Exercices corrigés de MTB

Printemps 2018

André Turbergue

TD1 : calcul matriciel

1 Énoncés

Exercice 1.

On pose $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$. Calculer A^n pour tout entier naturel n.

Exercice 2. On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

Soient $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix}$.
Montrer que $AB = AC$, a-t-on $B = C$? Que peut-on en conclure sur A ?

Exercice 3. (Médian 2010)

Pour tout nombre réel x, on définit la matrice $M(x) \in \mathfrak{M}_3(\mathbb{R})$ par :

$$M(x) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -x^2 & 1 & x \\ -2x & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

1. Vérifier la relation $\quad \forall\,(x,y) \in \mathbb{R}^2, \qquad M(x)M(y) = M(x+y)$
2. En déduire que pour tout réel x et pour tout entier naturel n, $\quad (M(x))^n = M(nx)$
3. Montrer que la matrice $M(x)$ est inversible. Quel est son inverse ?
4. Justifier que l'application $M\ :\ x \longmapsto M(x)$, de $\mathbb{R}$ vers $\mathfrak{M}_3(\mathbb{R})$, est injective.
   Cette application est-elle bijective ?
5. Dans cette question, on pose $\quad A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -4 & 1 & -2 \\ 4 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

   Donner l'expression de A^n sous la forme d'un tableau matriciel pour $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 4. (Final 2011)

Soit p un entier naturel non nul.
Une matrice carrée A de $\mathfrak{M}_3(\mathbb{R})$ est dite nilpotente d'indice p si $A^p = \mathbb{O}_3$ et $A^{p-1} \neq \mathbb{O}_3$.
Une matrice A de $\mathfrak{M}_3(\mathbb{R})$ est nilpotente lorsqu'elle est nilpotente d'indice p pour un certain entier naturel p non nul.

Pour toute matrice nilpotente $A \in \mathfrak{M}_3(\mathbb{R})$, on pose : $\exp(A) = \displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{k!} A^k$

Soit M une matrice nilpotente d'indice 2 et N une matrice nilpotente d'indice 3, deux matrices carrées d'ordre 3 telles que $M\,N = N\,M$.

1. À l'aide de la formule du binôme de Newton, développer $(M+N)^4$.
   En déduire que $M+N$ est nilpotente.

2. Démontrer la relation : $\exp(M+N) = \exp(M)\,\exp(N)$.

3. Simplifier le produit $\exp(N)\,\exp(-N)$.

   En déduire que $\exp(N)$ est inversible et exprimer son inverse $\exp(N)^{-1}$ comme combinaison linéaire de I_3, N et N^2.

2 Corrigés

Exercice 1. On vérifie à la main, ou avec Maxima, que $A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$,

$A^3 = \begin{pmatrix} 1 & 7 \\ 0 & 8 \end{pmatrix}$, $A^6 = \begin{pmatrix} 1 & 63 \\ 0 & 64 \end{pmatrix}$

On conjecture que $\forall n \in \mathbb{N},\ A^n = \begin{pmatrix} 1 & 2^n - 1 \\ 0 & 2^n \end{pmatrix}$

et on démontre cette égalité matricielle par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 2.

Le calcul de AB et AC donne $AB = AC = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 4 & 4 & 3 \end{pmatrix}$. Or $B \neq C$ ce qui implique que A n'est pas inversible. En effet par la contraposée si A est inversible alors $AB = AC \Rightarrow B = C$. Or $B \neq C$ donc A n'est pas inversible.

Exercice 3.

1. Soit $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. Calculons le produit :

$$\begin{aligned} M(x) \times M(y) &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -x^2 & 1 & x \\ -2x & 0 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -y^2 & 1 & y \\ -2y & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -x^2 - y^2 - 2xy & 1 & y + x \\ -2x - 2y & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -(x+y)^2 & 1 & x + y \\ -2(x+y) & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= M(x+y) \end{aligned}$$

2. Soit x un réel fixé. Pour $n \in \mathbb{N}$, notons $\mathcal{P}_n$ l'égalité : « $[M(x)]^n = M(nx)$ »

   - Vérifions $\mathcal{P}_0$:
     $[M(x)]^0 = I_3$ par convention et $M(0 \times x) = M(0) = I_3$.
   - Soit $k \in \mathbb{N}$. Supposons $\mathcal{P}_k$ vraie. Démontrons alors, sous cette hypothèse, que $\mathcal{P}_{k+1}$ est vraie.

$$\begin{aligned} [M(x)]^{k+1} &= M(x) \times M(x)^k & \\ &= M(x) \times M(kx) & \text{d'après l'hypothèse de récurrence} \\ &= M(x + kx) & \text{d'après relation de 1. avec } y = kx \\ &= M((k+1)x) & \text{ce qui est l'égalité au rang } k+1. \end{aligned}$$

   - <u>Conclusion</u> : selon le principe de récurrence, l'égalité $\mathcal{P}_n$ est vraie pour tout entier naturel n.

3. En prenant $y = -x$ dans la relation établie en 1., on obtient :

$$M(x) \times M(-x) = M(x - x) = M(0) = I_3$$

où $M(-x)$ est une matrice de même taille que $M(x)$. Par conséquent la matrice $M(x)$ est inversible et $\boxed{[M(x)]^{-1} = M(-x)}$

4. • Soit x et y deux réels tels que $M(x) = M(y)$.
   Alors $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -x^2 & 1 & \boxed{x} \\ -2x & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -y^2 & 1 & \boxed{y} \\ -2y & 0 & 1 \end{pmatrix}$
   On en déduit que $x = y$. Donc l'application $M : x \longmapsto M(x)$ est une injection de $\mathbb{R}$ dans $\mathfrak{M}_3(\mathbb{R})$.

   • $\forall x \in \mathbb{R},\ M(x) \neq \mathbb{O}_3$
   La matrice nulle $\mathbb{O}_3 \in \mathfrak{M}_3(\mathbb{R})$ ne peut pas s'écrire sous la forme $M(x)$ avec x réel. Donc l'application M n'est pas surjective, ni bijective.

5. $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -4 & 1 & -2 \\ 4 & 0 & 1 \end{pmatrix} = M(-2)$

   Donc $\forall n \in \mathbb{N},\ A^n = [M(-2)]^n \overset{\text{d'après 2.}}{=} M(-2n) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -4n^2 & 1 & -2n \\ 4n & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Exercice 4.

1. Puisque M et N commutent, on peut utiliser la formule du binôme :

$$(M+N)^4 = \binom{4}{0}M^4N^0 + \binom{4}{1}M^3N^1 + \binom{4}{2}M^2N^2 + \binom{4}{3}M^1N^3 + \binom{4}{4}M^0N^4.$$

Or, par hypothèse, $M^2 = M^3 = M^4 = \mathbb{O}_3$ et $N^3 = N^4 = \mathbb{O}_3$.
Donc, $(M+N)^4 = \mathbb{O}_3$: $M+N$ est nilpotente.

2.

$$\begin{aligned}\exp(M)\exp(N) &= (I_3+M)(I_3+N+\frac{1}{2}N^2)\\ &= I_3+N+M+\frac{1}{2}N^2+MN+\frac{1}{2}MN^2\end{aligned}$$

De plus

$$\begin{aligned}\exp(M+N) &= I_3+(M+N)+\frac{1}{2}(M+N)^2+\frac{1}{6}(M+N)^3\\ &= I_3+M+N+\frac{1}{2}(M^2+2MN+N^2)+\frac{1}{6}(M^3+3M^2N+3MN^2+N^3)\\ &= I_3+M+N+\frac{1}{2}(\mathbb{O}_3+2MN+N^2)+\frac{1}{6}(\mathbb{O}_3+3\mathbb{O}_3N+3MN^2+\mathbb{O}_3)\\ &= I_3+M+N+MN+\frac{1}{2}N^2+\frac{1}{2}MN^2\end{aligned}$$

Il vient que $\exp(M+N) = \exp(M)\exp(N)$.

3.

$$\begin{aligned}\exp(N)\exp(-N) &= (I_3+N+\frac{1}{2}N^2)\,(I_3-N+\frac{1}{2}N^2)\\ &= [(I_3+\frac{1}{2}N^2)+N]\,[(I_3+\frac{1}{2}N^2)-N]\\ &= (I_3+N^2+\frac{1}{4}N^4)-N^2\\ &= I_3 \qquad (\text{ car } N^4=\mathbb{O}_3).\end{aligned}$$

Il vient que $\exp(N)$ est inversible et $\exp(N)^{-1} = \exp(-N) = I_3 - N + \frac{1}{2}N^2$.

TD2 : intégration

1 Énoncés

Exercice 1.

a désigne un nombre réel positif fixé. Pour tout entier naturel n, on pose

$$I_n = \int_0^a \frac{x^n}{n!}\,\mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x$$

On ne cherchera pas à expliciter I_n.

1. Calculer, en fonction de a, I_0.
2. (a) Montrer que, pour tout entier naturel n et pour tout réel x de l'intervalle $[0\,;a]$:

   $$0 \leqslant \frac{x^n}{n!}\,\mathrm{e}^{-x} \leqslant \frac{x^n}{n!}$$

   (b) En déduire un encadrement de I_n pour tout entier naturel n.

   (c) Déterminer la limite de la suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$. *On rappelle que* $a^n \underset{(n\to+\infty)}{=} \mathrm{o}(n!)$
3. Démontrer, pour tout entier naturel k non nul, l'égalité $I_k - I_{k-1} = -\dfrac{a^k}{k!}\,\mathrm{e}^{-a}$
4. Déduire de ce qui précède que,

   $$\forall\, n \in \mathbb{N}^*, \quad I_n - I_0 = -\mathrm{e}^{-a}\sum_{k=1}^{n}\frac{a^k}{k!}$$
5. En déduire finalement $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\sum_{k=0}^{n}\frac{a^k}{k!}$

Exercice 2.

On se propose d'étudier la fonction f définie sur l'intervalle $]\,0,+\infty[$ par :

$$f(x)=\int_1^x \frac{\ln t}{1+t^2}\,\mathrm{d}t$$

On désigne par Γ sa courbe représentative dans le plan rapporté à un repère orthogonal $(O\,;\ \vec{i}\,,\ \vec{j}\,)$

1. (a) Justifier la dérivabilité de f sur $]\,0,+\infty[$ et calculer $f'(x)$.
   (b) En déduire le sens de variations de f sur $]\,0,+\infty[$.
   (c) Que peut-on dire du signe de $f(x)$?
2. (a) Pour $x>0$, calculer $\displaystyle\int_1^x \frac{\ln t}{t^2}\,\mathrm{d}t$
   (b) Montrer que pour tout $x>1$,
   $$\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{x}-\frac{\ln x}{x}\right)\leqslant f(x)\leqslant\left(1-\frac{1}{x}-\frac{\ln x}{x}\right)$$
3. On admet le théorème suivant :

   Si φ est une fonction monotone sur l'intervalle $[a,+\infty[$, alors φ admet une limite, finie ou infinie, en $+\infty$.

   Prouver que f admet une limite réelle ℓ en $+\infty$. Encadrer cette limite ℓ.
4. (a) Soit g la fonction définie sur $]\,0,+\infty[$ par $g(x)=f(x)-f\left(\dfrac{1}{x}\right)$
   Calculer $g'(x)$.
   (b) En déduire que pour tout réel $x>0$, $\quad f(x)=f\left(\dfrac{1}{x}\right)$
   (c) Démontrer que f admet une limite finie en zéro. Préciser cette limite.
   On prolonge par continuité la fonction f en zéro en posant $f(0)=\displaystyle\lim_{x\longrightarrow 0^+}f(x)$
5. (a) Montrer que pour tout $x\in]\,0;1[$, $\quad f(x)-f(0)\leqslant\dfrac{1}{2}\,(x\ln x-x)$
   (b) Démontrer que f n'est pas dérivable à droite en zéro.
   Que peut-on dire de la courbe Γ au point d'abscisse zéro ?
6. (a) À l'aide de la calculatrice, donner des valeurs décimales approchées à 10^{-2} près de $f(0)$, $f(2)$, $f\left(\dfrac{3}{2}\right)$, $f(4)$ et $f(8)$.
   (b) Tracer l'allure de la courbe Γ.

2 Corrigés

Exercice 1.

1. $I_0 = \displaystyle\int_0^a \mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x = \left[-\mathrm{e}^{-x}\right]_0^a = -\mathrm{e}^{-a} - (-\mathrm{e}^0)$ $\quad\boxed{I_0 = 1 - \mathrm{e}^{-a}}$

2. (a) Soit $n \in \mathbb{N}$ et $x \in [0\,;a]$.
   Alors $x \geqslant 0 \Longrightarrow -x \leqslant 0 \Longrightarrow 0 < \mathrm{e}^{-x} \leqslant \mathrm{e}^0 \Longrightarrow 0 < \mathrm{e}^{-x} \leqslant 1 \qquad (\star)$
   Or $\dfrac{x^n}{n!} \geqslant 0$. Donc, en multipliant les membres de $(\star)$ par $\dfrac{x^n}{n!}$, on obtient
   pour tout x de $[0\,;a]$, $\qquad 0 \leqslant \dfrac{x^n}{n!}\,\mathrm{e}^{-x} \leqslant \dfrac{x^n}{n!}$

   (b) En intégrant membre à membre la double inégalité précédente de 0 à a, il vient :
$$0 \leqslant I_n \leqslant \int_0^a \frac{x^n}{n!}\,\mathrm{d}x$$
   Or $\displaystyle\int_0^a \frac{x^n}{n!}\,\mathrm{d}x = \left[\frac{x^{n+1}}{(n+1)\,n!}\right]_0^a = \left[\frac{x^{n+1}}{(n+1)!}\right]_0^a = \frac{a^{n+1}}{(n+1)!}$

   Donc $\qquad \forall n \in \mathbb{N}, \quad \boxed{0 \leqslant I_n \leqslant \dfrac{a^{n+1}}{(n+1)!}}$

   (c) On a rappelé que $a^n \underset{(n\to+\infty)}{=} \mathrm{o}(n!)$ ce qui signifie que $\displaystyle\lim_{n\longrightarrow+\infty} \frac{a^n}{n!} = 0$.
   D'où $\forall n \in \mathbb{N}$, $\dfrac{a^{n+1}}{(n+1)!} = \dfrac{a}{n+1} \times \dfrac{a^n}{n!} \underset{(n\to+\infty)}{\longrightarrow} 0$
   Le théorème des gendarmes permet de conclure que la suite (I_n) converge et que $\boxed{\displaystyle\lim_{n\to+\infty} I_n = 0}$

3. Soit $k \in \mathbb{N}^*$. $\qquad I_k = \displaystyle\int_0^a \frac{x^k}{k!}\,\mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x$

   Posons $\begin{cases} u(x) = \dfrac{x^k}{k!} \\ v'(x) = \mathrm{e}^{-x} \end{cases}$ $\qquad$ Alors $\begin{cases} u'(x) = \dfrac{k\,x^{k-1}}{k!} = \dfrac{x^{k-1}}{(k-1)!} \\ v(x) = -\mathrm{e}^{-x} \end{cases}$
   Les fonctions u et v sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.

   Grâce à une $\boxed{\text{intégration par parties}}$, on obtient
$$I_k = \left[-\frac{x^k}{k!}\,\mathrm{e}^{-x}\right]_0^a - \int_0^a -\frac{x^{k-1}}{(k-1)!}\,\mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x = -\frac{a^a}{k!}\,\mathrm{e}^{-a} + \int_0^a \frac{x^{k-1}}{(k-1)!}\,\mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x$$
   Ainsi $I_k = -\dfrac{a^k}{k!}\,\mathrm{e}^{-a} + I_{k-1}$

4. Pour tout n de $\mathbb{N}^*$,
$$\begin{aligned} I_n - I_0 &= (I_n - I_{n-1}) + (I_{n-1} - I_{n-2}) + \cdots + (I_3 - I_2) + (I_2 - I_1) + (I_1 - I_0) \\ &= \sum_{k=1}^{n} (I_k - I_{k-1}) \\ &= \sum_{k=1}^{n} -\frac{a^k}{k!}\,\mathrm{e}^{-a} \quad \text{d'après 3.} \end{aligned}$$
   D'où, en factorisant par $-\mathrm{e}^{-a}$ (constante indépendante de l'indice de sommation),
$$I_n - I_0 = -\mathrm{e}^{-a} \sum_{k=1}^{n} \frac{a^k}{k!}$$

5. Soit n un entier naturel non nul. D'après l'égalité précédente,
   $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{a^k}{k!} = \mathrm{e}^a\,(I_0 - I_n) = \mathrm{e}^a\,(1 - \mathrm{e}^{-a} - I_n) = \mathrm{e}^a - 1 - \mathrm{e}^a\,I_n$.
   Donc $1 + \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{a^k}{k!} = \mathrm{e}^a - \mathrm{e}^a\,I_n$ c'est-à-dire $\boxed{\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{a^k}{k!} = \mathrm{e}^a\,(1 - I_n)}$
   Or on a vu que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} I_n = 0$. On en déduit que
$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{a^k}{k!} = \mathrm{e}^a}$$

Exercice 2.

On définit la fonction f sur l'intervalle $]0,+\infty[$ par :

$$f(x) = \int_1^x \frac{\ln t}{1+t^2}\,\mathrm{d}t$$

1. (a) Soit la fonction $h : t \mapsto \dfrac{\ln t}{1+t^2}$. Alors h est dérivable sur $]0,+\infty[$, donc h est continue sur $]0,+\infty[$ et on sait que f est l'unique primitive de h sur $]0,+\infty[$, qui s'annule en 1. Autrement dit, f est dérivable sur $]0,+\infty[$ et $\forall x \in]0,+\infty[$, $\boxed{f'(x) = h(x) = \dfrac{\ln x}{1+x^2}}$ avec $f(1) = 0$.

   (b) Pour tout $x > 0$, $1 + x^2 \geqslant 1 > 0$ donc $f'(x)$ est du signe de $\ln x$.
   Il en résulte que f est strictement décroissante sur $]0\,;1]$ et strictement croissante sur $[1\,;+\infty[$.

   (c) f étant strictement décroissante sur $]0\,;1[$,
   $0 < x < 1 \Rightarrow f(x) > f(1) \Rightarrow f(x) > 0$
   et $x > 1 \Rightarrow f(x) > f(1) \Rightarrow f(x) > 0$ car f croît strictement sur $]1\,;+\infty[$
   Ainsi $\boxed{\forall x \in]0,+\infty[\setminus\{1\}\ ,\quad f(x) > 0}$

2. (a) Soit $x > 0$, x fixé. Posons $\begin{cases} u(t) = \ln t \\ v'(t) = \dfrac{1}{t^2} \end{cases}$ alors $\begin{cases} u'(t) = \dfrac{1}{t} \\ v(t) = -\dfrac{1}{t} \end{cases}$

   Les fonctions u, v, u' et v' sont dérivables sur $]0\,;+\infty[$.
   Le théorème d'**intégration par parties** permet d'écrire :
   $$\int_1^x \frac{\ln t}{t^2}\,\mathrm{d}t = \int_1^x u(t)\,v'(t)\,\mathrm{d}t = [u(t)\,v(t)]_{t=1}^{t=x} - \int_1^x u'(t)\,v(t)\,\mathrm{d}t$$
   $$= \left[-\frac{1}{t}\ln t\right]_{t=1}^{t=x} - \int_1^x -\frac{1}{t^2}\,\mathrm{d}t = -\frac{\ln x}{x} + \left[-\frac{1}{t}\right]_{t=1}^{t=x} = -\frac{\ln x}{x} - \frac{1}{x} + 1$$

   (b) Soit $x > 1$, x fixé. Soit $t \in [1\,;x]$. Alors $1 \leqslant t^2$ donc $0 < t^2 \leqslant 1+t^2 \leqslant 2t^2$
   puis $\dfrac{1}{2t^2} \leqslant \dfrac{1}{1+t^2} \leqslant \dfrac{1}{t^2}$. Or $\ln t \geqslant 0$ car $t \geqslant 1$
   Par conséquent $\forall t \in [1\,;x]$, $\dfrac{1}{2} \times \dfrac{\ln t}{t^2} \leqslant \dfrac{\ln t}{1+t^2} \leqslant \dfrac{\ln t}{t^2}$
   En intégrant membre à membre cet encadrement, on obtient :
   $\dfrac{1}{2}\displaystyle\int_1^x \frac{\ln t}{t^2}\,\mathrm{d}t \leqslant \int_1^x \frac{\ln t}{1+t^2}\,\mathrm{d}t \leqslant \int_1^x \frac{\ln t}{t^2}\,\mathrm{d}t$. On en déduit, d'après 2.(a), que
   $$\frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{x} - \frac{\ln x}{x}\right) \leqslant f(x) \leqslant \left(1 - \frac{1}{x} - \frac{\ln x}{x}\right)$$

3. Comme f est une fonction monotone sur l'intervalle $[1,+\infty[$, f admet une limite, finie ou infinie, en $+\infty$. Cette limite ne peut pas être $-\infty$ car f est croissante sur $[1,+\infty[$.

   De plus $\forall x > 1$, $\quad f(x) \leqslant \left[1 - \left(\dfrac{1}{x} + \dfrac{\ln x}{x}\right)\right]$ $\quad$ et $\quad \forall x > 1$, $\begin{cases} \dfrac{1}{x} > 0 \\ \dfrac{\ln x}{x} > 0 \end{cases}$

   Donc $\boxed{\forall x > 1,\quad f(x) < 1}$ $(\star)$

   Si f admettait pour limite $+\infty$ en $+\infty$, alors l'intervalle $[2\,;+\infty[$ contiendrait toutes les valeurs $f(x)$ pour x assez grand, ce qui contredit l'encadré $(\star)$.
   Ainsi f admet une limite réelle ℓ en $+\infty$.

   On rappelle que $\forall x > 1$, $\quad \dfrac{1}{2}\left(1 - \dfrac{1}{x} - \dfrac{\ln x}{x}\right) \leqslant f(x) \leqslant \left(1 - \dfrac{1}{x} - \dfrac{\ln x}{x}\right)$

   Or selon un théorème de croissance comparée, $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$

   Donc $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\left(1 - \frac{1}{x} - \frac{\ln x}{x}\right) = 1$. Le théorème de passage à la limite dans une inégalité permet de conclure que $\boxed{\dfrac{1}{2} \leqslant \ell \leqslant 1}$

4. (a) g est dérivable sur $]0,+\infty[$ et pour tout réel $x > 0$,
   $$g'(x) = f'(x) - f'\left(\frac{1}{x}\right) \times \left(-\frac{1}{x^2}\right) = h(x) + \frac{1}{x^2}\,h\left(\frac{1}{x}\right)$$
   $$= \frac{\ln x}{1+x^2} + \frac{1}{x^2}\,\frac{\ln(1/x)}{1+1/x^2} = \frac{\ln x}{1+x^2} + \frac{(-\ln x)}{x^2+1} \quad \text{donc } \boxed{g'(x) = 0}$$

   (b) On en déduit que la fonction g est constante sur l'**intervalle** $]0\,;+\infty[$
   Ainsi $\forall x > 0$, $g(x) = g(1) = f(1) - f(1/1) = 0$ ce qui revient à dire que
   pour tout réel $x > 0$, $\quad f(x) = f\left(\dfrac{1}{x}\right)$

   (c) $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} \frac{1}{x} = +\infty$ et $\displaystyle\lim_{t\to+\infty} f(t) = \ell$ d'après 3.

D'où, par composition $\lim_{x\to 0^+} f\left(\frac{1}{x}\right) = \ell$. Ainsi $\boxed{\lim_{x\to 0^+} f(x) = \ell}$

5. (a) On considère la fonction φ définie sur $]0\,;1[$ par

$$\varphi(x) = f(x) - f(0) - \frac{1}{2}\,(x\ln x - x)$$

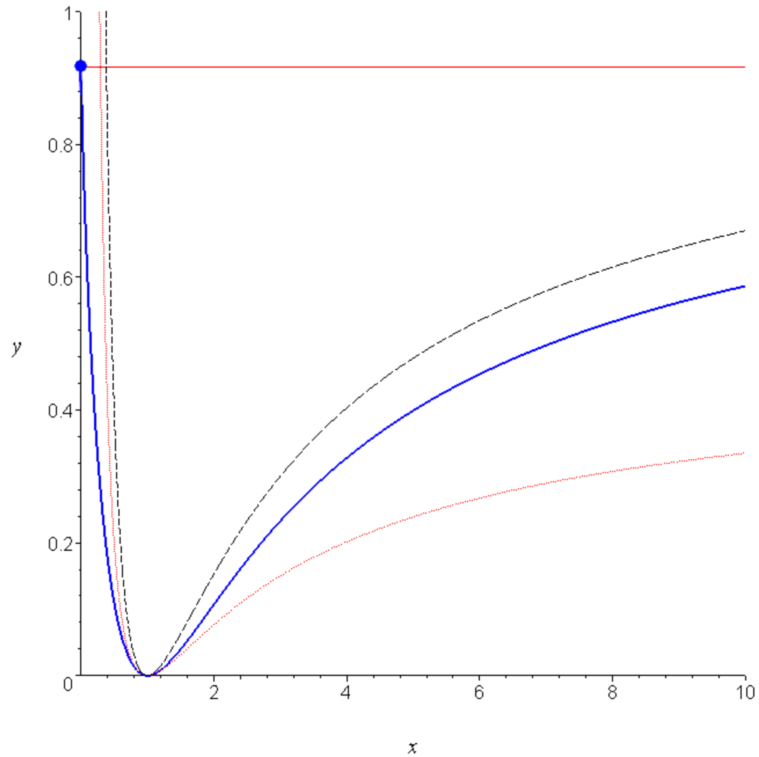
Alors φ est dérivable sur $]0\,;1[$ et $\forall x \in]0\,;1[$,
$\varphi'(x) = f'(x) - \frac{1}{2}\left(\ln x + x\,\frac{1}{x} - 1\right) = \frac{\ln x}{1+x^2} - \frac{1}{2}\,\ln x = \frac{(1-x^2)\ln x}{2(1+x^2)}$
Or pour tout $x \in]0\,;1[$, $1 - x^2 > 0$, $\ln x < 0$ et $2(1+x^2) > 0$
En conséquence $\forall x \in]0\,;1[$, $\varphi'(x) < 0$. Il en résulte que la fonction φ est strictement décroissante sur $]0\,;1[$.
D'autre part $\lim_{x\to 0^+} x\ln x = 0$ donc $\lim_{x\to 0^+} \varphi(x) = 0$. On peut donc prolonger par continuité la fonction φ en zéro en posant $\varphi(0) = 0$. La fonction φ est décroissante sur $[0\,;1[$ donc $0 < x < 1 \Rightarrow \varphi(x) \leqslant \varphi(0)$
Autrement dit $\forall x \in]0\,;1[$, $f(x) - f(0) \leqslant \frac{1}{2}\,(x\ln x - x)$

(b) D'après la question précédente, $\forall x \in]0\,;1[$, $\frac{f(x) - f(0)}{x} \leqslant \frac{1}{2}\,(\ln x - 1)$
Or $\lim_{x\to 0^+} \frac{1}{2}\,(\ln x - 1) = -\infty$ car on sait que $\lim_{x\to 0^+} \ln x = -\infty$.
Donc, par comparaison, $\boxed{\lim_{x\to 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = -\infty}$
Ainsi la fonction f n'est pas dérivable en zéro mais sa courbe représentative Γ admet une demi-tangente verticale d'équation $x = 0$ au point d'abscisse zéro.

6. (a) La calculatrice fournit :
$f(2) \approx 0,11$; $f\left(\frac{3}{2}\right) \approx 0,04$; $f(4) \approx 0,33$ et $f(8) \approx 0,53$.

On en déduit d'après 4.(b) les approximations suivantes :
$f(0,5) \approx 0,11$; $f\left(\frac{2}{3}\right) \approx 0,04$; $f(0,25) \approx 0,33$ et $f(0,125) \approx 0,53$
Pour obtenir une approximation de $f(0)$, on pourra utiliser le logiciel GeoGebra en traçant la courbe représentant la fonction h. On obtient $f(0) \approx 0,92$.

(b) La courbe Γ en bleu.



TD4 : développements limités

1 Énoncé

Exercice 1.

1. (a) Rappeler sans justification, le développement limité de $x \longmapsto \dfrac{1}{1+x}$ à l'ordre 2 au voisinage de zéro.
   (b) En déduire le développement limité à l'ordre 3 en zéro de $x \longmapsto \ln(1+x)$.

2. On considère la fonction f définie sur l'intervalle ouvert $I =]-1\,,\,+\infty[$ par

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\ln(1+x)}{x} & \text{si} \quad x \neq 0 \\ 1 & \text{si} \quad x = 0 \end{cases}$$

   (a) Montrer que f est continue en zéro.
   (b) Écrire le développement limité à l'ordre 2 au voisinage de 0 de f.
   (c) f est-elle dérivable en 0 ? Si oui, donner $f'(0)$.

3. On définit la fonction g sur $I \setminus \{0\}$ par $\quad g(x) = (1+x)^{\frac{1}{x}}$.
   On rappelle que pour tous réels a et b tels que $a > 0$, $\qquad a^b = \mathrm{e}^{b\ln a}$

   (a) Déterminer le développement limité à l'ordre 2 au voisinage de 0 de la fonction $x \longmapsto \exp\left(f(x) - 1\right)$.
   (b) En déduire le développement limité à l'ordre 2 au voisinage de 0 de g.

4. On pose, pour tout entier naturel non nul n, $\quad u_n = \left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^n$.

   (a) Pour $n \in \mathbb{N}^*$, exprimer u_n à l'aide de la fonction g.
   En déduire que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est convergente et préciser sa limite ℓ.
   (b) En utilisant la question 3.(b), proposer un équivalent simple de $u_n - \ell$ lorsque n tend vers $+\infty$.

2 Corrigé

Exercice 1.

1. (a) On sait que $\dfrac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 + x^2\varepsilon_1(x)$ avec $\lim\limits_{x\to 0} \varepsilon_1(x) = 0$

   (b) La fonction $x \longmapsto \ln(1+x)$ est dérivable sur $]-1\,,+\infty[$ et sa dérivée admet un développement limité à l'ordre 2 au voisinage de 0 donné ci-dessus.

   Donc $x \longmapsto \ln(1+x)$ admet un développement limité à l'ordre 3 au voisinage de 0 donné par :

$$\ln(1+x) = \underbrace{\ln(1)}_{0} + x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 + x^3\varepsilon_2(x) \qquad \text{avec} \quad \lim_{x\to 0} \varepsilon_2(x) = 0$$

c'est-à-dire $\boxed{\ln(1+x) = x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 + o(x^3)}$

2. (a) On rappelle que $\ln(1+x) \underset{(x\to 0)}{\sim} x$. D'où $\dfrac{\ln(1+x)}{x} \underset{(x\to 0)}{\longrightarrow} 1 = f(0)$

   ce qui prouve que f est continue en zéro.

   (b) En utilisant 1(b), on obtient directement :

$$\boxed{f(x) = 1 - \frac{1}{2}x + \frac{1}{3}x^2 + x^2\varepsilon_2(x)} \qquad \text{avec} \quad \lim_{x\to 0} \varepsilon_2(x) = 0$$

   égalité encore valable en $x = 0$.

   (c) Puisque f admet un $\mathrm{DL}_2(0)$, elle admet aussi un développement limité à l'ordre 1 en 0. De plus f est définie en 0.

   Donc f **est dérivable en 0** et $f'(0) = -\dfrac{1}{2}$.

   (d) La tangente (T) au point $A\,(0\,,\,1)$ à la courbe représentative $\mathscr{C}$ de f, admet pour équation réduite : $\boxed{y = -\frac{1}{2}x + 1}$.

La position locale au voisinage de A, de $\mathscr{C}$ par rapport à (T), est donnée par le signe de la différence :

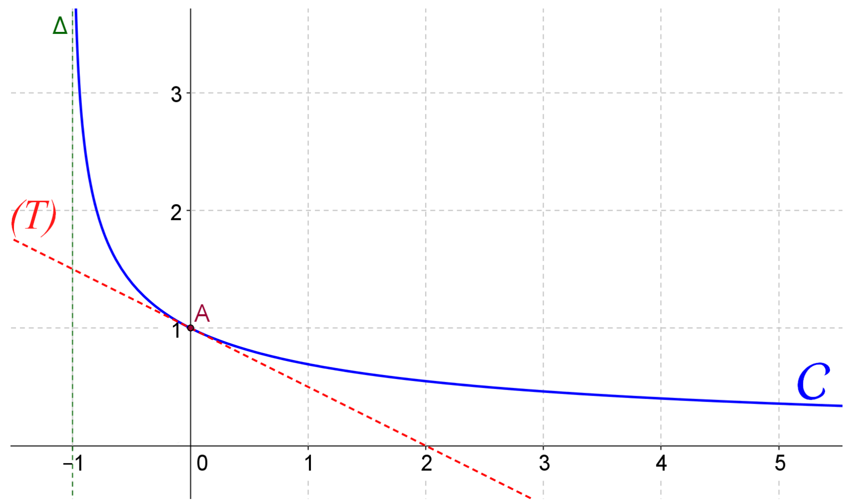
$$\begin{aligned} f(x) - \left(1 - \frac{1}{2}x\right) &= \frac{1}{3}x^2 + x^2\varepsilon_2(x) \\ &= x^2\left(\frac{1}{3} + \varepsilon_2(x)\right) \end{aligned}$$

Or $\forall\, x \in I,\ x^2 \geqslant 0$ et pour tout réel x voisin de 0, $\dfrac{1}{3} + \varepsilon_2(x)$ est proche de $\dfrac{1}{3} > 0$.

Donc pour tout réel x voisin de 0, $\quad x^2\left(\dfrac{1}{3} + \varepsilon_2(x)\right) \geqslant 0$.

Ainsi $\quad \exists\, r > 0\ ;\ \forall\, x \in I \cap]-r, r[\,,\ f(x) \geqslant -\dfrac{1}{2}x + 1$.

Localement, la courbe $\mathscr{C}$ est située **au dessus de sa tangente** (T) au voisinage de A.



3. (a) On sait que $f(x) - f(0) = -\frac{1}{2}x + \frac{1}{3}x^2 + x^2\varepsilon_2(x)$

et que $\mathrm{e}^u = 1 + u + \frac{u^2}{2!} + u^2\,\varepsilon_3(u)$ avec $\lim\limits_{u\to 0} \varepsilon_3(u) = 0$

Donc la fonction composée $x \longmapsto \exp\left(f(x) - f(0)\right)$ admet aussi un développement limité à l'ordre 2 en 0.

$$\begin{array}{c|c} u & -\frac{1}{2}x + \frac{1}{3}x^2 \\ \hline u^2 & \frac{1}{4}x^2 \end{array}$$

$$\begin{aligned} \text{Ainsi}\quad \mathrm{e}^{f(x)-f(0)} &= 1 + \left(-\frac{1}{2}x + \frac{1}{3}x^2\right) + \frac{1}{2!}\left(\frac{1}{4}x^2\right) + x^2\varepsilon_4(x) \\ &= 1 - \frac{1}{2}x + \frac{11}{24}x^2 + x^2\varepsilon_4(x) \end{aligned}$$

avec $\lim\limits_{x\to 0} \varepsilon_4(x) = 0$.

(b) Pour tout réel $x \in I \setminus \{0\}$,

$$g(x) = (1+x)^{\frac{1}{x}} = \mathrm{e}^{\frac{\ln(1+x)}{x}} = \mathrm{e}^{f(x)} = \mathrm{e}^{f(0)}\,\mathrm{e}^{f(x)-f(0)} = e\,\exp\left(f(x) - f(0)\right)$$

On en déduit $\boxed{g(x) = e - \frac{e}{2}\,x + \frac{11e}{24}\,x^2 + x^2\,\varepsilon_5(x)}$ avec $\lim\limits_{x\to 0} \varepsilon_5(x) = 0$

4. (a) On remarque que $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ u_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = g\left(\frac{1}{n}\right)$

Or $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{n} = 0$ et $\lim\limits_{x\to 0} g(x) = e$.

D'où, par composée, $\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = e}$ et $\ell = e$.

(b) Pour tout entier naturel non nul n, $u_n - \ell = g\left(\frac{1}{n}\right) - e$.

Or pour n suffisamment «grand», $\frac{1}{n}$ est proche de zéro.
On peut donc remplacer la variable x du développement limité obtenu en 3.(b), par $\frac{1}{n}$ et écrire :

$$\begin{aligned} u_n - \ell &= -\frac{e}{2}\,\frac{1}{n} + \frac{11e}{24}\,\frac{1}{n^2} + \frac{1}{n^2}\,\varepsilon_5\left(\frac{1}{n}\right) \\ &= -\frac{e}{2n} + \frac{11\,e}{24\,n^2} + \frac{\varepsilon_n}{n^2} \qquad \text{avec } \lim_{n\to+\infty} \varepsilon_n = 0 \end{aligned}$$

D'où $\dfrac{u_n - \ell}{\left(-\frac{e}{2n}\right)} = 1 + \dfrac{11e}{24n^2}\left(-\dfrac{2n}{e}\right) + \dfrac{\varepsilon_n}{n^2}\left(-\dfrac{2n}{e}\right) = 1 - \dfrac{22}{24n} - \dfrac{2\varepsilon_n}{n\,e}$

Donc $\dfrac{u_n - \ell}{\left(-\frac{e}{2n}\right)} \underset{(n\to+\infty)}{\longrightarrow} 1$ ce qui revient à dire que

$$\boxed{u_n - e \underset{(n\to+\infty)}{\sim} -\frac{e}{2\,n}}$$

TD5 : applications linéaires

1 Énoncés

Exercice 1.

Soit $\mathscr{B}_0 = (e_1,\, e_2,\, e_3)$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$.
Soit $n = (a, b, c)$ un vecteur donné de $\mathbb{R}^3$ qui vérifie $a + b + c = 1$.
Soit f l'application définie sur $\mathbb{R}^3$, qui à tout vecteur $u = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, associe le vecteur $f(u)$ défini par : $f(u) = u - \Big(x + y + z\Big)n$.

1. (a) Démontrer que f est un endomorphisme de $\mathbb{R}^3$.
   (b) Pour tout entier $i \in \{1, 2, 3\}$, calculer $f(e_i)$ en fonction des réels a, b et c.
2. On désigne par $\operatorname{Ker} f$ le noyau de f et par $\operatorname{Im} f$ l'image de f.
   (a) Calculer $f(n)$ et en déduire que $n \in \operatorname{Ker} f$.
   (b) En déduire que la dimension de $\operatorname{Im} f$ est inférieure ou égale à 2.
3. (a) Montrer que $f \circ f = f$.
   (b) Soit $y \in \mathbb{R}^4$. Montrer que $y \in \operatorname{Im} f \iff f(y) = y$.
   (c) Montrer que les vecteurs $(e_1 - e_2)$ et $(e_2 - e_3)$ appartiennent à $\operatorname{Im} f$.
   (d) En déduire la dimension et une base de $\operatorname{Im} f$.
4. (a) Déterminer la dimension et une base du noyau de f.
   (b) Démontrer que $\operatorname{Ker} f$ et $\operatorname{Im} f$ sont supplémentaires dans $\mathbb{R}^4$.

Exercice 2.

Soit $E = \mathcal{C}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ l'espace vectoriel des fonctions continues sur $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{R}$.
On considère l'application Φ qui, à toute fonction f de E, associe la fonction $\Phi(f)$ définie sur $\mathbb{R}$ par

$$\forall\, x \in \mathbb{R},\ \Phi(f)(x) = \int_x^{x+1} f(t)\,\mathrm{d}t$$

1. (a) Soit $f \in E$. En introduisant une primitive F de f sur $\mathbb{R}$, justifier que $\Phi(f)$ est dérivable sur $\mathbb{R}$.
   (b) En déduire que l'application Φ n'est pas surjective.
2. Montrer que Φ est un endomorphisme de E.
3. Soit la fonction $g : x \longmapsto \cos(2\pi\, x)$. Calculer pour tout réel x, $\Phi(g)(x)$.
   Φ est-elle injective ? Justifier.

Exercice 3. (avec des polynômes) On note :

• $E = \mathbb{R}[X]$ l'espace vectoriel réel des polynômes à une indéterminée et à coefficients réels,
• $E_n = \mathbb{R}_n[X]$ le sous-espace vectoriel de E formé des polynômes de degré inférieur ou égal à n (où $n \in \mathbb{N}$).

On définit l'application $\Delta \,:\, E \longrightarrow E$ par $\quad \Delta\big(P\big) = P(X+1) - P(X)$

1. Rappeler, sans démonstration, la dimension de l'espace E_n et sa base canonique $\mathscr{B}_n$.
2. Montrer que Δ est une application linéaire.
3. (a) Si C est un polynôme constant, que peut-on dire de $\Delta\big(C\big)$?
   (b) Déterminer le noyau de Δ. Δ est-elle injective ?
4. Soit n un entier naturel non nul.
   (a) Montrer que, pour tout polynôme non constant P, $\quad \deg\big(\Delta(P)\big) = \deg(P) - 1$
   (b) En déduire que $\Delta(E_n) \subset E_{n-1}$.
   (c) Démontrer que $\Delta(E_n) = E_{n-1}$. Δ est-elle surjective ?
   (d) Justifier que si $Q \in E_{n-1}$, il existe un unique $P \in E_n$ tel que $\Delta(P) = Q$ et $P(0) = 0$.
5. Soit $(H_i)_{i\in\mathbb{N}}$ la suite de polynômes définie par :

$$H_0 = 1 \qquad \text{et} \qquad \forall i \in \mathbb{N}^*, \quad H_i = \frac{1}{i!}\prod_{k=0}^{i-1}(X-k) = \frac{X(X-1)(X-2)\dots(X-i+1)}{i\,!}$$

   (a) Préciser $H_1,\ H_2,\ H_3$ et calculer $H_1 + 6\,H_2 + 6\,H_3$.
   (b) Calculer $\Delta(H_0)$ et $\Delta(H_1)$. Prouver que, pour tout entier naturel i vérifiant $2 \leqslant i \leqslant 4$,

$$\Delta(H_i) = H_{i-1}$$

6. (a) En utilisant la question 5, déterminer le polynôme $P \in E_4$ tel que $P(0) = 0$ et

$$P(X+1) - P(X) = X^3$$

   Indication : on exprimera P comme combinaison linéaire des H_i .

   (b) En déduire la valeur de $S = \sum_{k=0}^{n} k^3$ pour $n \in \mathbb{N}^*$.

2 Corrigés

Exercice 1.

1. (a)
   - On pose $\mathbf{u} = (x, y, z)$ et $\mathbf{v} = (x', y', z')$ et $\lambda \in \mathbb{R}$
   - Il reste à détailler $f(\lambda \cdot \mathbf{u} + \mathbf{v}) = \ldots = \lambda \cdot f(\mathbf{u}) + f(\mathbf{v})$

   (b) $f(\mathbf{e}_k) = \mathbf{e}_k - \mathbf{n}$ d'où

   $$f(\mathbf{e}_1) = (1-a, -b, -c) \quad f(\mathbf{e}_2) = (-a, 1-b, -c) \quad f(\mathbf{e}_3) = (-a, -b, 1-c)$$

2. (a) $f(\mathbf{n}) = \overrightarrow{0}$ donc $\mathbf{n} \in \ker f$.

   (b)
   - Par le thm du rang : $\dim(\mathbb{R}^3) = \dim(\ker f) + \dim(\mathrm{Im} f)$
   - Or $\dim(\ker f) \geqslant 1$ car $\ker f \neq \left\{\overrightarrow{0}\right\}$
   - Donc $\mathrm{rg}(f) \leqslant 2$

3. (a) $\forall\, \mathbf{u} = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$,

   $$f \circ f(\mathbf{u}) = f(f(\mathbf{u})) = f\left(\mathbf{u} - (x+y+z)\mathbf{n}\right) = f(\mathbf{u}) - (x+y+z) f(\mathbf{n}) = f(\mathbf{u})$$

   car $f(\mathbf{n}) = \overrightarrow{0}$.

   (b)
   - soit $\mathbf{y} \in \mathrm{Im} f$. Alors $\exists\, \mathbf{x} \in \mathbb{R}^3\,;\ \mathbf{y} = f(\mathbf{x})$.
     D'où $f(\mathbf{y}) = f(f(\mathbf{x})) = f \circ f(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x}) = \mathbf{y}$
   - La réciproque est évidente : $f(\mathbf{y}) \in \mathrm{Im} f$.

   (c)

   $$\begin{aligned} f(\mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_2) &= f(\mathbf{e}_1) - f(\mathbf{e}_2) \\ &= (1-a, -b, -c) - (-a, 1-b, -c) \\ &= (1, -1, 0) \\ &= \mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_2 \end{aligned}$$

   Donc d'après 3.(b), $\mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_2 \in \mathrm{Im} f$. Idem pour $\mathbf{e}_2 - \mathbf{e}_3$.

   (d)
   - La famille $\left(\mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_2\,,\, \mathbf{e}_2 - \mathbf{e}_3\right)$ est libre car $(1, -1, 0) \nparallel (0, 1, -1)$
   - $\mathrm{Im} f$ est un $\mathbb{R}$−e.v. de dimension finie, qui contient une famille libre de 2 vecteurs. Donc $\dim(\mathrm{Im} f) \geqslant 2$
   - D'après 2.(b), $\dim(\mathrm{Im} f) \leqslant 2$ donc $\mathrm{rg}(f) = \dim(\mathrm{Im} f) = 2$
   - Ainsi $\left(\mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_2\,,\, \mathbf{e}_2 - \mathbf{e}_3\right)$ est une base de $\mathrm{Im} f$.

4. (a)
   - D'après le théorème du rang : $\dim(\ker f) = \dim(\mathbb{R}^3) - \mathrm{rg}(f) = 1$
   - Donc $(\mathbf{n})$ est une base de $\ker f$ ou encore $\ker f = \mathrm{Vect}(\mathbf{n})$.

   (b)
   - Soit $\mathbf{u} \in \ker f \cap \mathrm{Im} f$. Alors $f(\mathbf{u}) = \overrightarrow{0}$ et $f(\mathbf{u}) = \mathbf{u}$. Donc $\mathbf{u} = \overrightarrow{0}$.
     Ainsi $\ker f \cap \mathrm{Im} f = \left\{\overrightarrow{0}\right\}$ ce qui signifie que $\ker f$ et $\mathrm{Im} f$ sont en somme directe.
   - $\dim(\mathbb{R}^3) = \dim(\ker f) + \dim(\mathrm{Im} f)$ d'où $\mathbb{R}^3 = \ker f \oplus \mathrm{Im} f$ ce qui signifie que $\ker f$ et $\mathrm{Im} f$ sont supplémentaires dans $\mathbb{R}^3$.

Exercice 2.

$$\forall\, x \in \mathbb{R},\ \Phi(f)(x) = \int_x^{x+1} f(t)\,\mathrm{d}t$$

1. (a) La fonction f est supposée continue sur $\mathbb{R}$, elle admet donc des primitives sur $\mathbb{R}$. Soit F l'une d'entre elles.
   Pour tout réel x, on a : $\boxed{\Phi(f)(x) = F(x+1) - F(x)}$.
   Comme F **est dérivable sur** $\mathbb{R}$, la fonction $\Phi(f)$ est aussi dérivable sur $\mathbb{R}$
   et $\forall\, x \in \mathbb{R},\ (\Phi(f))'(x) = f(x+1) - f(x)$.

   (b) Soit $h : x \longmapsto |x|$. La fonction h est continue sur $\mathbb{R}$ et appartient donc à E, mais n'est pas pas dérivable en 0. Or pour toute fonction f de E, $\Phi(f)$ est dérivable sur $\mathbb{R}$. Donc h n'a pas d'antécédent par Φ, qui n'est donc **pas surjective**.

2. Soient f et g deux fonctions de E et λ un nombre réel. Alors pour tout réel x,

$$\begin{aligned} \big(\Phi(\lambda f + g)\big)(x) &= \int_x^{x+1} (\lambda f + g)(t)\,\mathrm{d}t \quad \text{par définition de } \Phi \\ &= \int_x^{x+1} (\lambda f(t) + g(t))\,\mathrm{d}t \\ &= \lambda \int_x^{x+1} f(t)\,\mathrm{d}t + \int_x^{x+1} g(t)\,\mathrm{d}t \quad \text{par linéarité de l'intégrale} \\ &= \lambda\,\Phi(f)(x) + \Phi(g)(x) \\ &= \big(\lambda\,\Phi(f) + \Phi(g)\big)(x) \end{aligned}$$

On en déduit que $\boxed{\Phi(\lambda f + g) = \lambda\,\Phi(f) + \Phi(g)}$.

Ainsi l'application Φ est linéaire.

3. Soit $g : x \longmapsto \cos(2\pi\, x)$ et $x \in \mathbb{R}$. Alors

$$\Phi(g)(x) = \int_x^{x+1} \cos(2\pi t)\,\mathrm{d}t = \left[\frac{\sin(2\pi t)}{2\pi}\right]_{t=x}^{t=x+1} = \frac{1}{2\pi}\left(\sin(2\pi x + 2\pi) - \sin(2\pi x)\right).$$

Or la fonction sin est $2\pi-$périodique. D'où $\sin(2\pi x + 2\pi) = \sin(2\pi x)$ puis $\boxed{\Phi(g)(x) = 0}$.

En désignant par $\tilde{0}$ la fonction constante égale à 0, on a donc $\Phi(g) = \tilde{0}$ avec $g \neq \tilde{0}$.

$\mathrm{Ker}(\Phi) \neq \{\tilde{0}\}$. Ainsi $\boxed{\Phi \text{ n'est pas injective}}$.

Exercice 3.

1. Le $\mathbb{R}-$espace vectoriel E_n est de dimension finie égale à $n+1$.
Sa base canonique est $\mathscr{B}_n = (\mathbb{1}, X, X^2, X^3, \dots, X^n)$.

2. Soit P et Q deux polynômes de E et λ un réel.
$\Delta(\lambda\,P + Q) = (\lambda\,P + Q)(X+1) - (\lambda\,P + Q)(X)$
$= \lambda\,P(X+1) + Q(X+1) - \big(\lambda\,P(X) + Q(X)\big)$
$= [\lambda\,P(X+1) - \lambda\,P(X)] + [Q(X+1) - Q(X)]$.

Donc $\boxed{\Delta(\lambda\,P + Q) = \lambda\,\Delta(P) + \Delta(Q)}$

3. (a) Soit $C \in \mathbb{R}_0[X]$ un polynôme constant.
Écrivons par exemple $C = c_0$ où $c_0 \in \mathbb{R}$.
Alors $\Delta\big(C\big) = c_0 - c_0 = 0$, ce qui montre que $C \in \mathrm{Ker}\Delta$.
Ainsi $\mathbb{R}_0[X] \subset \mathrm{Ker}\Delta$

(b) • Réciproquement, soit $P \in \mathrm{Ker}\Delta$. Alors $P(X+1) = P(X)$. Donc, pour tout entier relatif n, $P(n) = P(0)$. On en déduit que le polynôme $P(X) - P(0)$ possède une infinité de racines réelles, il est donc nul, et par conséquent, $P(X) = P(0)$ est un polynôme constant : $P \in \mathbb{R}_0[X]$. Ainsi $\mathrm{Ker}\Delta \subset \mathbb{R}_0[X]$. L'inclusion établie en 3.(a) permet de conclure que $\boxed{\mathrm{Ker}\Delta = \mathbb{R}_0[X]}$

• $\mathrm{Ker}\Delta \neq \{0_E\}$. Donc Δ **n'est pas injective**.

4. Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

(a) Soit P un polynôme non constant de degré n.

On peut écrire $P = a_0 + a_1\,X + a_2\,X^2 + \cdots + a_n\,X^n = \sum_{k=0}^{n} a_k\,X^k$ avec $a_n \neq 0$.

Alors, par linéarité de Δ, $\Delta(P) = \sum_{k=0}^{n} a_k\,\Delta(X^k)$.

Or pour $k \geqslant 1$, $\Delta(X^k) = (X+1)^k - X^k = \sum_{i=0}^{k} \binom{k}{i} X^i$ est de degré $k-1$.
Donc $\deg\big(\Delta(P)\big) = \deg\big(\Delta(X^n)\big) = n-1$

Ainsi $\deg\big(\Delta(P)\big) = \deg(P) - 1$

(b) Il est clair que $\forall\,P \in E_n$, $\Delta(P) \in E_{n-1}$ ce qui signifie que $\Delta(E_n) \subset E_{n-1}$

(c) • On note δ l'application linéaire de E_n dans E_{n-1} définie par

$$\forall\,P \in E_n\,, \quad \delta(P) = \Delta(P) = P(X+1) - P(X)$$

En appliquant **le théorème du rang**,
$\dim E_n = \dim(\mathrm{Ker}\,\delta) + \dim(\mathrm{Im}\,\delta)$

Or $\mathrm{Ker}\,\delta = \mathrm{Ker}\Delta = E_0$ est de dimension 1 , $\dim E_n = n+1$ et $\mathrm{Im}\,\delta = \Delta(E_n)$.
Donc $\dim(\mathrm{Im}\,\delta) = n = \dim E_{n-1}$ et $\Delta(E_n)$ est un sous-espace vectoriel de E_{n-1} , qui a la même dimension que E_{n-1}.
Par conséquent $\Delta(E_n) \overset{(\star)}{=} E_{n-1}$.

• Soit $Q \in E$. Supposons $Q \neq 0_E$. Posons $q = \deg(Q)$ et $n = q+1$.
Puisque $Q \in E_{n-1}$, il existe $P \in E_n$ tel que $Q = \Delta(P)$ d'après $(\star)$.
Donc Δ **est surjective**.

(d) Soit $Q \in E_{n-1}$ un polynôme quelconque fixé de degré au plus $n-1$.
Existence : Δ étant surjective, $\exists\,R \in E_n \;/\; \Delta(R) = Q$.
En posant $P = R - R(0)$, on a $P \in E_n$ et $\Delta(P) = \Delta(R) - \Delta(R(0)) =$

$\Delta(R) = Q$ avec $P(0) = R(0) - R(0) = 0$.

Unicité : on suppose qu'il existe deux polynômes P et T éléments de E_n tels que

$$\Delta(P) = \Delta(T) = Q \quad \text{ et } P(0) = T(0) = 0$$

Alors $P - T \in \mathrm{Ker}\Delta$. Donc $P - T$ est un polynôme constant égal à $k \in \mathbb{R}$.
En particulier $P(0) - T(0) = k = 0$. Donc $P = T$.

5. (a) $H_1 = X,\ H_2 = \dfrac{1}{2}X(X-1),\ H_3 = \dfrac{1}{6}X(X-1)(X-2)$.
$H_1 + 6\,H_2 + 6\,H_3 = X + 3X(X-1) + X(X-1)(X-2)$
$= X + 3X^2 - 3X + X^3 - 2X^2 - X^2 + 2X = X^3$.

(b) $\Delta(H_0) = 0$ et $\Delta(H_1) = 1$.

Soit $i \in \mathbb{N}^*$. On vient de voir que $\Delta(H_1) = H_0$. On propose ici un calcul général valable pour n'importe quel entier $i \geqslant 2$.

$$\begin{aligned}
\Delta(H_i) &= H_i(X+1) - H_i(X) \\
&= \frac{1}{i!}\prod_{k=0}^{i-1}(X-(k-1)) - \frac{1}{i!}\prod_{k=0}^{i-1}(X-k) \\
&= \frac{(X+1)}{i!}\prod_{k=0}^{i-2}(X-k) - \frac{(X-i+1)}{i!}\prod_{k=0}^{i-2}(X-k) \\
&= [(X+1)-(X-i+1)]\,\frac{1}{i!}\prod_{k=0}^{i-2}(X-k) \\
&= \frac{i}{i!}\prod_{k=0}^{i-2}(X-k) \\
&= H_{i-1}
\end{aligned}$$

6. (a) $X^3 = H_1 + 6\,H_2 + 6\,H_3 = \Delta(H_2) + 6\,\Delta(H_3) + 6\,\Delta(H_4) = \Delta(H_2 + 6\,H_3 + 6\,H_4)$

Posons $\boxed{P = H_2 + 6\,H_3 + 6\,H_4}$. On obtient
$P = \dfrac{X(X-1)}{2} + X(X-1)(X-2) + \dfrac{X(X-1)(X-2)(X-3)}{4}$

D'où $X^3 = \Delta(P)$ et $P(0) = 0$ avec $\deg(P) = 4$.

(b) Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

$$\begin{aligned}
S &= \sum_{k=0}^{n} k^3 \\
&= \sum_{k=0}^{n}\big(P(k+1) - P(k)\big) \\
&= P(n+1) - P(0) \\
&= P(n+1) \\
&= \frac{(n+1)n}{2} + (n+1)n(n-1) + \frac{(n+1)n(n-1)(n-2)}{4} \\
&= \frac{(n+1)n}{4}\,[2 + 4(n-1) + (n-1)(n-2)] \\
&= \frac{(n+1)n}{4}\,\left[2 + 4n - n + n^2 - 2n - n + 2\right] \\
&= \frac{(n+1)n}{4}\,\left[2 + 4n - n + n^2 - 2n - n + 2\right] \\
&= \frac{(n+1)n}{4}\,\left(n^2 + n\right)
\end{aligned}$$

Finalement

$$\boxed{S = \left[\frac{n(n+1)}{2}\right]^2}$$

TD6 : fonctions de deux variables

1 Énoncés

Exercice 1.

On admet dans cet exercice que l'équation d'inconnue x, $\mathrm{e}^x = \dfrac{1}{x^2}$
admet une solution et une seule α dans $\mathbb{R}^{+*} =]0\,,\,+\infty[$, et que $\dfrac{1}{2} < \alpha < 1$.

On considère l'ouvert $U =]0, +\infty[\times\mathbb{R}$ de $\mathbb{R}^2$ et la fonction f de classe $\mathcal{C}^2$ sur U définie par

$$f : \begin{array}{ccc} U & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x,y) & \longmapsto & \dfrac{1}{x} + \mathrm{e}^x - y^2\,\mathrm{e}^y \end{array}$$

1. Représenter graphiquement l'ensemble U.
2. Calculer, pour tout (x, y) de U, les dérivées partielles premières de f en (x, y).
3. Montrer que f admet deux points critiques et deux seulement, dont l'un des deux est $a = (\alpha, -2)$.
4. Est-ce que f admet un extremum local en a ? Si oui, préciser sa nature.

Exercice 2.

Le but de l'exercice est l'étude des extremums de la fonction

$$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x,y) & \longmapsto & x^2 - 2xy + 2y^2 + \mathrm{e}^{-x} \end{array}$$

1. (a) Montrer que l'équation d'inconnue réelle x, $\mathrm{e}^{-x} = x$, admet une solution et une seule α.
   (b) Vérifier que $\dfrac{1}{2} < \alpha < 1$. *On rappelle que* $\mathrm{e} > 2$ *et* $\sqrt{\mathrm{e}} < 2$.
2. (a) Calculer les dérivées partielles premières de la fonction f.
   (b) Déterminer en fonction de α, le seul point critique de f, c'est-à-dire le seul couple de $\mathbb{R}^2$ en lequel f est susceptible de présenter un extremum.
3. (a) Calculer les dérivées partielles secondes de f.
   (b) En déduire que f présente un extremum m en un unique point de $\mathbb{R}^2$.
   S'agit-il d'un minimum ou d'un maximum ?
   (c) Exprimer en fonction de α la valeur exacte de cet extremum m.

2 Corrigés

Exercice 1.

On pose $U =]0,+\infty[\times\mathbb{R}$ et $\forall (x,y) \in U,\ f(x,y) = \dfrac{1}{x} + \mathrm{e}^x - y^2\mathrm{e}^y$

1. U est le demi plan ouvert situé à droite de l'axe des ordonnées (axe exclu) des couples (x,y) de $\mathbb{R}^2$ pour lesquels $x > 0$.
2. Pour tout couple $(x,y) \in U$,

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = -\frac{1}{x^2} + \mathrm{e}^x \qquad \text{et} \qquad \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = -\left(2y\,\mathrm{e}^y + y^2\,\mathrm{e}^y\right) = -y(2+y)\mathrm{e}^y$$

3. Le(s) éventuel(s) point(s) critique(s) de f sont solution(s) du système :

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 0 \\ \dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} -\dfrac{1}{x^2} + \mathrm{e}^x = 0 \\ -y(2+y)\mathrm{e}^y = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} \mathrm{e}^x = \dfrac{1}{x^2} \\ y(2+y) = 0 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} x = \alpha \\ y = -2 \text{ ou } y = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x = \alpha \\ y = -2 \end{cases} \text{ ou } \begin{cases} x = \alpha \\ y = 0 \end{cases}$$

car on a admis que l'équation $\mathrm{e}^x = \dfrac{1}{x^2}$ admettait une seule solution α dans $]0\,,\,+\infty[$. La fonction f admet donc exactement **deux points critiques** :

$$\boxed{a = (\alpha\,,\,-2)} \quad \text{et} \quad \boxed{b = (\alpha\,,\,0)}$$

4. Comme f est de classe $\mathcal{C}^2$ sur l'ouvert U, il suffit de vérifier la condition suffisante d'extrémum d'ordre 2.
On calcule d'abord les dérivées partielles secondes de f sur U :

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) = \frac{2}{x^3} + \mathrm{e}^x\ , \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x,y) = 0 \ \text{ et } \ \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) = -(2+4y+y^2)\mathrm{e}^y$$

En utilisant les notations de Monge au point $a = (\alpha, -2)$:
$r = \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a) = \dfrac{2}{\alpha^3} + e^\alpha$,
$s = \dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(a) = 0$ et $t = \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}(a) = -(2-8+4)\mathrm{e}^{-2} = 2\,\mathrm{e}^{-2}$

La matrice hessienne de f en a est donc :

$$H(f)_a = \begin{pmatrix} r & s \\ s & t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{2}{\alpha^3} + \mathrm{e}^\alpha & 0 \\ 0 & 2\,\mathrm{e}^{-2} \end{pmatrix}$$

son déterminant est $rt - s^2 = 2\left(\dfrac{2}{\alpha^3} + \mathrm{e}^\alpha\right)\mathrm{e}^{-2} > 0$

donc $\boxed{rt - s^2 > 0 \text{ avec } r > 0}$. Ainsi $\boxed{f \text{ présente un minimum local en } a}$.

Remarques :

- on pourrait démontrer que **ce minimum n'est pas absolu**. En effet, la deuxième application partielle de f en un point quelconque $(x_0\,,y_0)$ de U est la fonction $f_2 : t \longmapsto f(x_0\,,t) = \dfrac{1}{x_0} + \mathrm{e}^{x_0} - t^2\mathrm{e}^t$ qui a pour limite $-\infty$ lorsque $t \to +\infty$.
- on pourrait enfin prouver que f ne présente pas d'extrémum local en b.

Exercice 2. $\qquad f(x,y) = x^2 - 2xy + 2y^2 + \mathrm{e}^{-x}$

1. (a) On étudie le sens de variation de la fonction différence $h : x \longmapsto x - e^{-x}$.
h est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $\forall x \in \mathbb{R},\ h'(x) = 1 + e^{-x} > 0$.
   - Limite de h en $+\infty$: $e^{-x} = \dfrac{1}{e^x} \underset{(x\to+\infty)}{\longrightarrow} 0^+$.
   D'où $\lim\limits_{x\to+\infty} h(x) = +\infty$.
   - Limite de h en $-\infty$: $\forall x < 0,\ h(x) = x\left(1 + \dfrac{e^{-x}}{-x}\right)$
   Or $\lim\limits_{x\to-\infty} -x = +\infty$ et on sait que $\lim\limits_{X\to+\infty} \dfrac{e^X}{X} = +\infty$
   On en déduit, par composition, que $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{e^{-x}}{-x} = +\infty$ puis que $\lim\limits_{x\to-\infty} h(x) = -\infty$

x	$-\infty$	$+\infty$
$h'(x)$	$+$	
h	$-\infty$ $\nearrow$	$+\infty$

La fonction h est dérivable donc *continue* et *strictement* croissante sur l'*intervalle* $\mathbb{R}$. L'image de $\mathbb{R}$ par h est l'intervalle :

$$h(\mathbb{R}) = \left]\lim_{-\infty} h\,;\lim_{+\infty} h\right[= \mathbb{R} \quad \text{qui contient } 0.$$

Donc d'après le théorème dit «de la bijection» , l'équation $\boxed{h(x) = 0 \iff e^{-x} = x \text{ admet une unique solution } \alpha \text{ dans } \mathbb{R}}$

(b) $h(1/2) = \dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{\sqrt{e}} = \dfrac{\sqrt{e}-2}{2\sqrt{e}} < 0$ car $\sqrt{e} < 2$

et $h(1) = 1 - e^{-1} = \dfrac{e-1}{e} > 0$ car $e > 2$,

on obtient alors $h(1/2) < h(\alpha) < h(1)$.

Or la bijection réciproque de h a le même sens de variation que h, à savoir strictement croissante sur $\mathbb{R}$. Donc $\boxed{1/2 < \alpha < 1}$

2. (a) f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$ qui est ouvert.

$\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 2x - 2y - e^{-x}$ et $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y) = -2x + 4y$

(b) Le(s) éventuel(s) point(s) critique(s) de f sont solution(s) du système :

$$\left\{\begin{array}{l} \dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 0 \\ \dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 0 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{c} 2x - 2y - e^{-x} = 0 \\ -2x + 4y = 0 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{c} x - e^{-x} = 0 \\ y = x/2 \end{array}\right.$$

$$\iff \left\{\begin{array}{c} x = \alpha \\ y = \alpha/2 \end{array}\right.$$ car on a vu en 1.(a) que l'équation $x - e^{-x} = 0$ admettait une seule solution α.

La fonction f admet donc un $\boxed{\text{unique point critique } a = (\alpha\,,\,\alpha/2)}$

3. (a) $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) = 2 + e^{-x}$; $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x,y) = -2$ et $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) = 4$

(b) Comme f est de classe $\mathcal{C}^2$ sur l'ouvert $\mathbb{R}^2$, il suffit de vérifier la condition suffisante d'extrémum d'ordre 2. En utilisant les notations de Monge au point $a = (\alpha\,,\,\alpha/2)$:

$r = \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a) = 2 + e^{-\alpha}$, $s = \dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(a) = -2$ et $t = \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}(a) = 4$

D'où $rt - s^2 = 4\left(2 + e^{-\alpha}\right) - 4 = 4 + 4e^{-\alpha} > 0$ avec $r > 0$.

Donc f présente un minimum local en a. Notons m ce minimum.

Remarque : on pourrait démontrer que **ce minimum est absolu**. En effet, la deuxième application partielle de f en un point quelconque $(x_0\,,y_0)$ de $\mathbb{R}^2$ est la fonction $f_2 : t \longmapsto f(x_0\,,t) = x_0^2 - 2x_0 t + 2t^2 + e^{-x_0}$ qui présente un minimum absolu en $x_0/2$, minimum égal à $g(x_0) = x_0^2/2 + e^{-x_0}$.

En étudiant ensuite le sens de variations de la fonction $g : t \longmapsto t^2/2 + e^{-t}$, on montre que $\forall t \in \mathbb{R}$, $g(t) \geqslant g(\alpha)$ avec $g(\alpha) = m$

(c) Comme $m = f(a)$ et $e^{-\alpha} = \alpha$

$$\begin{aligned} m &= \alpha^2 - 2\alpha\frac{\alpha}{2} + 2\left(\frac{\alpha}{2}\right)^2 + e^{-\alpha} \\ &= \alpha^2 - \alpha^2 + \alpha^2/2 + \alpha \\ &= \frac{\alpha^2}{2} + \alpha \end{aligned}$$

TD7 : matrices et applications linéaires

1 Énoncés

Exercice 1.

Soit $E = \mathbb{R}_2[X]$ l'espace vectoriel des polynômes de degré au plus 2, à coefficients réels, muni de la base canonique $\mathscr{B} = (1, X, X^2)$.

On définit l'application f sur E par : $\forall P \in E,\ f(P) = 2X\,P - (X^2 - 1)P'$.

1. Vérifier que si P appartient à E, alors $f(P)$ est de degré au plus 2.
2. Montrer que f est un endomorphisme de E.
3. Écrire la matrice A de f dans la base canonique $\mathscr{B}$ de E. Quel est le rang de A ? f est-il bijectif ?
4. On pose $Q_1 = (1 + X)^2$, $Q_2 = 1 - X^2$ et $Q_3 = (1 - X)^2$.
   (a) Démontrer que la famille $\mathcal{B}' = (Q_1, Q_2, Q_3)$ est une base de E.
   (b) Calculer $f(Q_1)$, $f(Q_2)$ et $f(Q_3)$ en fonction de Q_1, Q_2 et Q_3.
   (c) En déduire la matrice A' de f dans la base $\mathcal{B}'$.
   (d) Déterminer le noyau de f.

Exercice 2.

E désigne un espace vectoriel sur $\mathbb{C}$ de dimension 3, rapporté à une base $\mathscr{B} = (e_1,\ e_2,\ e_3)$.
Pour tout nombre complexe k, on considère l'endomorphisme f de E défini par :

$$f(e_2) = 0 \qquad \text{et} \qquad f(e_1) = f(e_3) = k\,e_1 + e_2 - k\,e_3$$

1. Calculer $f(e_1 + i\,e_2 - e_3)$.
2. (a) Déterminer une base de $\operatorname{Im} f$ et donner le rang de f.
   (b) En déduire la dimension du noyau de f et montrer que $\operatorname{Ker} f = \operatorname{Vect}(e_2\,,\, e_1 - e_3)$.
3. Écrire la matrice A de f dans $\mathscr{B}$ et calculer A^2. En déduire sans calcul $f \circ f$.
4. On pose $e'_1 = f(e_1)$, $e'_2 = e_1 - e_3$ et $e'_3 = e_3$
   (a) Montrer que $(e'_1,\ e'_2,\ e'_3)$ est une base de E.
   (b) Donner la matrice A' de f dans cette base.
5. Pour tout complexe z non nul, on pose $B(z) = A - z\,I$, I désignant la matrice identité de $\mathfrak{M}_3(\mathbb{C})$.
   (a) Calculer $(A - zI)(A + zI)$. En déduire que $B(z)$ est inversible puis écrire $(B(z))^{-1}$ en fonction de z, I et A.
   (b) Pour tout n de $\mathbb{N}^*$, déterminer $(B(z))^n$ en fonction de z, n, I et A.

2 Corrigés

Exercice 1.

$E = \mathbb{R}_2[X]$ et l'application f est définie par $\forall\, P \in E,\ f(P) = 2X\,P - (X^2-1)P'$.

1. Soit P un polynôme de E.
   Alors il existe des réels a, b et c tels que $P = aX^2 + bX + c$. D'où

$$\begin{aligned} f(P) &= 2X\,P - (X^2-1)P' \\ &= 2X(aX^2+bX+c) - (X^2-1)(2aX+b) \\ &= 2aX^3 + 2bX^2 + 2cX - (2aX^3 + bX^2 - 2aX - b) \\ &= bX^2 + 2(a+c)X + b \end{aligned}$$

   Donc $f(P)$ est de degré au plus 2 (b peut éventuellement être égal à 0).
   Ainsi f est bien à valeurs dans E.

   Variante : on raisonne sur le degré de $P \in E$ en distinguant deux cas.

   - 1ER CAS : si $\deg(P) \leqslant 1$ alors P' est constant (éventuellement nul) et $\deg(X^2-1)P' \leqslant 2$.
     De plus $\deg(2X\,P) = \deg(2X) + \deg(P) = 1 + \deg(P) \leqslant 2$.
     Donc $\deg(f(P)) \leqslant \max\left\{\deg(2X\,P),\, \deg[(X^2-1)P']\right\} \leqslant 2$.
   - 2ÈME CAS : si $\deg(P) = 2$, on note a le coefficient dominant de P. Alors le monôme de plus haut degré de P' est $2aX$, celui de $(X^2-1)P'$ est donc $2aX^3$; et le monôme de plus haut degré de $2X\,P$ est également $2aX^3$.

     On conclut que dans la différence $2X\,P - (X^2-1)P'$, les termes de degré 3 s'annulent. Ainsi $f(P)$ est de degré au plus 2.

2. Soit P et Q deux polynômes de E. Soit λ un scalaire réel.

$$\begin{aligned} f(\lambda\,P + Q) &= 2X\,(\lambda\,P+Q) - (X^2-1)(\lambda\,P+Q)' \\ &= 2X\,\big(\lambda\,P+Q\big) - (X^2-1)\big(\lambda\,P' + Q'\big) \\ &= \lambda\,2X\,P + 2X\,Q - \lambda(X^2-1)P' - (X^2-1)Q \\ &= \lambda\big(2X\,P - (X^2-1)P'\big) - \big(2X\,Q - (X^2-1)Q'\big) \\ &= \lambda\,f(P) + f(Q) \end{aligned}$$

   Par conséquent f est une application linéaire de E dans E.

3. On commence par calculer les images par f des polynômes formant la base $\mathscr{B}$.

   $f(1) = 2X - (X^2-1)\times 0 = 2X,\qquad f(X) = 2X^2 - (X^2-1)\times 1 = 1 + X^2,$
   et $f(X^2) = 2X^3 - (X^2-1)\,2X = 2X$. On en déduit que

$$A = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(f) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

   La matrice A a deux colonnes identiques. Elle a le même rang que la matrice

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

   Or les deux colonnes de cette dernière matrice ne sont pas proportionnelles.
   Donc A est de rang 2.
   Comme A n'est pas de rang égal à son ordre 3, A n'est pas inversible.
   Par conséquent l'application linéaire f n'est pas bijective.

4. On pose $Q_1 = (1+X)^2$, $Q_2 = 1 - X^2$ et $Q_3 = (1-X)^2$.
   Il est faux d'écrire que $Q_1 = (1,2,1)$ ou encore que

$$\mathscr{B}' = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} ; \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} ; \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$$

   Un polynôme n'est pas une matrice colonne et $E \neq \mathbb{R}^3$.

   (a) Soit α_1, α_2 et α_3 des réels tels que $\alpha_1\,Q_1 + \alpha_2\,Q_2 + \alpha_3\,Q_3 = 0$.
   Alors $\alpha_1\,(1+X)^2 + \alpha_2\,(1-X^2) + \alpha_3\,(1-X)^2 = 0$.
   D'où $\alpha_1\,(1+2X+X^2) + \alpha_2\,(1-X^2) + \alpha_3\,(1-2X+X^2) = 0$.
   Donc $(\alpha_1 - \alpha_2 + \alpha_3)X^2 + 2(\alpha_1 - \alpha_3)X + (\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3) = 0$.
   On en déduit par identification des coefficients :

$$\left\{\begin{array}{rcl} \alpha_1 - \alpha_2 + \alpha_3 &=& 0 \\ 2(\alpha_1 - \alpha_3) &=& 0 \\ \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 &=& 0 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{rcl} \alpha_1 - \alpha_2 + \alpha_3 &=& 0 \\ \alpha_1 - \alpha_3 &=& 0 \ \ L_2 \longleftarrow \frac{1}{2}L_2 \\ \alpha_1 + \alpha_3 &=& 0 \ \ L_3 \longleftarrow \frac{1}{2}(L_3 + L_1) \end{array}\right.$$

$$\iff \left\{\begin{array}{rcl} \alpha_1-\alpha_2+\alpha_3 &=& 0\\ \alpha_1-\alpha_3 &=& 0\\ \alpha_1 &=& 0 \quad L_3 \longleftarrow \frac{1}{2}(L_3+L_2)\end{array}\right.$$

$$\iff \left\{\begin{array}{rcl} \alpha_2 &=& 0\\ \alpha_3 &=& 0\\ \alpha_1 &=& 0\end{array}\right.$$

Ainsi $\mathcal{B}'=(Q_1,Q_2,Q_3)$ est **famille libre** de 3 vecteurs dans un espace vectoriel E qui est de dimension 3.
$\mathcal{B}'=(Q_1,Q_2,Q_3)$ est une base de E.

(b)

$$\begin{array}{rcl} f(Q_1) &=& 2XQ_1-(X^2-1)Q_1'\\ &=& 2X(1+X)^2-(X-1)(X+1)\times 2(1+X)\\ &=& 2X(1+X)^2-2(X-1)(1+X)^2\\ &=& (1+X)^2\,[2X-2(X-1)]\\ &=& 2(1+X)^2\\ &=& 2\,Q_1\end{array}$$

$$\begin{array}{rcl} f(Q_2) &=& 2X(1-X^2)-(X^2-1)\times(-2X)\\ &=& (1-X^2)(2X-2X)\\ &=& 0\end{array}$$

$$\begin{array}{rcl} f(Q_3) &=& 2X(1-X)^2-(X^2-1)\times(-2)(1-X)\\ &=& 2X(1-X)^2+2(X-1)(X+1)(1-X)\\ &=& (1-X)^2\,[2X-2(X+1)]\\ &=& -2(1-X)^2\\ &=& -2\,Q_3\end{array}$$

(c) On en déduit directement que

$$A'=\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}'}(f)=\begin{pmatrix}2&0&0\\0&0&0\\0&0&-2\end{pmatrix}$$

Il ne fallait pas utiliser ici la formule du changement de base $A'=P^{-1}A\,P$ dans laquelle P désigne la matrice de passage de la base canonique $\mathscr{B}$ vers la base $\mathcal{B}'$.

(d) D'après le théorème du rang, $\quad \dim(E)=\dim(\mathrm{Ker}\,f)+\mathrm{rg}(f)$.
D'où $\quad \dim(\mathrm{Ker}\,f)=\dim(E)-\mathrm{rg}(f)=3-2=1$. Or d'après la question précédente, $f(Q_2)=0$. Donc $Q_2\in\mathrm{Ker}\,f$ avec $Q_2\neq 0$.

Finalement $\quad \boxed{\mathrm{Ker}\,f=\mathrm{Vect}(1-X^2)}$

Exercice 2.

1. f étant linéaire,
$f(e_1+i\,e_2-e_3)=f(e_1)+i\,f(e_2)+(-1)\cdot f(e_3)=f(e_1)-f(e_3)=\overrightarrow{0_E}$.

2. (a) Par définition de l'image,

$$\begin{array}{rcl} w\in\mathrm{Im}f &\iff& \exists\,u\in E\ /\ w=f(u)\\ &\iff& \exists\,(x,y,z)\in\mathbb{C}^3\ /\ w=f(x\,e_1+y\,e_2+z\,e_3)\\ &\iff& \exists\,(x,y,z)\in\mathbb{C}^3\ /\ w=x\,f(e_1)+y\,f(e_2)+z\,f(e_3)\\ &\iff& \exists\,(x,y,z)\in\mathbb{C}^3\ /\ w=(x+z)\,f\,(e_1)\\ &\iff& \exists\,\lambda\in\mathbb{C}\ /\ w=\lambda\,f(e_1)\\ &\iff& w\in\mathrm{Vect}\,(f\,(e_1))\end{array}$$

Donc $\boxed{\mathrm{Im}f=\mathrm{Vect}(f(e_1))}$ et $(f\,(e_1))$ est une famille génératrice de $\mathrm{Im}f$ et libre (un seul vecteur non nul) donc une base de $\mathrm{Im}f$.
Enfin $\mathrm{rg}(f)=\dim\,(\mathrm{Im f})=1$

(b) • D'après le **théorème du rang**, $\quad \dim(E)=\dim(\mathrm{Ker}f)+\mathrm{rg}(f)$
Comme $\dim\,(E)=3$, on obtient $\dim\,(\mathrm{Ker}f)=3-1=2$.

• Il suffit donc de vérifier que les deux vecteurs donnés appartiennent à $\mathrm{Ker}f$ et qu'ils sont linéairement indépendants :
$f\,(e_2)=\overrightarrow{0_E}$ et $f\,(e_1-e_3)=f\,(e_1)-f\,(e_3)$ car f est linéaire
d'où $f\,(e_1-e_3)=\overrightarrow{0_E}$. Donc ils appartiennent bien à $\mathrm{Ker}f$.

Comme la famille (e_1,e_2,e_3) est une base, elle est libre.

Soit x et y deux nombres complexes tels que $x\,e_2 + y\,(e_1 - e_3) = \overrightarrow{0_E}$ alors $x = y = -y = 0$.

Donc $(e_2, e_1 - e_3)$ est une famille libre de Ker$f$ de deux vecteurs.

Par conséquent $\boxed{(e_2\,,\, e_1 - e_3) \text{ est une base de Ker} f.}$

3. L'énoncé fournit les images par f des vecteurs e_1, e_2, e_3 dans la base (e_1, e_2, e_3).

$$A = \begin{pmatrix} k & 0 & k \\ 1 & 0 & 1 \\ -k & 0 & -k \end{pmatrix}$$

$$\text{Et } A^2 = \begin{pmatrix} k & 0 & k \\ 1 & 0 & 1 \\ -k & 0 & -k \end{pmatrix}\begin{pmatrix} k & 0 & k \\ 1 & 0 & 1 \\ -k & 0 & -k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \mathbb{O}_3$$

A^2 est la matrice associée à $f \circ f$ dans la base $\mathscr{B}$ donc $\boxed{f \circ f = \widetilde{0}_{\mathscr{L}(E)}}$

4. (a) Montrons que la famille $(e'_1,\ e'_2,\ e'_3)$ est libre dans E.

...

Donc $\boxed{\mathscr{B}' = (e'_1, e'_2, e'_3) \text{ est une base de } E}$

(b) On calcule les images par f de ces vecteurs puis leurs coordonnées dans la «nouvelle» base $\mathscr{B}'$:

$f\,(e'_1) = f\,(f\,(e_1)) = \overrightarrow{0_E}$ car $f \circ f = \widetilde{0}_{\mathscr{L}(E)}$

$f\,(e'_2) = f\,(e_1 - e_3) = \overrightarrow{0_E}$ car $(e_1 - e_3) \in \text{Ker} f$

$f\,(e'_3) = f\,(e_3) = f\,(e_1) = e'_1 = 1\,e'_1 + 0\,e'_2 + 0\,e'_3$

Ainsi $\boxed{A' = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}}$

5. (a) • On développe : $(A - z\,I)\,(A + z\,I) = A^2 + z\,AI - z\,IA - z^2 I^2 = -z^2\,I$

• Or $z \neq 0$ Donc $B(z)\left[\dfrac{-1}{z^2}\,(A + z\,I)\right] = I$

avec $\dfrac{-1}{z^2}\,(A + z\,I) \in \mathfrak{M}_3(\mathbb{C})$. En conclusion, $B(z)$ est inversible et $\boxed{\big(B(z)\big)^{-1} = -\dfrac{1}{z^2}\,(A + z\,I)}$

(b) On rappelle que $B(z) = A + (-z\,I)$

Comme les matrices A et $(-z\,I)$ commutent, on peut appliquer la formule du binôme de Newton.

D'où pour tout entier naturel $n \geqslant 2$,

$$\begin{aligned}
[B(z)]^n &= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} A^k\,(-z\,I)^{n-k} \text{ et comme } A^k = \mathbb{O}_3 \text{ pour } k \geqslant 2 \\
B(z)^n &= \sum_{k=0}^{1} \binom{n}{k} A^k\,(-z\,I)^{n-k} + \sum_{k=2}^{n} \binom{n}{k} \mathbb{O}_3 \\
&= \sum_{k=0}^{1} (-z)^{n-k} \binom{n}{k} A^k \\
&= (-z)^n\,I + n\,(-z)^{n-1}\,A
\end{aligned}$$

Finalement pour tout entier $n \geqslant 1$,

$$\boxed{[B(z)]^n = (-z)^{n-1}(n\,A - z\,I)}$$