $O(0,0)$ origine du repère.
3. $\mathscr{D}_f = \mathbb{R}^*$, prolongement par continuité en 0 en posant $f(0) = 0$, branche parabolique de direction la droite d'équation $y = x$ en $+\infty$, branche parabolique de direction l'axe (Ox) en $-\infty$.

   f est dérivable sur $\mathbb{R}^*$ et $\forall x \in \mathbb{R}^*$, $f'(x) = \dfrac{xe^x - e^x + 1}{x(e^x - 1)}$.

   On verra plus tard (en MTB) que pour tout réel x voisin de 0,

   $$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + x^2\varepsilon(x) \quad \text{avec } \lim_{x\to 0} \varepsilon(x) = 0$$

   D'où $\lim\limits_{x\to 0} f'(x) = \dfrac{1}{2}$. Donc f est dérivable en zéro et $f'(0) = 1/2$.
   Mieux : f est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.
4. $\mathscr{D}_f =]-\infty;1[$, asymptote verticale d'équation $x = 1$ ($\lim\limits_{1} f = +\infty$), asymptote d'équation $y = 0$ en $-\infty$, et $f'(x) = -\dfrac{\ln(1-x) + x}{((1-x)\ln(1-x))^2}$

172

1. $\boxed{f_n(0) = f_n(\pi) = \sqrt{\frac{1}{n}}}$

2. $[-\pi, \pi]$ est centré en 0 et $\forall x \in [-\pi, \pi]$
$f_n(-x) = \sqrt{\frac{1}{n} + \sin^2(-x)} = \sqrt{\frac{1}{n} + (-\sin x)^2} = f_n(x)$

3. (a) Notons u_n la fonction définie sur $[-\pi, \pi]$ par $\boxed{u_n(x) = \frac{1}{n} + \sin^2(x)}$
En tant produit et somme de fonctions dérivables sur $[-\pi, \pi]$, u_n est elle-même dérivable sur $[-\pi, \pi]$. D'autre part, un carré étant toujours positif, $\forall x \in [-\pi, \pi]$, $u_n(x) \geqslant \frac{1}{n} + 0 > 0$.
Donc la fonction $f_n = \sqrt{u_n}$ est dérivable sur $[-\pi, \pi]$.
De plus, $u_n'(x) = 0 + 2\sin(x)\sin'(x) = 2\sin x \cos x = \sin(2x)$
Donc $f_n'(x) = \frac{u_n'(x)}{2\sqrt{u_n(x)}} = \frac{\sin(2x)}{2f_n(x)}$

(b) Résolvons dans $[0, \pi]$ l'inéquation $f_n'(x) > 0$.
$f_n'(x) > 0 \iff \sin(2x) > 0 \iff 0 < 2x < \pi$
$\iff 0 < x < \frac{\pi}{2}$
Donc la fonction f_n est strictement croissante sur $[0, \frac{\pi}{2}]$
On montre de façon analogue que
$\forall x \in \left]\frac{\pi}{2}, \pi\right[$, $f_n'(x) < 0$. Donc f_n décroît strictement sur $\left]\frac{\pi}{2}, \pi\right[$

x	$-\pi$		$-\frac{\pi}{2}$		0		$\frac{\pi}{2}$		π
$f_n'(x)$	0	+	0	−	0	+	0	−	0
f_n	b_n	↗	a_n	↘	b_n	↗	a_n	↘	b_n

avec $a_n = \sqrt{1 + \frac{1}{n}}$ et $b_n = \sqrt{\frac{1}{n}}$

4. (a) x étant fixé, $\lim\limits_{n \longrightarrow +\infty} u_n(x) = \sin^2(x)$ et $\lim\limits_{t \longrightarrow \sin^2(x)} \sqrt{t} = \sqrt{\sin^2(x)} = |\sin x|$ par continuité de la fonction racine carrée sur $\mathbb{R}^+$.
On en déduit par composition que
$\boxed{\lim\limits_{n \to +\infty} f_n(x) = |\sin x|}$

(b) $\forall x \in [-\pi, \pi]$, $\varphi(x) = |\sin x| = \begin{cases} \sin x \text{ si } x \in [0, \pi] \\ -\sin x \text{ si } x \in [-\pi, 0] \end{cases}$
$\lim\limits_{x \to 0^+} \varphi(x) = \lim\limits_{x \to 0^-} \varphi(x) = 0 = \varphi(0)$ donc $\boxed{\varphi \text{ est continue en zéro}}$.
Mais $\lim\limits_{x \to 0^+} \frac{\varphi(x) - \varphi(0)}{x - 0} = \lim\limits_{x \to 0^+} \frac{\sin x}{x} = 1$ et
$\lim\limits_{x \to 0^-} \frac{\varphi(x) - \varphi(0)}{x - 0} = \lim\limits_{x \to 0^-} \frac{-\sin x}{x} = -1$
Donc $\boxed{\varphi \text{ n'est pas dérivable en } 0}$

Polynômes

1 Énoncés

195 Soient $\theta \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}$.
Déterminer le reste de la division euclidienne du polynôme $P(X) = (X\sin\theta + \cos\theta)^n$ par X^2+1.

196 Soit n un entier supérieur ou égal à 2. On considère le polynôme $P \in \mathbb{C}[X]$ défini par :

$$P = (1+X)^n - X^n$$

1. Quel est le degré de P ? Donner son coefficient dominant.
2. Démontrer que si z est une racine de P alors $\Re e(z) = -\frac{1}{2}$
3. (a) Démontrer que, pour tout réel x, $\quad e^{ix} - 1 = 2i\sin\left(\frac{x}{2}\right)e^{i\frac{x}{2}}$
   (b) Déterminer les racines de P. On les exprimera en fonction des racines n-ièmes de l'unité.
   (c) Écrire chaque racine de P sous forme exponentielle. En déduire le module et un argument de chacune de ces racines.
4. On note $z_1, z_2, \ldots, z_{n-1}$ les racines du polynôme P. Calculer la somme :
$$\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{z_k}$$
5. Résoudre dans $\mathbb{R}$, en discutant suivant les valeurs de l'entier $n \geqslant 2$, l'équation d'inconnue x :
$$(1+x)^n = x^n$$

197 *Final 2013* .

1. Soit P un polynôme à coefficients réels $\quad P = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k$.
   Montrer que si $\alpha \in \mathbb{C}$ est une racine de P, alors $\overline{\alpha}$ est aussi une racine de P.
2. On considère le polynôme
$$Q = -X^5 + 2X^4 + 7X^3 + 2X^2 + 8X.$$
   (a) Vérifier que $Q(i) = 0$.
   (b) Sans effectuer de calcul, montrer que Q est divisible par X^2+1.
   (c) Décomposer Q en produit de facteurs irréductibles sur $\mathbb{R}[X]$ et sur $\mathbb{C}[X]$.

2 Corrigés

195

Il existe un unique couple (Q,R) de polynômes tel que $P(X) = (X^2+1)Q(X) + R(X)$ avec $\deg(R(X)) \leqslant 1$.
On évalue le reste en $X = i$ et en $X = -i$, et on trouve

$$R(X) = X\sin(n\theta) + \cos(n\theta)$$

196

1. $P(X) = \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n}{k} X^k$ donc $\deg P = n-1$

   et son coefficient dominant est $\binom{n}{n-1} = n$.

2. Soit z une racine de $P(X)$: $(1+z)^n = z^n$, en prenant le module de chaque membre de cette égalité, on obtient $|1+z|^n = |z|^n$ d'où $|1+z| = |z|$.
   En interprétant géométriquement le module comme étant une distance, on est amené à déterminer l'ensemble des points $M(z)$ du plan complexe, tels que $MA = MO$ où A désigne le point d'affixe -1. Il s'agit de la médiatrice du segment $[OA]$ qui est l'ensemble des points M d'affixe z telle que $\Re e(z) = -\frac{1}{2}$

3. (a)
$$\begin{aligned} e^{ix} - 1 &= e^{ix/2} \times (e^{ix/2} - e^{-ix/2}) \\ &= e^{ix/2} \times (2i\sin(x/2)) \end{aligned}$$

   (b) z est une racine de $P(X)$ ssi
$$\begin{aligned} (1+z)^n &= z^n \\ \iff \left(\frac{1+z}{z}\right)^n &= 1 \text{ (car } z = 0 \text{ n'est pas solution)} \\ \iff \left(1 + \frac{1}{z}\right)^n &= 1 \end{aligned}$$

   Ce qui montre que $1 + \frac{1}{z}$ est une racine n-ième de l'unité différente de 1. Soit ω_k une telle racine : $1 + \frac{1}{z} = \omega_k$, ce qui donne
$$z = \frac{1}{\omega_k - 1}.$$

   (c) On vérifie facilement que les racines n-ième de l'unité différente de 1 s'écrivent $\omega_k = e^{2ik\pi/n}$ où k varie de 1 à $n-1$. Ainsi,
$$\begin{aligned} z &= \frac{1}{\omega_k - 1} \\ &= \frac{1}{e^{2ik\pi/n} - 1} \\ &= \frac{1}{2i\sin(k\pi/n)e^{ik\pi/n}} \\ &= \frac{-i}{2\sin(k\pi/n)} e^{-ik\pi/n} \\ &= \frac{1}{2\sin(k\pi/n)} e^{i(3\pi/2 - k\pi/n)}. \end{aligned}$$

   Ainsi le module des racines est $\frac{1}{2\sin(k\pi/n)}$, et leurs arguments modulo (2π) sont $3\pi/2 - k\pi/n$ pour k variant de 1 à $n-1$.

4. D'après **3.(b)**, $z_k = \frac{1}{\omega_k - 1}$, donc $\frac{1}{z_k} = \omega_k - 1$ où ω_k est une racine n-ième de l'untité différente de 1. Ainsi,
$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{z_k} &= \sum_{k=1}^{n-1} (\omega_k - 1) \\ &= \sum_{k=1}^{n-1} \omega_k - (n-1) \text{ : on reconnaît la somme des racines } n\text{-ièmes de l'unité} \\ &= \underbrace{\sum_{k=0}^{n-1} \omega_k}_{0} - 1 - (n-1) \quad \text{où } \omega_0 = 1 \\ &= -n \end{aligned}$$

5. Les racines réelles de l'équation $(1+x)^n = x^n$ sont les racines du polynôme $P(X)$ qui sont à valeurs réelles (celles dont l'argument est égal à $\pm\pi$ modulo (2π)). D'après **3.(c)**, il faut que n soit pair, et que k soit égal à $n/2$, on obtient donc une seule solution qui est
$$x = -\frac{1}{2}.$$

197

1. En utilisant les propriétés de la conjugaison complexe, on obtient :

$$P(\overline{\alpha}) = \sum_{k=0}^{n} a_k (\overline{\alpha})^k = \sum_{k=0}^{n} a_k \overline{\alpha^k}$$

Or $\quad \forall k \in [\![0,n]\!],\ a_k \in \mathbb{R} \Longrightarrow \overline{a_k} = a_k \quad$ et $\ a_k\,\overline{\alpha^k} = \overline{a_k}\,\overline{\alpha^k} = \overline{a_k\,\alpha^k}$

$$\text{Donc } P(\overline{\alpha}) = \overline{\sum_{k=0}^{n} a_k \alpha^k} = \overline{0} = 0.$$

2. (a) On a :

$$Q(i) = -i^5 + 2i^4 + 7i^3 + 2i^2 + 8i = -i + 2 - 7i - 2 + 8i = 0.$$

(b) D'après la question 1., $-i$ est aussi une racine de Q. On en déduit que Q est divisible par $(X-i)(X+i) = X^2+1$.

(c) On commence par factoriser Q par X :
$Q = X(-X^4 + 2X^3 + 7X^2 + 2X + 8)$.

On pose la division euclidienne de $-X^4+2X^3+7X^2+2X+8$ par X^2+1 :

$$
\begin{array}{rcrcrcrcr|l}
-X^4 & + & 2X^3 & + & 7X^2 & + & 2X & + & 8 & X^2+1 \\ \cline{10-10}
-\ (-X^4 & & & - & X^2) & & \downarrow & & & -X^2+2X+8 \\ \cline{1-5}
 & & 2X^3 & + & 8X^2 & + & 2X & & & \\
 & - & (2X^3 & & & + & 2X) & & \downarrow & \\ \cline{2-7}
 & & & & 8X^2 & & & + & 8 & \\
 & & & - & (8X^2 & & & + & 8) & \\ \cline{4-9}
 & & & & & & & 0 & &
\end{array}
$$

et on trouve

$$Q = X(X^2+1)(-X^2+2X+8)$$

Enfin, on constate que $x_1 = -2$ est racine «évidente» du trinôme $-X^2+2X+8$ (car $-(-2)^2 - 2\times 2 + 8 = 0$). En notant x_2 l'autre racine de $-X^2+2X+8$, on sait que

$$x_1 x_2 = \frac{c}{a} \quad \text{avec } a = -1 \quad \text{et } c = 8$$

D'où $\quad x_2 = \dfrac{-8}{-2} = 4.$

La décomposition de Q en produit de facteurs irréductibles sur $\mathbb{R}[X]$ est donc donnée par :

$$\boxed{Q = -X(X^2+1)(X+2)(X-4)}$$

puisqu'il s'agit d'un produit de polynômes de degré 1 et 2 et que le seul polynôme de degré 2 est à racines complexes.
Enfin, la décomposition sur $\mathbb{C}[X]$ est donnée par :

$$\boxed{Q = -X(X-i)(X+i)(X+2)(X-4)}$$

arcsin, arccos, arctan

1 Énoncé

211

1. Donner trois expressions différentes pour $\cos(2x)$.
2. Prouver l'égalité :

$$\arccos\left(\frac{3}{4}\right) = 2\arcsin\left(\frac{\sqrt{2}}{4}\right)$$

2 Corrigé

211

1. Pour tout réel x,

$$\cos(2x) = \cos^2 x - \sin^2 x = 2\cos^2 x - 1 = 1 - 2\sin^2 x$$

2. Posons $a = \arccos\left(\frac{3}{4}\right)$, $b = 2\arcsin\left(\frac{\sqrt{2}}{4}\right)$ et $x = \arcsin\left(\frac{\sqrt{2}}{4}\right)$.

   Calculons les cosinus de a et b.
   - ▷ $\cos a = 3/4$ car $\forall t \in [-1, 1]$, $\cos(\arccos t) = t$
   - ▷ $\cos b = \cos(2x) = 1 - 2\sin^2 x = 1 - 2 \times \left(\frac{\sqrt{2}}{4}\right)^2 = 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$
   - ▷ Les réels a et b ont même cosinus. De plus $a \in [0, \pi]$ (car la fonction arccos est à valeurs dans $[0, \pi]$) et $x \in [0, \pi/2]$ (car x est l'arcsinus d'un réel positif). Donc a et $b = 2x$ appartiennent tous les deux à l'intervalle $[0, \pi]$.

   On en déduit que $a = b$