Applications linéaires

1 Pour s'entraîner

1 Soit E un espace vectoriel sur $\mathbb{C}$ de dimension 3, muni d'une base $\mathscr{B} = \left(\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, \overrightarrow{e_3}\right)$. On définit l'endomorphisme u de E par

$$u(\overrightarrow{e_1}) = -\overrightarrow{e_3} \quad , \quad u(\overrightarrow{e_2}) = i\,\overrightarrow{e_2} \quad \text{et} \quad u(\overrightarrow{e_3}) = \overrightarrow{e_1}$$

Déterminer $u \circ u$.
En déduire que u est un endomorphisme bijectif de E.

2
1. Justifier que $\mathscr{B} = \left(1\,,\, X-1\,,\, (X-1)(X-2)\right)$ est une base du $\mathbb{R}-$espace vectoriel $\mathbb{R}_2[X]$.
2. Calculer les coordonnées du polynôme X^2 dans cette base $\mathscr{B}$.

3 Soit $f \in \mathscr{L}(\mathbb{R}^3)$ l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ canoniquement associé à la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 3 \\ -4 & -7 & -12 \\ 2 & 4 & 7 \end{pmatrix}$$

1. Calculer la matrice de $f \circ f$ dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$.
   Que peut-on en déduire pour $f \circ f$?
2. Que peut-on dire de f ? Que dire de la somme $\operatorname{Ker} f + \operatorname{Im} f$?

4
1. Montrer que $P = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ est la matrice dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$ d'une projection vectorielle p dont on donnera les éléments caractéristiques.
2. Montrer que $S = \begin{pmatrix} -1 & -2 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ est la matrice dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$ d'une symétrie vectorielle s dont on donnera les éléments caractéristiques.

5 Soit $\mathscr{B}_0$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$. On pose $\overrightarrow{u} = (1, 0, -1)$, $\mathscr{D} = \operatorname{Vect}(\overrightarrow{u})$ et on note $\mathscr{P}$ le plan vectoriel d'équation $x + y - z = 0$.

1. Proposer une base $\mathscr{B}'$ de $\mathbb{R}^3$ constituée de vecteurs de $\mathscr{P}$ et $\mathscr{D}$.
   Écrire la matrice de passage P de la base $\mathscr{B}_0$ vers la base $\mathscr{B}'$.
2. Soit $s \in \mathscr{L}(\mathbb{R}^3)$ la symétrie vectorielle par rapport au plan $\mathscr{P}$ parallèlement à la droite $\mathscr{D}$.
   Donner la matrice de s dans la base $\mathscr{B}'$.
3. En déduire la matrice de s dans la base canonique $\mathscr{B}_0$.

2 Pour approfondir

6 Soient f_1, f_2 et f_3 les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par :

$$\forall\, x \in \mathbb{R}, \begin{cases} f_1(x) &= \mathrm{e}^{2x} \\ f_2(x) &= x\,\mathrm{e}^{2x} \\ f_3(x) &= x^2\,\mathrm{e}^{2x} \end{cases}$$

On désigne par E le $\mathbb{R}-$espace vectoriel engendré par ces 3 fonctions.

1. Déterminer une base $\mathscr{B}$ de E. En déduire la dimension de E.
2. Soit D l'application définie sur E par : $\forall\, f \in E$, $D(f) = f'$.
   Démontrer que D est un automorphisme de E et donner sa matrice A dans la base $\mathscr{B}$.
3. (a) On pose $N = A - 2I_3$. Calculer N^2 et N^3.
   (b) En déduire la matrice A^n en fonction de n pour tout entier naturel $n \geqslant 1$.
4. Soit g l'application définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = (4x^2 - 1)\mathrm{e}^{2x}$.
   Expliciter la dérivée $n-$ième de f.

7 Soit E un $\mathbb{K}-$espace vectoriel. Soit $u \in \mathscr{L}(E)$ tel que

$$u^2 - 3u + 2\mathrm{id}_E = \widetilde{0} \quad \text{où} \quad u^2 = u \circ u$$

1. Montrer que u est bijectif et exprimer u^{-1} comme combinaison linéaire de u et id_E.
2. On pose $f = u - \mathrm{id}_E$ et $g = 2\mathrm{id}_E - u$. Montrer que $f \circ g = g \circ f = \widetilde{0}$.
3. Vérifier que f et g sont des projecteurs de E.
4. $\star$ Démontrer que $\mathrm{Im} f = \mathrm{Ker}\, g$ et $\mathrm{Im}\, g = \mathrm{Ker} f$.
5. Prouver que $E = \mathrm{Ker} f \oplus \mathrm{Ker}\, g$.

3 TP sous Maxima

8 *On utilisera :* `diff`, `expand`, `matrix`, `rank`, `invert`, `transpose`

On note $E = \mathbb{R}_2[X]$ le $\mathbb{R}-$espace vectoriel des polynômes à coefficients réels, de degré inférieur ou égal à 2. On considère l'application g définie sur E par :

$$\forall P \in E, \quad g(P) = (2X+1)P + (1-X^2)P'$$

1. Calculer $g(\mathbb{1})$, $g(X)$ et $g(X^2)$.
2. Vérifier que g est un endomorphisme de E.
   Cette question ne fera pas intervenir l'utilisation de commandes MAXIMA.
3. Écrire la matrice A de g relativement à la base canonique $\mathscr{B} = (\mathbb{1}, X, X^2)$ de E.
4. Donner le rang de g. g est-il un isomorphisme de E sur E ?
5. (a) Donner la matrice de g^{-1} dans la base $\mathscr{B}$.
   (b) On pose $P = a + bX + cX^2$ où $(a,b,c) \in \mathbb{R}^3$.
   Déterminer, à l'aide d'un produit matriciel, le polynôme $g^{-1}(P)$.

4 Pour travailler seul

9

1. Justifier qu'il existe une unique application linéaire f de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^2$ telle que :

$$f(1,0,0) = (0,1) \quad ; \quad f(1,1,0) = (1,0) \qquad f(1,1,1) = (1,1)$$

2. Calculer $f(x,y,z)$ pour tous réels x, y et z.
3. Déterminer le noyau et l'image de f.

10 Soit $f \in \mathscr{L}(\mathbb{R}^3)$ tel que $f \circ f$ est l'application nulle sur $\mathbb{R}^3$.

1. Montrer que $\mathrm{Im} f \subset \mathrm{Ker} f$.
2. On suppose de plus que $f \neq \widetilde{0_{\mathbb{R}^3}}$.
   Peut-on avoir $\mathrm{rg}(f) = 0$? $\mathrm{rg}(f) = 3$? $\mathrm{rg}(f) = 2$?
   En déduire le rang de f par disjonction des cas.

11 Calculer le rang de chacune des deux matrices suivantes :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 2 & -2 \\ -7 & -7 & 2 & -8 \\ 0 & 4 & -6 & 6 \\ 2 & -2 & 0 & -2 \end{pmatrix} \quad , \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -4 & -2 & -1 \\ 0 & -2 & 4 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & -2 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Intégration sur un intervalle

1 Pour s'entraîner

12 1. Soient x et a des réels strictement positifs.
Calculer chacune des intégrales suivantes :

$$\int_1^x \mathrm{e}^{-t}\mathrm{d}t \quad ; \quad \int_0^x \frac{\mathrm{e}^{-t}}{1+a\,\mathrm{e}^{-t}}\mathrm{d}t \quad ; \quad \int_0^x \frac{1}{(t+1)(t+2)}\mathrm{d}t$$

Pour la dernière intégrale, on pourra remarquer que

$$1=(t+2)-(t+1)$$

2. En déduire la convergence et la valeur de chacune des intégrales généralisées suivantes :

$$\int_1^{+\infty} \mathrm{e}^{-t}\mathrm{d}t \quad ; \quad \int_0^{+\infty} \frac{1}{a+\mathrm{e}^{t}}\mathrm{d}t \quad ; \quad \int_0^{+\infty} \frac{1}{(t+1)(t+2)}\mathrm{d}t$$

13 1. Soit x un réel tel que $x \geqslant 2$. Calculer par changement de variable, l'intégrale
$\displaystyle\int_2^x \frac{1}{t\sqrt{t^2-1}}\mathrm{d}t$. On pourra poser $u=\dfrac{1}{t}$.

2. En déduire la convergence de l'intégrale généralisée
$\displaystyle\int_2^{+\infty} \frac{1}{t\sqrt{t^2-1}}\mathrm{d}t$, et préciser sa valeur.

14 Justifier l'existence et calculer l'intégrale généralisée :

(a) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\arctan t}{1+t^2}\mathrm{d}t$ (b) $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\arctan t}{t^2}\mathrm{d}t$

15 Soit n un entier naturel, $n \geqslant 2$.

1. Calculer pour tout réel $x \geqslant 1$, $\displaystyle\int_1^x \frac{\ln t}{t^n}\mathrm{d}t$.
2. En déduire la convergence et la valeur de $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\ln t}{t^n}\mathrm{d}t$.

16 Étudier la nature des intégrales généralisées et calculer ces intégrales lorsqu'elles sont convergentes

(a) $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{1+t^2}\mathrm{d}t$

(b) $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{t}{(1+t^2)^2}\mathrm{d}t$

(c) $\displaystyle\int_0^{1} \frac{1}{\sqrt{t}}\mathrm{d}t$

(d) $\displaystyle\int_0^{1} \frac{\mathrm{e}^t}{1-\mathrm{e}^t}\mathrm{d}t$

(e) $\displaystyle\int_0^{1} \ln t\,\mathrm{d}t$

(f) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^t}{(1+\mathrm{e}^t)^2}\mathrm{d}t$

17 1. Soit x un réel tel que $x \geqslant 1$. Calculer par une intégration par parties, l'intégrale $\displaystyle\int_1^x \ln\left(1+\frac{1}{t^2}\right)\mathrm{d}t$.

2. En déduire la nature (convergente ou divergente) de l'intégrale généralisée $\displaystyle\int_1^{+\infty} \ln\left(1+\frac{1}{t^2}\right)\mathrm{d}t$, et sa valeur.

18 Déterminer si les intégrales suivantes sont convergentes :

(a) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{x-5}{x^2+4x+4}\mathrm{d}x$

(b) $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{u\,\mathrm{e}^{\cos u}}\mathrm{d}u$

(c) $\displaystyle\int_0^{1} \frac{\mathrm{e}^x-1}{x\sqrt{x}}\mathrm{d}x$

(d) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{2+\ln x}{x+4}\mathrm{d}x$

(e) $\displaystyle\int_0^{1} \frac{1}{\sqrt{t^3+3t^2+t}}\mathrm{d}t$

(f) $\displaystyle\int_1^{+\infty} \ln\left(1+\frac{1}{x^3}\right)\mathrm{d}x$

(g) $\displaystyle\int_1^{+\infty} t^2\,\mathrm{e}^{-t}\mathrm{d}t$

(h) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\ln x}{x^2+1}\mathrm{d}x$

(i) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin(x\sqrt{x})}{x^2}\mathrm{d}x$

(j) $\star$ $\displaystyle\int_0^{1} \sin\left(\frac{1}{t}\right)\mathrm{d}t$

19

1. Démontrer que pour tout réel $x \geqslant 1$,
$$\int_1^x \frac{\sin t}{t}\,\mathrm{d}t = \cos(1) - \frac{\cos x}{x} - \int_1^x \frac{\cos t}{t^2}\,\mathrm{d}t$$
2. En déduire que l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\sin t}{t}\,\mathrm{d}t$ est convergente.
3. (a) Montrer par une méthode analogue à la précédente, que l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\cos(2t)}{t}\,\mathrm{d}t$ est convergente.
   (b) Montrer que l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\sin^2 t}{t}\,\mathrm{d}t$ est divergente.
   En déduire la divergence de l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{|\sin t|}{t}\,\mathrm{d}t$.

20

1. Déterminer les valeurs de $n \in \mathbb{N}$ pour lesquelles l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{1+t+t^{n+1}}$ est convergente.
   On pose alors $I_n = \displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{1+t+t^{n+1}}$
2. Après avoir mis sous forme canonique $1+t+t^2$, calculer à l'aide d'un changement de variable, l'intégrale I_1.
3. Montrer que la suite (I_n) est décroissante.
4. On se fixe un entier naturel n non nul.
   (a) Montrer que l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t+t^{n+1}}$ est convergente.
   On note alors K_n sa valeur.
   (b) Montrer, à l'aide d'un changement de variable simple que
   $$K_n = \int_1^{+\infty} \frac{t^{n-1}\,\mathrm{d}t}{t^n(1+t^n)} = \frac{1}{n}\int_1^{+\infty} \frac{du}{u(1+u)}$$
   (c) Vérifier que pour tout réel $u > 0$, $\dfrac{1}{u(1+u)} = \dfrac{1}{u} - \dfrac{1}{1+u}$
   En déduire la valeur de K_n.
5. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\quad 0 \leqslant I_n \leqslant \dfrac{\ln 2}{n}$.
   En déduire la convergence et la limite de la suite (I_n).

21 Soit $n \in \mathbb{N}$. On pose
$$I_n = \int_0^{+\infty} \frac{1}{1+x^n}\,\mathrm{d}x$$

1. Pour quelles valeurs de l'entier naturel n, l'intégrale I_n est-elle convergente ? Calculer I_2
2. (a) Justifier la convergence de l'intégrale généralisée $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{x}{1+x^3}\,\mathrm{d}x$
   (b) En effectuant le changement de variable $u = \dfrac{1}{x}$ dans l'intégrale $\displaystyle\int_a^b \frac{x}{1+x^3}\,\mathrm{d}x$, démontrer que $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{x}{1+x^3}\,\mathrm{d}x = I_3$
   (c) Vérifier que pour tout réel positif x,
   $$\frac{1}{1+x^3} = \frac{1}{1-x+x^2} - \frac{x}{1+x^3}$$
   (d) Après avoir mis sous forme canonique $1-x+x^2$, calculer à l'aide du changement de variable $u = \dfrac{2x-1}{\sqrt{3}}$, l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1}{1-x+x^2}\,\mathrm{d}x$.
   (e) En déduire la valeur de I_3
3. Par le théorème de convergence dominée, déterminer $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} I_n$

22 Soit f la fonction définie par $f(x) = \displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{t^{-x}}{1+t}\,\mathrm{d}t$

1. Déterminer l'ensemble de définition de f.
2. Calculer $f(1)$. Calculer $f(1/2)$ par changement de variable.
3. Quel est le sens de variation de f ?
4. Déterminer $f(x) + f(x+1)$ pour $x > 0$.
   En déduire la limite de f en 0 et en $+\infty$. Calculer $f(2)$ et $f(3/2)$.

23 *Deux changements de variable.* Soit $x>0$, x fixé.

1. Justifier la convergence de l'intégrale impropre $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{\ln t}{x^2+t^2}\,\mathrm{d}t$
2. On pose $f(x)=\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{\ln t}{x^2+t^2}\,\mathrm{d}t$
   (a) ⋆ Montrer par un changement de variable que $\displaystyle\int_0^1\frac{\ln t}{1+t^2}\,\mathrm{d}t=-\int_1^{+\infty}\frac{\ln u}{1+u^2}\,\mathrm{d}u$. En déduire $f(1)$.
   (b) En déduire, par le changement de variable $u=\dfrac{t}{x}$, que
$$f(x)=\frac{\pi}{2}\frac{\ln x}{x}$$

24 Pour tout réel x appartenant à $]0,1[$, on pose : $F(x)=\displaystyle\int_x^{x^2}\frac{1}{\ln t}\,\mathrm{d}t$

1. (a) Calculer pour tout réel $x\in]0,1[$ l'intégrale $\displaystyle\int_x^{x^2}\frac{1}{t\ln t}\,\mathrm{d}t$
   (b) Justifier que F est bien définie et que
$$\forall x\in]0,1[,\ x^2\ln 2\leqslant F(x)\leqslant x\ln 2$$
   (c) En déduire que F admet une limite finie à gauche en 1.
   (d) Calculer $F'(x)$.
2. (a) Justifier la convergence de l'intégrale généralisée
$$I=\int_0^1\frac{t-1}{\ln t}\,\mathrm{d}t$$
   (b) Montrer que F est une primitive sur $]0,1[$ de la fonction $f:t\longmapsto\dfrac{t-1}{\ln t}$.
   (c) En déduire la valeur de I.

25 Soit la fonction $F:x\longmapsto\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{e}^{-tx}}{1+t^2}\,\mathrm{d}t$

1. Déterminer l'ensemble de définition $\mathscr{D}$ de F. Calculer $F(0)$.
2. Montrer que $\forall x\in\mathbb{R}^{+*}$, $F(x)\leqslant\dfrac{1}{x}$.
   En déduire la limite de F en $+\infty$.
3. Étudier le sens de variation de la fonction F.

26 *Théorème de convergence dominée* .
Dans chacun des cas suivants, prouver la convergence de la suite (I_n) et calculer $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}I_n$:

(a) $I_n=\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{1+\sin(t/n)}{1+t^2}\,\mathrm{d}t$

(b) $I_n=\displaystyle\int_1^{+\infty}\frac{t^n}{1+t^{n+2}}\,\mathrm{d}t$

(c) $I_n=\displaystyle\int_0^1\frac{n(x+x^2)}{1+nx}\,\mathrm{d}x$

(d) $I_n=\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{\arctan(nx)}{1+x^2}\,\mathrm{d}x$

(e) $I_n=\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{\arctan(x^n)}{1+x^2}\,\mathrm{d}x$

(f) ⋆ $I_n=\displaystyle\int_0^{+\infty}\exp(-t^n)\,\mathrm{d}t$

(g) ⋆ $I_n=\displaystyle\int_0^{+\infty}\arctan\left(\frac{1}{x^n}\right)\mathrm{d}x$

27

1. Déterminer $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-t}\arctan(nt)\,\mathrm{d}t$.
2. En déduire un équivalent simple lorsque $n\to+\infty$ de
$$\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-\frac{x}{n}}\arctan x\,\mathrm{d}x$$

28 Soit f une fonction continue sur $[0,+\infty[$ et admettant une limite finie ℓ en $+\infty$. On pose

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \mu_n = \frac{1}{n}\int_0^n f(x)\,\mathrm{d}x$$

1. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \mu_n = \displaystyle\int_0^1 f(nt)\,\mathrm{d}t$
2. En déduire la convergence et la limite de la suite $(\mu_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$

2 Pour approfondir

29

1. Soit $x \in \mathbb{R}^{+*}$. Démontrer que l'intégrale généralisée $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-t}}{x+t}\,\mathrm{d}t$ est convergente.

On définit la fonction F sur $]0,+\infty[$ par : $F(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-t}}{x+t}\,\mathrm{d}t$.

2. (a) Soit $x>0$. Montrer que $F(x) \geqslant \displaystyle\int_0^1 \frac{\mathrm{e}^{-1}}{x+t}\,\mathrm{d}t$.
   (b) En déduire la limite de F en 0^+.
3. (a) Soit $x>0$. Montrer que $0 \leqslant F(x) \leqslant \displaystyle\frac{1}{x}\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t$
   (b) En déduire la limite de F en $+\infty$.
4. On se fixe un réel $x>0$.
   (a) Soit $A \in \mathbb{R}^+$. Effectuer le changement de variable $u = x+t$ dans l'intégrale $\displaystyle\int_0^A \frac{\mathrm{e}^{-t}}{x+t}\,\mathrm{d}t$
   (b) En déduire l'expression de $F(x)$ en fonction de e^x et de $\displaystyle\int_x^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-u}}{u}\,\mathrm{d}u$
5. Démontrer que F est dérivable sur $]0,+\infty[$ et calculer $F'(x)$.

30 Soient a et b deux réels strictement positifs.

1. Justifier la convergence de l'intégrale généralisée $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\cos u}{u}\,\mathrm{d}u$.
2. Monter que l'intégrale généralisée $I(a,b) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\cos(ax)-\cos(bx)}{x}\,\mathrm{d}x$ converge.
3. Prouver, par changements de variable, que pour tout $\varepsilon>0$,
$$\int_\varepsilon^{+\infty} \frac{\cos(ax)-\cos(bx)}{x}\,\mathrm{d}x = \int_{a\varepsilon}^{b\varepsilon} \frac{\cos t}{t}\,\mathrm{d}t$$
4. (a) Montrer que la fonction $g : t \longrightarrow \dfrac{\cos(t)-1}{t}$ se prolonge par continuité en zéro.
   (b) $\star$ En introduisant une primitive G de g sur $\mathbb{R}$, déterminer la valeur de $I(a,b)$.

31 *La fonction Gamma d'Euler* .

Sous réserve d'existence, on pose pour $x \in \mathbb{R}$, $\Gamma(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} t^{x-1}\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t$

1. Soit x un réel.
   (a) Montrer que l'intégrale généralisée $\displaystyle\int_1^{+\infty} t^{x-1}\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t$ est convergente.
   (b) Montrer que $\displaystyle\int_0^1 t^{x-1}\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t$ converge ssi $x>0$. En déduire l'ensemble de définition I de Γ.
2. (a) On se fixe un réel $x>0$. À l'aide d'une intégration par parties, démontrer que
$$\Gamma(x+1) = x\,\Gamma(x) \quad (\star)$$
   (b) Calculer $\Gamma(1)$. En déduire $\Gamma(n)$ pour tout entier $n \geqslant 1$.
3. On admet que la fonction Γ est continue sur I. En utilisant l'égalité $(\star)$, proposer un équivalent simple de Γ en 0^+.

3 TP sous Maxima

32 *On utilisera :* `integrate, float, diff, assume, limit, ode2, ic1.`

Soit $f : x \longmapsto \int_0^{+\infty} \ln(t)\mathrm{e}^{-xt}\,\mathrm{d}t$

1. Préciser l'ensemble de définition I de f. Donner la valeur exacte de $f(1)$ et une valeur approchée à 10^{-4} près.
2. On admet que f est de classe $\mathscr{C}^1$ sur I.
   Calculer $f'(x)$ sous la forme d'une intégrale.
3. On se fixe un réel x appartenant à I.
   (a) Proposer une primitive sur $]0,+\infty[$ de la fonction $t \mapsto \ln(t)$.
   (b) Donner $\lim\limits_{t\to 0^+} t\ln(t)-t$ et $\lim\limits_{t\to+\infty} t\ln t\,\mathrm{e}^{-xt}$.
   (c) ⋆ En effectuant une intégration par parties sur $\int_\varepsilon^A \ln(t)\mathrm{e}^{-xt}\,\mathrm{d}t$,

   montrer que $\quad f(x) = -x f'(x) - \dfrac{1}{x}$
4. Déduire de la question précédente que f est solution d'une équation différentielle linéaire du premier ordre.
5. Expliciter $f(x)$ pour $x \in I$.

4 Pour travailler seul

33

1. Soit α un réel strictement positif.
   Pour quelles valeurs de α, l'intégrale généralisée $\int_1^{+\infty} \dfrac{1}{t^\alpha(1+t)}\,\mathrm{d}t$ est-elle convergente ?
2. On définit la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ par :
$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad u_n = \int_1^{+\infty} \frac{1}{t^n(1+t)}\,\mathrm{d}t$$
   (a) Prouver que
$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad u_n + u_{n+1} = \frac{1}{n}$$
   (b) Calculer u_1 en remarquant que pour tout réel $t \geqslant 1$,
$$\frac{1}{t(1+t)} = \frac{1}{t} - \frac{1}{1+t}$$
   (c) En déduire u_2 et u_3.
3. (a) Montrer que la suite (u_n) est décroissante.
   (b) établir que pour tout entier $n \geqslant 2$,
$$\frac{1}{n} \leqslant 2u_n \leqslant \frac{1}{n-1}$$
   (c) En déduire un équivalent simple de u_n lorsque n tend vers $+\infty$.

34

1. Justifier, pour tout réel $x > 0$, la convergence de l'intégrale
$$J(x) = \int_x^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-t}}{t}\,\mathrm{d}t$$
2. Soit $x > 0$.
   (a) Montrer, par une intégration par parties, que
$$\frac{\mathrm{e}^{-x}}{x}\left(1-\frac{1}{x}\right) \leqslant J(x) \leqslant \frac{\mathrm{e}^{-x}}{x}$$
   (b) En déduire un équivalent simple de $J(x)$ lorsque x tend vers $+\infty$.
3. (a) Vérifier que pour tout réel $x > 0$, $\quad J(x) = -\int_1^x \dfrac{\mathrm{e}^{-t}}{t}\,\mathrm{d}t + J(1)$
   (b) Prouver que J est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}^{+*}$ et calculer $J'(x)$.
   (c) En déduire les variations de J sur $\mathbb{R}^{+*}$.
   Préciser la limite de J en zéro.

Déterminants

1 Pour s'entraîner

35 Calculer les déterminants suivants :

$$\begin{vmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{vmatrix} \quad ; \quad \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{vmatrix} \quad ; \quad \begin{vmatrix} -3 & 0 & 0 \\ \sqrt{5} & -1 & 0 \\ 5 & 15 & 2 \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 4 & 9 \end{vmatrix} \quad ; \quad \begin{vmatrix} 0 & 4 & 7 \\ 2 & 0 & 8 \\ 3 & 6 & 0 \end{vmatrix} \quad ; \quad \begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 \\ -5 & 3 & 3 \\ \sqrt{7} & -1 & -1 \end{vmatrix}$$

36 Donner, sans calcul, la valeur de chaque déterminant :

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 2 & 6 & 5 \\ 3 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} \quad ; \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} 2i & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -i \end{vmatrix} \quad ; \quad \Delta_4 = \begin{vmatrix} 2 & 5 & 6 \\ 3 & 3 & 3 \\ 4 & 10 & 12 \end{vmatrix}$$

37 *En géométrie plane* .

Le plan usuel orienté est muni d'un repère orthonormal direct $\left(O ; \vec{i}, \vec{j}\right)$.

1. Soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux deux vecteurs non nuls du plan.
   (a) Rappeler la formule d'addition $\sin(b-a)$ pour a et b réels.
   (b) En notant $\mathscr{B}$ la base $(\vec{i}, \vec{j})$, démontrer que

$$\det_{\mathscr{B}}(\vec{u}, \vec{v}) = \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\| \times \sin\left(\widehat{\vec{u}, \vec{v}}\right)$$

2. Étant donnés trois points non alignés A, B et C, montrer que le triangle ABC a pour aire $\frac{1}{2}\left|\det_{\mathscr{B}}(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})\right|$
3. On prend comme points $A(3,0)$; $B(1,1)$ et $C(2,-5)$. Calculer l'aire du triangle ABC.

38 Calculer sous forme factorisée les déterminants suivants :

$$\begin{vmatrix} \cos a & \cos b \\ \sin a & \sin b \end{vmatrix} \quad ; \quad \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ b+c & a+c & a+b \end{vmatrix} \quad ; \quad \begin{vmatrix} a & a & a & a \\ a & b & b & b \\ a & b & c & c \\ a & b & c & d \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} 1 & b+c & b^2+c^2 \\ 1 & a+c & a^2+c^2 \\ 1 & a+b & a^2+b^2 \end{vmatrix} \quad ; \quad \begin{vmatrix} a & b & c & d \\ a & a & b & c \\ a & a & a & b \\ a & a & a & a \end{vmatrix}$$

39 Calculer le déterminant de chacune des cinq matrices suivantes, en déduire celles qui sont inversibles et le cas échéant déterminer leur inverse par la méthode de la comatrice.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 1 & -6 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} \sin\theta & -\cos\theta \\ \cos\theta & \sin\theta \end{pmatrix} \qquad C = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$D = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad E = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

40 Soit j une solution complexe de l'équation $1+z+z^2=0$.

Calculer $\begin{vmatrix} 1 & j^2 & j \\ j & 1 & j^2 \\ j^2 & j & 1 \end{vmatrix}$

41 Soit a, b et c trois complexes. On pose $\Delta = \begin{vmatrix} 1+a & 1 & 1 \\ 1 & 1+b & 1 \\ 1 & 1 & 1+c \end{vmatrix}$

1. Calculer le déterminant Δ en fonction de a, b et c.
2. On suppose dorénavant que a, b et c sont les racines du polynôme $P(X) = X^3 - X + 1$.
   (a) Donner la forme factorisée du polynôme $P(X)$ en fonction de a, b et c.
   (b) En déduire la valeur de Δ.

42 En ajoutant toutes les colonnes à la première, calculer sous **forme factorisée** le déterminant suivant :

$$\Delta(x) = \begin{vmatrix} x & 1 & 2 & 3 \\ 1 & x & 2 & 3 \\ 1 & 2 & x & 3 \\ 1 & 2 & 3 & x \end{vmatrix}$$

43 Soit $m \in \mathbb{R}$. On pose

$$A = \begin{pmatrix} 0 & m & m & m^2-m \\ 1 & m-1 & 3m-1 & m^2-m \\ 0 & m & m & 0 \\ 1 & m & 3m-1 & 0 \end{pmatrix}$$

Calculer $\det(A)$.
À quelle condition, cette matrice A est-elle inversible ?

44

1. Calculer $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 3 & 3 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{vmatrix}$
2. Soit $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 4$. Calculer :

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & \cdots & 1 \\ 1 & 2 & 2 & \cdots & \cdots & 2 \\ 1 & 2 & 3 & \cdots & \cdots & 3 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & & n-1 & n-1 \\ 1 & 2 & 3 & \cdots & n-1 & n \end{vmatrix}$$

45 Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et A une matrice de $\mathfrak{M}_{2n+1}(\mathbb{K})$ telle que ${}^tA = -A$. A est-elle inversible ? Justifier.

46 Pour tout réel m, on considère la famille de vecteurs de $\mathbb{R}^3$: $\mathscr{F} = (\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_2}, \overrightarrow{u_3})$ définie par

$$\begin{cases} \overrightarrow{u_1} = (1+m, 2, 0) \\ \overrightarrow{u_2} = (5-m, 0, 2) \\ \overrightarrow{u_3} = (2, 2, 1-m) \end{cases}$$

Pour quelles valeurs de m la famille $\mathscr{F}$ est-elle une base de $\mathbb{R}^3$?

47 On se place dans l'espace muni d'un repère $\left(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\right)$.
Vérifier que les trois points A, B, C de coordonnées respectives $(2,0,1)$; $(3,1,1)$; $(1,-2,0)$ ne sont pas alignés.
Trouver une équation cartésienne du plan $\mathscr{P}$ passant par les trois points A, B et C.

48 L'espace est muni d'un repère $\left(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\right)$.
Pour quelle(s) valeur(s) du paramètre réel m les points

- $A(1;2;-1)$, $B(1;1;0)$, $C(2;-1;1)$ et $D(m;1;m+1)$ sont-ils coplanaires ?
- $A(1;2;-1)$, $B(m+1;2;-2)$, $C(m-2;m+2;m+4)$ et $D(2;2;0)$ sont-ils coplanaires ? Dans ce cas, déterminer une équation cartésienne du plan (ABC).

49 Soit $m \in \mathbb{R}^*$ et f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique est

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1/m & 1/(m^2) \\ m & 0 & 1/m \\ m^2 & m & 0 \end{pmatrix}$$

1. Montrer que A est inversible. En déduire $\mathrm{Ker}(f)$ et $\mathrm{Im}(f)$.
2. On pose $\begin{cases} \overrightarrow{u} & = & (1,0,-m^2) \\ \overrightarrow{v} & = & (0,1,-m) \\ \overrightarrow{w} & = & (1,m,m^2) \end{cases}$
   (a) Montrer que $\mathscr{C} = (\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w})$ est une base de $\mathbb{R}^3$.
   (b) Déterminer la matrice de f dans la base $\mathscr{C}$.
   (c) Que vaut $\det(f)$?

50 Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On considère l'endomorphisme φ de $\mathbb{R}_n[X]$ défini par :
$\forall P \in \mathbb{R}_n[X]$, $\varphi(P) = XP' + P$
Déterminer la matrice A de φ dans la base canonique
$\mathscr{B} = (X^n, X^{n-1}, \ldots, X, 1)$ de $\mathbb{R}_n[X]$. En déduire le déterminant de φ.

2 Pour approfondir

51 Calculer le déterminant d'ordre n suivant (où $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 2$).

$$\begin{vmatrix} 1 & n & n & \cdots & n \\ n & 2 & n & \cdots & n \\ n & n & 3 & \cdots & n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ n & n & n & \cdots & n \end{vmatrix}$$

52 Soit n un entier tel que $n \geqslant 2$.
Soient a et b deux réels tels que $a \neq b$. On pose pour tout réel x,

$$D_n(x) = \begin{vmatrix} x & a+x & a+x & \cdots & a+x \\ b+x & x & a+x & \ddots & \vdots \\ b+x & \ddots & \ddots & \ddots & a+x \\ \vdots & \ddots & \ddots & x & a+x \\ b+x & \cdots & b+x & b+x & x \end{vmatrix}$$

1. Démontrer que la fonction $x \longmapsto D_n(x)$ est affine.
2. Calculer $D_n(x)$ pour tout réel x. En déduire $D_n(0)$.

53 Soit n un entier tel que $n \geqslant 2$. Pour tout réel x, on considère le déterminant d'ordre n suivant :

$$\Delta_n = \begin{vmatrix} 1+x^2 & x & 0 & \cdots & 0 \\ x & 1+x^2 & x & \ddots & \vdots \\ 0 & x & \ddots & & 0 \\ \vdots & \ddots & x & 1+x^2 & x \\ 0 & \cdots & 0 & x & 1+x^2 \end{vmatrix}$$

1. Calculer Δ_2 et Δ_3.
2. En développant ce déterminant par rapport à sa première colonne, exprimer Δ_n en fonction de Δ_{n-1} et Δ_{n-2}
3. Montrer que la suite de terme général $u_n = \Delta_n - \Delta_{n-1}$ est géométrique et préciser sa raison.
4. En déduire l'expression explicite de u_n en fonction de x et de n.
5. Calculer la somme $\sum\limits_{k=3}^{n} u_k$, en déduire l'expression de Δ_n.

54 Soit n un entier supérieur à 2.
Calculer le déterminant de la matrice $A = (a_{i,j}) \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$ de terme général :

$$a_{i,j} = \max\{i, j\}$$

55 Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On pose $V = \{x \longmapsto e^x P(x) \mid P \in \mathbb{R}_n[X]\}$.

1. Montrer que V est un sous-espace vectoriel de $\mathscr{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$ dont on déterminera la dimension.
2. Montrer que l'application $d : f \longmapsto f'$ est un endomorphisme de V dont on calculera le déterminant. d est-elle bijective ?

56 1. Soit p un entier supérieur à 2. Calculer le déterminant d'ordre p suivant :

$$\delta_p = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ -1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ -1 & -1 & 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ -1 & -1 & \cdots & -1 & 1 \end{vmatrix}$$

2. Soit n un entier supérieur à 3.
   On considère la matrice $A = \left(|i-j| \right)_{1\leqslant i\leqslant n,\, 1\leqslant j\leqslant n}$
   (a) Écrire A sous la forme d'un tableau de nombres.
   (b) En effectuant des opérations élémentaires d'abord sur les colonnes, calculer $\det(A)$ en utilisant le résultat de 1.

3 TP sous Maxima

57 *Matrices de Vandermonde. On utilisera :*
`length, addcol, transpose, for..from..thru..do, factor, determinant`

Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $n \geqslant 2$ et $(a_1, a_2, \dots, a_n) \in \mathbb{K}^n$.
On appelle matrice de Vandermonde de la lise $(a_1, a_2, \dots, a_n)$ la matrice carrée suivante :

$$V_{(a_1,a_2,\dots,a_n)} = \begin{pmatrix} 1 & a_1 & a_1^2 & \cdots & a_1^{n-2} & a_1^{n-1} \\ 1 & a_2 & a_2^2 & \cdots & a_2^{n-2} & a_2^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 1 & a_n & a_n^2 & \cdots & a_n^{n-2} & a_n^{n-1} \end{pmatrix} \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$$

1. Écrire une fonction `vand(L)` qui renvoie la matrice de Vandermonde $V_{(a_1,a_2,\dots,a_n)}$ avec comme argument une litse `L=[a1,a2,...,an]`.
2. Calculer sous forme factorisée les déterminants des matrices de Vandermonde $V_{(a,b,c)}$ et $V_{(a,b,c,d)}$. Donner une condition nécessaire et suffisante pour que la matrice $V_{(a,b,c,d)}$ soit inversible.
3. Conjecturer la forme factorisée du déterminant de Vandermonde : $\det\left(V_{(a_1,a_2,\dots,a_n)}\right)$.
   Prouver cette conjecture.

4 Pour travailler seul

58 Les quatre questions suivantes sont indépendantes.

1. Soit x un nombre réel. On considère la matrice $M(x) = \begin{pmatrix} 0 & x & 0 \\ 3 & x & 2 \\ 1 & 6 & x \end{pmatrix}$
   Déterminer les nombres réels x pour lesquels la matrice $M(x)$ est inversible.
2. Pour $z \in \mathbb{C}$, on pose $M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ z & 1 & z-1 \\ 1 & z & 1 \end{pmatrix} \in \mathfrak{M}_3(\mathbb{C})$.
   Pour quelles valeurs de z la matrice M est-elle inversible ?
3. Soit $N \in \mathfrak{M}_3(\mathbb{R})$ une matrice carrée d'ordre 3 à coefficients réels telle que $N^3 = -I_3$. Que vaut $\det(N)$?
4. On pose $A = \begin{pmatrix} a & c & c \\ c & a & b \\ c & b & a \end{pmatrix} \in \mathfrak{M}_3(\mathbb{R})$.
   Calculer sous forme factorisée le déterminant de la matrice A.

Séries

1 Pour s'entraîner

59 *Télescopage* .

En calculant les sommes partielles, déterminer si les séries de termes généraux suivants (pour $n \geqslant 2$) sont convergentes.
Le cas échéant calculer leur somme :

$$u_n = \frac{\ln\left(\frac{n+1}{n}\right)}{\ln(n)\ln(n+1)}\ ;\quad v_n = \ln\left(1-\frac{1}{n}\right)\quad w_n = \frac{1}{n(n-1)}\ ;\quad x_n = \frac{1}{n^2-1}$$

60 Justifier la convergence des séries suivantes et calculer leur somme.

$$\sum \frac{5}{3^n}\ ;\quad \sum \frac{2^n}{n!}\ ;\quad \sum \frac{n}{6^n}\ ;\quad \sum \ln\left(1-\frac{1}{n^2}\right)\ ;\quad \sum \frac{n^2+n+1}{n!}$$

61 Étudier la convergence et déterminer la somme de chacune des séries suivantes :

(a) $\sum (n+1)\mathrm{e}^{-n}$

(b) $\sum\limits_{n\geqslant 2}\left(\frac{1}{\sqrt{n-1}}+\frac{1}{\sqrt{n+1}}-\frac{2}{\sqrt{n}}\right)$

(c) $\sum\limits_{n\geqslant 1}\ln\left(\frac{(n+1)^2}{n(n+2)}\right)$

(d) $\sum \frac{n^2 2^n}{n!}$ en remarquant que $n^2 = n(n-1)+n$

62 Soit $u_0 \in]0;1[$. On pose $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = u_n - u_n^2$.

1. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $0 < u_n < 1$, puis que la suite (u_n) converge vers 0.
2. Montrer que la série de terme général u_n^2 converge et calculer sa somme.

63 Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par $u_0 \in \mathbb{R}^{+*}$ et

$$\forall n \in \mathbb{N},\quad u_{n+1} = u_n\,\mathrm{e}^{-u_n}$$

1. Montrer que pour tout entier naturel n, $u_n > 0$.
2. Étudier la monotonie et la convergence de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
3. On pose pour tout entier n, $v_n = \ln(u_n)$.
   Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\sum\limits_{k=0}^{n} u_k = v_0 - v_{n+1}$
4. En déduire que la série $\sum u_n$ diverge.

64 Déterminer la nature des séries de terme général :

1. $u_n = \exp\left(\frac{1}{n^2}\right)$
2. $u_n = \frac{1}{\sqrt{n(n+1)}}$
3. $u_n = \frac{\arctan n}{n^2}$
4. $u_n = \frac{\ln n}{n}$
5. $u_n = 2^{2n-1}\mathrm{e}^{-n}$
6. $u_n = \frac{\sqrt{2^n}}{2^n}$
7. $u_n = \frac{1}{\sqrt{1+2+3+\cdots+n}}$
8. $u_n = \ln\left(1-\frac{1}{\sqrt{n^3+1}}\right)$
9. $u_n = \left(1-\frac{1}{\sqrt{n}}\right)^{n\sqrt{n}}$
10. $u_n = \frac{n^2\ln n}{\mathrm{e}^n}$

65

1. Étudier rapidement la fonction $f : x \longmapsto \frac{1}{x\ln x}$
2. En déduire la nature de la série $\sum\limits_{n\geqslant 2}\frac{1}{n\ln n}$
3. (a) Comparer $n!$ et n^n
   (b) Déterminer la nature de la série de terme général $\frac{1}{\ln(n!)}$

66 1. Soit x un réel supérieur à 2. Calculer l'intégrale $\displaystyle\int_2^x \frac{1}{t\ln^2(t)}\,\mathrm{d}t$

2. Étudier la nature de la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 2}\frac{1}{n\ln^2(n)}$
3. Soient n et p deux entiers tels que $2\leqslant n<p$.
   Encadrer la somme $\displaystyle\sum_{k=n+1}^{p}\frac{1}{k\ln^2(k)}$ par deux intégrales.
4. En déduire un équivalent simple du reste d'ordre n :
   $R_n=\displaystyle\sum_{k=n+1}^{+\infty}\frac{1}{k\ln^2(k)}$ lorsque n tend vers $+\infty$.

67 Discuter suivant α la nature de la série de terme général

$$\left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\right)^{\alpha}$$

68 Soit $\sum u_n$ une série convergente à termes positifs.

1. Montrer que les séries $\sum u_n^2$ et $\sum \dfrac{u_n}{1+u_n}$ convergent.
2. (a) Montrer que $\forall (x,y)\in\mathbb{R}^2,\quad xy\leqslant\dfrac{x^2+y^2}{2}$

   (b) En déduire la nature de la série de terme général $\sum\dfrac{\sqrt{u_n}}{n}$

69 1. Soit a et b deux réels positifs. Comparer $2\sqrt{ab}$ avec $a+b$

2. Soit $\sum u_n$ une série à termes positifs, convergente.
   (a) Montrer que la série de terme général $v_n=\sqrt{u_n u_{n+1}}$ est convergente.
   (b) ⋆ La réciproque est-elle vraie ?

70 On pose pour tout entier $n\geqslant 2,\quad u_n=\dfrac{n^{\ln(n)}}{(\ln n)^n}$

1. Déterminer $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} n^2u_n$.
2. En déduire la nature de la série $\sum u_n$.

71 1. Rappeler le développement limité à l'ordre 2 au voisinage de zéro de la fonction $x\longmapsto\cos x$.

2. Déterminer la nature de la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1}u_n$ définie par

$$u_n=1-\cos\frac{\pi}{n}$$

72 On définit la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par son premier terme $u_0\in\mathbb{R}$ et la relation de récurrence :

$$\forall n\in\mathbb{N},\quad u_{n+1}=\frac{\mathrm{e}^{-u_n}}{n+1}$$

1. Prouver que $\forall n\in\mathbb{N}^*,\, u_n>0$
2. En déduire la limite de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
3. Déterminer la limite de $n\,u_n$ lorsque n tend vers $+\infty$.
4. En déduire la nature de la série $\sum u_n$.

73 1. Montrer que $\displaystyle\lim_{n\longrightarrow+\infty}\left(\frac{n}{n+1}\right)^n=\mathrm{e}^{-1}$

2. En déduire la nature de la série $\sum\dfrac{n!}{n^n}$

74 ⋆ Étudier la nature des séries de termes généraux :

$$u_n=\left(\frac{1}{n}\right)^{1+\frac{1}{n}}\quad;\quad v_n=\frac{n^{\ln n}}{n!}\quad;\quad w_n=\frac{(\ln n)^n}{n!}$$

75 On pose $\forall n\in\mathbb{N}^*,\quad u_n=\mathrm{e}-\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n$

1. Rappeler le développement limité à l'ordre 2 au voisinage de zéro de la fonction $t\longmapsto\ln(1+t)$

2. Proposer un équivalent simple de u_n lorsque $n \to +\infty$.
3. En déduire la nature de la série de terme général u_n .

76 On pose $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ u_n = \dfrac{\ln(n!)}{n^3}$

1. ⋆ Démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,
$$\sum_{k=1}^{n} \ln k \leqslant n \ln n$$
2. En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\quad 0 \leqslant u_n \leqslant \dfrac{\ln n}{n^2}$
3. Déterminer la nature de la série $\sum u_n$

77 Déterminer la nature de chacune des séries :

(a) $\displaystyle\sum_{n\geqslant 2} \frac{(-1)^n}{\ln(n)}$ (b) $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \frac{(n+1)\cos n}{n^2\sqrt{n}}$ (c) $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \cos(n\pi)\sin\frac{\pi}{n}$

78 On se propose d'étudier la nature de la série de terme général $\sin\left(\pi\sqrt{n^2+1}\right)$.

1. Vérifier que $\forall n \in \mathbb{N}$, $\quad \sqrt{n^2+1} - n = \dfrac{1}{\sqrt{n^2+1}+n}$
2. Déterminer la suite positive $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifiant
$$\forall n \in \mathbb{N},\ \sin\left(\pi\sqrt{n^2+1}\right) = (-1)^n \sin(u_n) \quad \text{et} \quad \lim_{n\to+\infty} u_n = 0$$
3. En déduire la nature de la série $\sum \sin\left(\pi\sqrt{n^2+1}\right)$.

79
1. Établir la convergence de la série $\displaystyle\sum \frac{(-1)^n}{2n+1}$.
Est-elle absolument convergente ?
2. Soit $n \in \mathbb{N}$. Vérifier que pour tout réel t,
$$\sum_{k=0}^{n} (-1)^k t^{2k} = \frac{1}{1+t^2} + (-1)^n \frac{t^{2n+2}}{1+t^2}$$
3. Calculer $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{1+t^2}\,\mathrm{d}t$
4. Déduire des deux questions précédentes la somme :
$$\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{2k+1}$$
5. Par une méthode analogue, calculer la somme $\displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k+1}$

2 Pour approfondir

80 Dans cet exercice, $\alpha > 0$.

1. (a) ⋆ Soit la fonction $f : t \longmapsto t^\alpha$.
Encadrer par deux intégrales la somme : $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} f(k)$

(b) En déduire que $1 + 2^\alpha + 3^\alpha + \cdots + n^\alpha \underset{(n\to+\infty)}{\sim} \dfrac{n^{\alpha+1}}{\alpha+1}$

2. On pose pour $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = \dfrac{1}{1 + 2^\alpha + 3^\alpha + \cdots + n^\alpha}$
Étudier suivant α la nature de la série de terme général u_n.

81 *Vers la formule de Stirling* .

On définit les suites (u_n) et (w_n) par :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad u_n = n!\,\frac{\mathrm{e}^n}{n^n}\,n^{-1/2} \quad \text{et} \quad w_n = \ln(u_{n+1}) - \ln(u_n)$$

1. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $w_n = 1 - \left(n + \frac{1}{2}\right)\ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)$
2. (a) Calculer le développement limité à l'ordre 3 en zéro de la fonction $f : x \longmapsto \ln(1+x)$.

   (b) Donner un équivalent simple de w_n lorsque $n \to +\infty$.
3. En déduire la nature de la série $\sum w_n$
4. Démontrer qu'il existe une constante réelle $\lambda > 0$ telle que
$$n! \underset{(n\to+\infty)}{\sim} \lambda\sqrt{n}\left(\frac{n}{e}\right)^n$$
5. Application : étudier la nature de la série de terme général
$$a_n = \frac{n^n}{n!}\mathrm{e}^{-n}$$

82 On définit la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par son premier terme $u_0 > 0$ et la relation de récurrence :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = \frac{1}{2}\arctan(u_n)$$

1. (a) Démontrer que $\forall x > 0, \quad 0 < \arctan x < x$.

   (b) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}$, $0 < u_n \leqslant \frac{u_0}{2^n}$

   (c) En déduire la limite de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
2. On pose $\forall n \in \mathbb{N}$, $w_n = 2^n u_n$

   (a) Calculer le développement limité à l'ordre 3 en zéro de la fonction arctan.

   (b) ⋆ Proposer un équivalent simple lorsque $n \to +\infty$ de $\frac{1}{w_{n+1}^2} - \frac{1}{w_n^2}$

   (c) En déduire la convergence de la série $\sum\left(\frac{1}{w_{n+1}^2} - \frac{1}{w_n^2}\right)$
3. Démontrer l'existence d'un réel $\ell > 0$ tel que $u_n \underset{(n\to+\infty)}{\sim} \frac{\ell}{2^n}$

   On ne cherchera pas à calculer ℓ.

3 TP sous Maxima

83 *On utilisera :* `sum, simplify_sum, factor`

On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définie par $u_n = \frac{1}{\sum_{k=1}^n k^2}$

1. Montrer que la série $\sum u_n$ est convergente.
2. Calculer la somme $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n$

84 *On utilisera :* `sqrt, taylor, solve, sum`

Soit a, b et c trois nombres réels. On pose pour tout naturel n,

$$u_n = \sqrt{n} + a\sqrt{n+1} + b\sqrt{n+2}$$

1. Donner le développement asymptotique à trois termes de u_n au voisinage de $+\infty$.
2. ⋆ En déduire les valeurs des paramètres a et b pour lesquelles la série $\sum u_n$ est convergente.
3. Calculer alors la somme $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n$.

4 Pour travailler seul

85 Les six questions sont indépendantes

1. Combien vaut la somme suivante : $\displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{1}{k!\,2^k}$?
2. Soit $\sum u_n$ une série à termes réels positifs. Quelle condition est suffisante pour garantir la convergence de cette série ?

   (a) $u_n \leqslant \dfrac{1}{n}$ (b) $u_n^2 \leqslant \dfrac{1}{n}$ (c) $\sqrt{u_n} \leqslant \dfrac{1}{n}$ (d) $e^{u_n} \leqslant \dfrac{1}{n}$
3. Pour laquelle des séries suivantes sait-on facilement calculer la somme ?

   (a) $\sum \dfrac{1}{n^3}$ (b) $\sum \dfrac{1}{n(n+1)}$ (c) $\sum \dfrac{1}{n^2+1}$ (d) $\sum \dfrac{(-1)^n}{3n+1}$
4. Pour laquelle des séries suivantes, la règle de D'Alembert permet-elle de justifier la convergence ?

   (a) $\sum \dfrac{1}{n\ln(n)^2}$ (b) $\sum \dfrac{n}{2^n}$ (c) $\sum \dfrac{\sin n}{n!}$ (d) $\sum \dfrac{1}{n^2}$
5. Soit $a \in \mathbb{R}^{+*}$. On pose $\forall x \in \mathbb{R},\ \sinh(x) = \dfrac{e^x - e^{-x}}{2}$.
   Donner une condition nécessaire et suffisante sur a pour que la série de terme général $\dfrac{\sinh(n)}{a^n}$ soit convergente.
6. Parmi les 4 séries suivantes, une seule est divergente. Indiquer laquelle.

   (a) $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1}\frac{\ln n}{n^2}$ (b) $\displaystyle\sum_{n\geqslant 2}\frac{1}{n\ln n}$ (c) $\sum \dfrac{(-2)^n}{n!}$ (d) $\sum \dfrac{n+1}{2^n}$

86 On note E l'ensemble des suites réelles $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ telles que la série de terme général $n^2 u_n^2$ converge.

1. Montrer que la suite $(w_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définie par $w_n = \dfrac{1}{n^2}$ appartient à E.
2. Montrer que, si u et v sont deux suites de E, alors la série de terme général $n^2 u_n v_n$ est absolument convergente.
3. En déduire que E est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel.

87 *Final 2013* . La série alternée $\sum \dfrac{(-1)^k}{2k+1}$ est semi-convergente.

On appelle «reste d'ordre n» de la série $\sum \dfrac{(-1)^k}{2k+1}$, le nombre réel

$$R_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty}\frac{(-1)^k}{2k+1}$$

L'objectif de cet exercice est d'obtenir un équivalent de R_n, reste d'une série alternée convergente.

1. Démontrer que, pour tout entier naturel n,
$$2R_n - \frac{(-1)^{n+1}}{2n+3} = \sum_{k=n+1}^{+\infty}(-1)^k\left(\frac{1}{2k+1}-\frac{1}{2k+3}\right)$$
2. Justifier que, pour tout entier naturel n,
$$\left|\sum_{k=n+1}^{+\infty}(-1)^k\left(\frac{1}{2k+1}-\frac{1}{2k+3}\right)\right| \leqslant \frac{2}{(2n+3)(2n+5)}$$
3. Déterminer un équivalent simple de R_n lorsque n tend vers $+\infty$.

Diagonalisation

1 Pour s'entraîner

88 On pose $A = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \in \mathfrak{M}_2(\mathbb{R})$.

Déterminer les valeurs propres de A et les sous-espaces propres correspondants.

89 Soit E l'ensemble des suites réelles convergeant vers 0.

1. Montrer que E est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel.
2. On considère l'application $\Delta : \begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & E \\ u & \longmapsto & \Delta(u) = (u_{n+1} - u_n)_{n \in \mathbb{N}} \end{array}$
   (a) Vérifier que Δ est un endomorphisme de E.
   (b) Déterminer les valeurs propres de Δ.

90 Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $n \geqslant 2$. On pose $J = \begin{pmatrix} 1 & \dots & 1 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & \dots & 1 \end{pmatrix} \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$

1. Donner le rang et le déterminant de J.
2. Exprimer J^2 en fonction de J.
3. En déduire les valeurs propres de J et la dimension de chaque sous-espace propre associé.

91 Soit M une matrice carrée réelle d'ordre 2 admettant pour valeurs propres 1 et 4. Donner $\det(M)$. M est-elle inversible ? est-elle diagonalisable ? Quel est le rang de $M - I_2$?

92 Soient p et n deux entiers strictement positifs.

1. Déterminer le reste de la division euclidienne de X^p par $X^2 - 3X + 2$.
2. Soit $A \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{C})$ telle que $A^2 = 3A - 2I_n$.
   (a) Quelles sont les éventuelles valeurs propres de A ?
   (b) Calculer en fonction de A et p, les puissances A^p de A.

93 Montrer qu'une matrice et sa transposée ont les mêmes valeurs propres.

94 Soit la matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \in \mathfrak{M}_4(\mathbb{R})$

1. Calculer A^2. En déduire que A est inversible, donner A^{-1} et A^{2021}.
2. Quelles sont les valeurs propres de A ?
   Justifier que A est diagonalisable.
3. Diagonaliser A en donnant la matrice de passage P et son inverse P^{-1}.

95 On pose $M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$.

1. Donner les valeurs propres de M.
2. Déterminer une matrice inversible P et une matrice diagonale D de $\mathfrak{M}_3(\mathbb{R})$ telle que
$$D = P^{-1} M P$$
3. Calculer P^{-1} et expliciter M^n pour tout entier naturel n.

96 On considère les matrices suivantes :

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 2 & 4 & 2 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix} \quad ; \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad ; \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & -1 \\ -1 & 1 & 4 \end{pmatrix}$$

Ces matrices sont-elles diagonalisables ?
Le cas échéant, les diagonaliser.

97 Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. On pose

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \alpha \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha \end{pmatrix} \in \mathfrak{M}_3(\mathbb{R})$$

1. Pour quels réels α la matrice A est-elle inversible ?
2. Donner les valeurs propres de A.
3. Pour quels réels α la matrice A est-elle diagonalisable ?

98 Soit $E = \mathbb{R}[X]$. On définit l'application φ sur E par

$$\varphi(P) = (2X+1)P + (1-X^2)P'$$

1. Vérifier que $\varphi \in \mathscr{L}(E)$.
   ⋆ Que peut-on dire du degré des éventuels vecteurs propres de φ ?
2. On appelle f la restriction de φ à $\mathbb{R}_2[X]$.
   (a) Écrire la matrice A de f dans la base $(1, X, X^2)$.
   (b) A est-elle diagonalisable ?
3. En déduire **les** vecteurs propres de φ.

99 Soit $k \in \mathbb{R}$. On considère la matrice

$$A(k) = \begin{pmatrix} 3-k & k-5 & k \\ -k & k-2 & k \\ 5 & -5 & -2 \end{pmatrix} \in \mathfrak{M}_3(\mathbb{R})$$

1. Calculer le polynôme caractéristique de $A(k)$.
   En déduire les valeurs propres de $A(k)$.
2. À quelle condition nécessaire et suffisante sur k, la matrice $A(k)$ est-elle diagonalisable ?

100 On pose $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$. On considère l'endomorphisme Φ de $\mathfrak{M}_2(\mathbb{R})$ défini par $\Phi(M) = MP$.

1. Donner la matrice de Φ relativement à la base canonique de $\mathfrak{M}_2(\mathbb{R})$.
2. En déduire le rang de Φ, son image et son noyau.
3. Diagonaliser sans calcul, Φ.

101 On se donne la matrice $A = \begin{pmatrix} -9 & -12 \\ 8 & 11 \end{pmatrix} \in \mathfrak{M}_2(\mathbb{R})$.

1. (a) Donner le polynôme caractéristique $\chi_A(X)$ de A.
   Justifier que A est diagonalisable.
   (b) Donner une matrice diagonale D et une matrice inversible P telles que $A = PDP^{-1}$. Calculer P^{-1}.
   (c) Soit $n \in \mathbb{N}$. Expliciter A^n en fonction de n.
2. On définit les suites (u_n) et (w_n) par leurs premiers termes $u_0 = 0$, $w_0 = 1$ et les relations de récurrence :

$$\begin{cases} u_{n+1} = -9u_n - 12w_n \\ w_{n+1} = 8u_n + 11w_n \end{cases} \quad \text{On pose } \forall n \in \mathbb{N},\ X_n = \begin{pmatrix} u_n \\ w_n \end{pmatrix}$$

   (a) Reconnaître pour tout entier naturel n, le produit AX_n
   (b) En déduire l'expression de X_n en fonction des matrices A, X_0 et de n.
   (c) Déterminer u_n et w_n en fonction de n.

102
1. On pose $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -6 & 5 \end{pmatrix} \in \mathfrak{M}_2(\mathbb{R})$.
   Diagonaliser la matrice A et en déduire A^n pour $n \in \mathbb{N}$.
2. On considère la suite réelle $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_0 = 0$, $u_1 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+2} = 5u_{n+1} - 6u_n$.
   On pose pour tout $n \in \mathbb{N}$, $X_n = \begin{pmatrix} u_n \\ u_{n+1} \end{pmatrix}$.
   Exprimer X_n en fonction de X_0, A et n.
   En déduire la formule explicite de u_n en fonction de n.

103 Soit $A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 2 & 2 & -3 \\ -2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ et φ l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ canoniquement associé A.

1. Vérifier que A n'est pas diagonalisable.
2. Chercher deux vecteurs propres de φ linéairement indépendants. Compléter ces vecteurs en une base de $\mathbb{R}^3$.
3. Écrire la matrice de φ dans cette base.
4. Calculer A^n pour $n \in \mathbb{N}^*$.

104 Soient (u_n), (v_n) et (w_n) les trois suites définies sur $\mathbb{N}$ par leurs premiers termes : $u_0 = 1$, $v_0 = 0$, $w_0 = 0$ et les relations de récurrence

$$\begin{cases} u_{n+1} = 3u_n - v_n + w_n \\ v_{n+1} = u_n + 2v_n \\ w_{n+1} = v_n + w_n \end{cases}$$

Pour tout entier naturel n, on pose

$$X_n = \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \\ w_n \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

1. (a) Reconnaître, pour tout entier naturel n le produit AX_n.
   (b) En déduire l'expression de X_n en fonction des matrices A, X_0 et de l'entier naturel n.
2. (a) Démontrer que A admet une seule valeur propre.
   (b) Déterminer le sous-espace vectoriel propre de A associé à l'unique valeur propre.
   La matrice A est-elle diagonalisable ?
3. On note f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ canoniquement associé à A, c'est-à-dire tel que A soit la matrice de f dans la base canonique $\mathscr{B}$ de $\mathbb{R}^3$.
   (a) Déterminer une base (e'_1, e'_2, e'_3) de $\mathbb{R}^3$ telle que la matrice T de f dans cette base vérifie
   $$T = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix},$$
   et que les vecteurs e'_1, e'_2, e'_3 aient respectivement pour troisième composante 1, -1 et 2.
   On notera dorénavant $\mathscr{B}'$ la base (e'_1, e'_2, e'_3).
   (b) À l'aide de la formule du binôme de Newton et de la décomposition suivante T :
   $$T = 2I_3 + \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$
   déterminer l'expression de la matrice T^n en fonction de l'entier naturel n.
4. Soit P la matrice de passage de la base canonique $\mathscr{B}$ à la base $\mathscr{B}'$.
   (a) Exprimer A en fonction de T, P et P^{-1}, puis A^n en fonction des mêmes matrices et de l'entier naturel n.
   (b) Calculer P^{-1}.
   (c) Calculer la première colonne de la matrice A^n. En déduire les expressions de u_n, v_n, w_n en fonction du naturel n.

105 Résoudre chacun des systèmes différentiels

$$\begin{cases} x' = y + z \\ y' = x \\ z' = x + y + z \end{cases} \quad ; \quad \begin{cases} x' = x + 2y + 2z \\ y' = x + 2y - z \\ z' = -x + y + 4z \end{cases} \text{avec les conditions} \begin{cases} x(0) = 1 \\ y(0) = 2 \\ z(0) = 3 \end{cases}$$

106 On considère le système différentiel linéaire

$$(S) : \quad \begin{cases} \boldsymbol{x}' &= 3\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y} \\ \boldsymbol{y}' &= \boldsymbol{x} + \boldsymbol{y} \end{cases}$$

où $\boldsymbol{x}$ et $\boldsymbol{y}$ désignent des fonctions inconnues de la variable réelle t, à valeurs dans $\mathbb{R}$.

1. On pose $X(t) = \begin{pmatrix} \boldsymbol{x}(t) \\ \boldsymbol{y}(t) \end{pmatrix}$.
   Expliciter la matrice $A \in \mathfrak{M}_2(\mathbb{R})$ telle que
   $$(S) \iff X' = AX$$
2. Calculer le polynôme caractéristique de la matrice A.
   A est-elle diagonalisable ?
   Déterminer une matrice triangulaire supérieure T semblable à A.
3. Résoudre le système (S).

2 Pour approfondir

107 Donner une condition nécessaire et suffisante portant sur les réels a et b pour que la matrice $M = \begin{pmatrix} 2 & a & 0 \\ 0 & 1 & b \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ soit diagonalisable dans $\mathfrak{M}_3(\mathbb{R})$.

108 Donner une CNS portant sur les réels a, b et c pour que la matrice $M = \begin{pmatrix} 1 & a & b \\ 0 & 2 & c \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ soit diagonalisable dans $\mathfrak{M}_3(\mathbb{R})$.

109 Soit $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 6 & 2 & 0 \\ -6 & 0 & 6 \end{pmatrix}$

1. (a) Justifier rapidement que A est diagonalisable.
   (b) Diagonaliser la matrice A en précisant la matrice de passage P et la matrice diagonale D semblable à A.
2. Soit $M \in \mathfrak{M}_3(\mathbb{R})$ telle que $M^2 + M = A$.
   (a) On pose $N = P^{-1}MP$. Montrer que $DN = ND$.
   (b) En posant $N = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & k \end{pmatrix}$, justifier que N est diagonale.
3. À l'aide du logiciel MAXIMA, donner toutes les matrices $M \in \mathfrak{M}_3(\mathbb{R})$ telles que : $M^2 + M = A$

110 On pose $A = \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \in \mathfrak{M}_2(\mathbb{R})$

1. Déterminer les valeurs propres de A.
2. Combien y a-t-il de matrices $M \in \mathfrak{M}_2(\mathbb{R})$ vérifiant $M^2 = A$?

111 Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $n > 2$. On note $\mathbb{R}_n[X]$ l'espace vectoriel des polynômes à coefficients réels de degré inférieur ou égal à n.

Pour tout $P \in \mathbb{R}_n[X]$, on pose :
$$f(P) = \frac{1}{2}(X^2 - 1)P'' - XP' + P$$

1. Pour tout entier $k \in [\![0, n]\!]$, calculer $f(X^k)$.
2. Montrer que f est un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$.
3. Dans cette question seulement, on suppose $n = 3$.
   (a) Donner la matrice de f dans la base canonique de $\mathbb{R}_3[X]$.
   (b) Montrer que f est un projecteur.
   Préciser son noyau et son image.
4. On suppose $n \geqslant 3$. Montrer que $\operatorname{Ker} f = \operatorname{Vect}(X, 1 + X^2)$.
5. Quelles sont les valeurs propres de f ?
   ⋆ L'endomorphisme f est-il diagonalisable ? Justifier.

112 1. ⋆ Soit E un espace vectoriel de dimension finie $n \geqslant 2$.
Soit f un endomorphisme de E dont le rang est égal à 1.
Donner la forme du polynôme caractéristique de f.

Démontrer que f est diagonalisable si, et seulement si, $\text{Im}(f)$ n'est pas inclus dans $\text{Ker}(f)$.

2. On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & n \\ 1 & 2 & \cdots & n \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ 1 & 2 & \cdots & n \end{pmatrix} \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$.

A est-elle diagonalisable ? Quelles sont ses valeurs propres ? Donner des vecteurs propres associés.

3 TP sous Maxima

113 Soient a, b et c trois nombres réels. On pose $A = \begin{pmatrix} 2a & b & c \\ b & 0 & 0 \\ c & 0 & 0 \end{pmatrix}$

1. Déterminer le rang de A.
2. Justifier que A est diagonalisable.
3. Calculer les valeurs propres de A.

114 Maxima peut calculer la puissance d'une matrice carrée lorsque l'exposant est connu (par exemple A^2 ou A^5 où A est une matrice carrée donnée). Mais le logiciel ne sait pas donner directement l'expression de A^n sous forme de tableau matriciel pour un entier naturel n quelconque. Pour aider Maxima à le faire dans le cas d'une matrice diagonalisable A, on suit les étapes suivantes :

(i) On diagonalise A en donnant la matrice de passage P de la base canonique vers une base de vecteurs propres de A, et la matrice diagonale correspondante D telles que $A = PDP^{-1}$.

(ii) On donne directement D^n pour $n \in \mathbb{N}$ quelconque.

(iii) On obtient A^n à l'aide la formule $A^n = PD^nP^{-1}$.

On utilisera : `charpoly`, `eigenvectors`, `transpose`, `ratsimp`

Soit $(a,b,c) \in \mathbb{R}^3$. On pose $A = \begin{pmatrix} a-b-c & 2a & 2a \\ 2b & b-a-c & 2b \\ 2c & 2c & c-a-b \end{pmatrix}$

1. Calculer le polynôme caractéristique de A.
2. Donner une condition nécessaire et suffisante sur les réels a, b et c pour que la matrice A soit diagonalisable.
3. Soit $n \in \mathbb{N}$. Lorsque A est diagonalisable, écrire A^n sous la forme d'un tableau matriciel à 9 coefficients.
On pourra introduire $s = a + b + c$.

4 Pour travailler seul

115 *Final 2019* .

Soit k un nombre réel fixé tel que $k \neq -1$. On pose

$$A = \begin{pmatrix} k & 0 \\ (k+1)^2 & -1 \end{pmatrix} \in \mathfrak{M}_2(\mathbb{R})$$

1. Donner le polynôme caractéristique $\chi_A(X)$ de la matrice A.
   Justifier que A est diagonalisable.
2. Déterminer une base de chaque sous-espace propre de A.
3. Donner une matrice diagonale $D \in \mathfrak{M}_2(\mathbb{R})$ et une matrice inversible $P \in GL_2(\mathbb{R})$ telles que $A = PDP^{-1}$.
4. En déduire les quatre coefficients de la matrice A^n pour $n \in \mathbb{N}$.

116 *Final 2018* .

Soient a, b, c trois réels **tous non nuls**. On considère la matrice M carrée d'ordre 3 suivante :

$$M = \begin{pmatrix} 1 & a/b & a/c \\ b/a & 1 & b/c \\ c/a & c/b & 1 \end{pmatrix}$$

1. (a) Calculer M^2 et donner le nombre réel k tel que $M^2 = kM$.
   (b) En déduire un polynôme annulateur de M.
   Quelles sont les éventuelles valeurs propres de M ?
2. Déterminer le rang de M. En déduire une valeur propre de M.
3. On admet que M a deux valeurs propres distinctes.
   (a) Déterminer une base de chaque sous-espace propre de M.
   (b) La matrice M est-elle diagonalisable ?
4. On pose :

$$P = \begin{pmatrix} a & a & a \\ b & -b & 0 \\ c & 0 & -c \end{pmatrix} \qquad D = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad Q = \begin{pmatrix} 1/a & 1/b & 1/c \\ 1/a & -2/b & 1/c \\ 1/a & 1/b & -2/c \end{pmatrix}$$

   (a) Calculer PQ. En déduire que P est inversible et donner P^{-1}
   (b) Diagonaliser la matrice M en l'exprimant en fonction de P, D et Q.

117 *Médian 2014.* Soient a, b et c trois nombres réels.
On note I_3, J et A les matrices suivantes :

$$I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad J = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad A = \begin{pmatrix} a & b & c \\ c & a & b \\ b & c & a \end{pmatrix}$$

1. Exprimer A comme combinaison linéaire des matrices I_3, J et J^2.
2. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $z^3 = 1$. On notera j la solution complexe dont la partie imaginaire est strictement positive.
3. Déterminer les valeurs propres de J. Justifier que la matrice J est diagonalisable dans $\mathfrak{M}_3(\mathbb{C})$.
4. On note P la matrice de passage de la base canonique de $\mathfrak{M}_{3,1}(\mathbb{C})$ vers une base de vecteurs propres de J.
   (a) Sans calculer le polynôme caractéristique de A, donner la décomposition de A en fonction de la matrice P et d'une matrice diagonale Δ que l'on explicitera.
   (b) En déduire les valeurs propres de A en fonction de j et des réels a, b et c.
5. (a) Montrer que toutes les valeurs propres de A sont réelles si, et seulement si, $b = c$.
   (b) Donner une condition nécessaire et suffisante portant sur a, b et c pour que A soit diagonalisable dans $\mathfrak{M}_3(\mathbb{R})$.

Produit scalaire

1 Pour s'entraîner

118 Le plan géométrique euclidien orienté est rapporté à un repère orthonormal direct $\left(O\,;\,\vec{i}\,,\,\vec{j}\right)$.

On pose $\vec{u} = \vec{i} + 3\vec{j}$ et $\vec{v} = 2\vec{i} + \vec{j}$.
Calculer la mesure principale de l'angle orienté de vecteurs $\left(\widehat{\vec{u}\,,\,\vec{v}}\right)$.

Même question avec $\vec{u} = 2\vec{i} - \vec{j}$ et $\vec{v} = 3\vec{i} + 4\vec{j}$.

119 Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On pose $E = \mathbb{R}_n[X]$ et on définit l'application $\varphi : E \times E \longrightarrow \mathbb{R}$ par

$$\forall (P,Q) \in E \times E, \quad \varphi(P,Q) = \sum_{k=0}^{n} P(k)Q(k)$$

Montrer que φ est un produit scalaire sur E.
Calculer $\|P\|$ dans le cas où $P = X$.

120 Soit $(a,b,c) \in \mathbb{R}^3$. On pose $\sigma = ab + bc + ca$, $S = a + b + c$ et

$$A = \begin{pmatrix} a & b & c \\ c & a & b \\ b & c & a \end{pmatrix} \in \mathfrak{M}_3(\mathbb{R})$$

1. Calculer le déterminant de A en fonction de S et de σ.
2. On suppose dans cette question, que $a^2 + b^2 + c^2 = 1$.
   (a) Vérifier que $\det(A)^2 = (1 + 2\sigma)(1 - \sigma)^2$
   (b) Montrer, avec l'inégalité de Cauchy-Schwarz, que $|\sigma| \leqslant 1$
   (c) En déduire que $|\det(A)| \leqslant 1$
3. Une matrice carrée $M \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$ est dite orthogonale ssi ${}^t M M = I_n$.
   Montrer que A est orthogonale ssi $\sigma = 0$ et $S \in \{-1\,;\,1\}$.

121 Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $(a_1, a_2, \dots, a_n) \in \mathbb{R}^n$.

1. Montrer que $\left(\sum_{k=1}^{n} a_k\right)^2 \leqslant n \sum_{k=1}^{n} a_k^2$. Étudier le cas d'égalité.
2. On suppose de plus que

$$\forall k \in [\![1, n]\!],\ a_k > 0 \quad \text{et} \quad a_1 + a_2 + \cdots + a_n = 1$$

   Montrer que $\sum_{k=1}^{n} \dfrac{1}{a_k} \geqslant n^2$. Préciser les cas d'égalité.

122 *Somme des coefficients d'une matrice orthogonale* .

Par définition, une matrice carrée $A \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$ est dite orthogonale ssi ${}^t A A = I_n$. Soit $A = (a_{i,j})_{\substack{1 \leqslant i \leqslant n \\ 1 \leqslant j \leqslant n}}$ une matrice orthogonale.

On pose $U = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} \in \mathfrak{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ et pour toutes matrices colonnes X et Y, $\langle X \mid Y \rangle = {}^t X Y$

1. Calculer $\langle AU \mid U \rangle$.
2. À l'aide de l'inégalité de Cauchy-Schwarz, démontrer que

$$\left| \sum_{1 \leqslant i,j \leqslant n} a_{i,j} \right| \leqslant n$$

3. Étudier le cas d'égalité.

123 Dans l'espace euclidien $\mathbb{R}^3$ muni de son produit scalaire canonique, on considère le plan vectoriel F d'équation $2x + y - z = 0$.
On pose $\vec{e_1} = (1, 0, 0)$.

Déterminer le projeté orthogonal du vecteur $\vec{e_1}$ sur le plan F.

124 Soit E un espace euclidien et $\overrightarrow{n}$ un vecteur non nul de E.
Soit $H = \left(\text{Vect}\{\overrightarrow{n}\}\right)^{\perp}$ et p_H la projection orthogonale sur H.

1. Montrer que
$$\forall x \in E, \qquad p_H(x) = x - \frac{\langle x \mid \overrightarrow{n}\rangle}{\|\overrightarrow{n}\|^2}\,\overrightarrow{n}$$
2. Dans $\mathbb{R}^3$, H est le plan d'équation $x-2y+z=0$. Donner la matrice de p_H dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$.
3. Diagonaliser sans calcul cette matrice.

125 Soit $E = \mathscr{C}\left([a,b]\,,\,\mathbb{R}\right)$ l'espace vectoriel des fonctions définies et continues sur $[a\,,b]$ à valeurs dans $\mathbb{R}$ (où $a<b$).
Soit
$$\varphi : \begin{array}{ccc} E\times E & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (f,g) & \longmapsto & \displaystyle\int_a^b f(t)g(t)\,\mathrm{d}t \end{array}$$

1. Montrer que φ est un produit scalaire sur E.
2. Calculer $\|g\|$ pour $g : t \mapsto 1$.
3. (a) Prouver que, pour $f \in E$, $\displaystyle\left(\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t\right)^2 \leqslant (b-a)\int_a^b f(t)^2\,\mathrm{d}t$
   (b) Dans quel cas a-t-on égalité ?

126 Dans $\mathbb{R}^3$ muni du produit scalaire canonique, orthonormaliser en suivant le procédé de Schmidt, la famille (u,v,w) avec
$$u=(1,0,1) \quad ; \quad v=(1,1,1) \quad ; \quad w=(-1,1,0)$$

127 $\mathbb{R}^4$ est muni de sa structure canonique d'espace vectoriel euclidien.
Soit $e_1=(1,0,1,0)$ et $e_2=(1,-1,1,-1)$. On pose $F=\text{Vect}(e_1,e_2)$.

1. Déterminer une base orthonormale de F.
2. Déterminer la matrice dans la base canonique de $\mathbb{R}^4$ de la projection orthogonale sur F.
3. Calculer la distance du vecteur $(1,1,1,0)$ au sous-espace F.

128 Soit $\mathbb{R}_3[X]$ l'espace vectoriel des polynômes de degré inférieur ou égal à 3. On note $\mathscr{B}=(e_0,e_1,e_2,e_3)$ la base canonique de $\mathbb{R}_3[X]$ (i.e. $e_0=1$, $e_1=X$, $e_2=X^2$, $e_3=X^3$). On considère le produit scalaire sur $\mathbb{R}_3[X]$ défini par
$$<P \mid Q> = \int_{-1}^{1} P(x)Q(x)\,\mathrm{d}x$$
Appliquer le procédé de Gram Schmidt pour construire une base *orthogonale* de $\mathbb{R}_3[X]$.

129 *Avec un logiciel de calcul formel.* Soit $E=\mathscr{C}\left([0,1]\,,\,\mathbb{R}\right)$ l'espace vectoriel des fonctions réelles définies et continues sur $[0,1]$.

1. Vérifier que l'application $\varphi : (f,g) \longmapsto \displaystyle\int_0^1 f(t)g(t)\,\mathrm{d}t$ est un produit scalaire sur E.
2. On pose $F=\text{Vect}(u_1,u_2)$ où $u_1 : t\mapsto t$ et $u_2 : t \mapsto 1$.
   Construire une base orthonormale de F.
3. Calculer $\displaystyle\min_{(a,b)\in\mathbb{R}^2}\int_0^1 \left(\mathrm{e}^t - at - b\right)^2\mathrm{d}t$

130 Notons $E=\mathbb{R}_3[X]$. On admet que $\forall k\in\mathbb{N}$, $\displaystyle\int_0^{+\infty} t^k\,\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t = k!$
Soit l'application
$$\varphi : \begin{array}{ccc} E\times E & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (P,Q) & \longmapsto & \displaystyle\int_0^{+\infty} P(t)Q(t)\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t \end{array}$$

1. Vérifier que l'application φ définit un produit scalaire sur E.
2. Soit f la fonction numérique définie sur $\mathbb{R}^3$ par
$$f(a,b,c) = \int_0^{+\infty}\left(t^3 - a\,t^2 - b\,t - c\right)^2\,\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t$$
   Montrer que f admet un minimum absolu.
   En quel(s) point(s) est-il atteint ? Calculer ce minimum.

2 Pour approfondir

131 Soit n un entier supérieur ou égal à 2.
Toutes les matrices considérées appartiennent à $\mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$.
On appelle trace d'une matrice carrée A et on note $\mathrm{tr}(A)$ la somme de ses coefficients diagonaux.

1. Montrer que pour toutes matrices M et N de $\mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$ et pour tout réel λ,
$$\mathrm{tr}(\lambda M+N)=\lambda\mathrm{tr}(M)+\mathrm{tr}(N)$$
$$\mathrm{tr}({}^tM)=\mathrm{tr}(M)$$
$$\mathrm{tr}(MN)=\mathrm{tr}(NM)$$
2. Montrer que sur $\mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$, l'application $(A,B)\longmapsto\langle A\mid B\rangle=\mathrm{tr}({}^tAB)$ est un produit scalaire.
On notera $\|A\|=\sqrt{\langle A\mid A\rangle}$ la norme associée.
3. Calculer $\langle I_n\mid A\rangle$ et montrer que pour toute matrice $A\in\mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$,
$$\mathrm{tr}(A)\leqslant\sqrt{n}\,\|A\|$$
4. On note $\mathscr{S}$ l'ensemble des matrices symétriques et $\mathscr{A}$ l'ensemble des matrices antisymétriques (c'est-à-dire vérifiant ${}^tA=-A$).
$\star$ Prouver que $\mathscr{S}$ et $\mathscr{A}$ sont des sous-espaces vectoriels supplémentaires et orthogonaux dans $\mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$
5. (a) Soit $A\in\mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$. Déterminer $\min\limits_{M\in\mathscr{S}}\|A-M\|$.
(b) On suppose dans cette question $n=3$ et on pose
$$A=\begin{pmatrix}0&1&2\\2&0&1\\-1&-1&0\end{pmatrix}$$
Déterminer la distance de A à $\mathscr{S}$, c'est-à-dire $\min\limits_{M\in\mathscr{S}}||A-M||$.

132 Soit $n\in\mathbb{N},n\geqslant 2$. On se place dans $E=\mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$. On pose $I=I_n$.

1. (a) Montrer que l'application
$$\varphi:\begin{array}{ccc}E\times E&\longrightarrow&\mathbb{R}\\(A,B)&\longmapsto&\langle A\mid B\rangle=\mathrm{tr}({}^tAB)\end{array}$$
est un produit scalaire sur E.
(b) Pour $M\in E$, que vaut $\langle M\mid I\rangle$?
2. On désigne par J la matrice de E dont tous les coefficients sont égaux à 1. On pose $F=\mathrm{Vect}(I,J)$.
(a) Calculer J^2 en fonction de J. En déduire $\langle J\mid J\rangle$.
(b) On note $P_F(M)$ le projeté orthogonal sur F d'une matrice $M\in E$.
En remarquant que $\langle M\mid J\rangle=\langle p_F(M)\mid J\rangle$, exprimer $p_F(M)$ comme combinaison linéaire de I et J en fonction de $\mathrm{tr}(M)$ et du réel $\mu=\langle M\mid J\rangle$.
(c) Calculer μ en fonction des coefficients de M.

133 *Final 2019* .
On note E l'ensemble des suites $\mathbf{u}=(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de nombres réels telles que la série $\sum u_n^2$ converge.

1. (a) Prouver que pour tous réels x et y, $|xy|\leqslant\dfrac{1}{2}\left(x^2+y^2\right)$
(b) En déduire que si $\mathbf{u}=(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $\mathbf{w}=(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont deux suites appartenant à E, alors la série $\sum u_nw_n$ est absolument convergente.
2. On admet que E, muni des lois usuelles, est un $\mathbb{R}-$espace vectoriel.
On considère l'application φ qui associe à tout couple $(\mathbf{u},\mathbf{w})\in E^2$, le nombre réel
$$\varphi(\mathbf{u},\mathbf{w})=\sum_{n=0}^{+\infty}u_nw_n$$
(a) Montrer que φ définit un produit scalaire sur E que l'on notera par la suite $\langle\cdot\mid\cdot\rangle$

(b) Soit $\mathbf{u} = (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite appartenant à E.
Montrer que la suite de terme général $\dfrac{1}{2^n}$ appartient à E.
En déduire la convergence de la série $\sum \dfrac{u_n}{2^n}$.

(c) En appliquant l'inégalité de Cauchy-Schwarz, déterminer le plus petit réel $A > 0$ tel que

$$\forall (u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in E, \qquad \left|\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{u_n}{2^n}\right| \leqslant A\sqrt{\sum_{n=0}^{+\infty} u_n^2}$$

134 Dans tout l'exercice, I désigne l'intervalle fermé $[0,+\infty[$.
On note E le $\mathbb{R}$−espace vectoriel constitué des fonctions $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ continues sur I telles que f^2 est intégrable sur I, c'est-à-dire telles que l'intégrale généralisée $\displaystyle\int_0^{+\infty} f(t)^2\,\mathrm{d}t$ converge.

Partie A : un produit scalaire sur E

1. Prouver que pour tous réels a et b, $\quad |ab| \leqslant \dfrac{1}{2}\left(a^2+b^2\right)$.
2. Montrer que le produit de deux éléments de E est une fonction intégrable sur I.
3. Soit φ l'application qui au couple $(f,g)\in E^2$ associe le réel : $\varphi(f,g) = \displaystyle\int_0^{+\infty} f(t)g(t)\,\mathrm{d}t$. Montrer que φ est un produit scalaire sur E que l'on notera par la suite $\langle\ |\ \rangle$.
4. Soit $\alpha \in \mathbb{R}^{+*}$. Montrer que pour toute fonction $f \in E$,

$$\int_0^{+\infty} f(t)\mathrm{e}^{-\alpha t}\,\mathrm{d}t \leqslant \frac{1}{\sqrt{2\alpha}}\sqrt{\int_0^{+\infty} f(t)^2\,\mathrm{d}t}$$

Partie B : orthonormalisation

On considère les fonctions $f_1 : t \longmapsto \mathrm{e}^{-t}$ et $f_2 : t \longmapsto \mathrm{e}^{-2t}$

1. Justifier que f_1 et f_2 sont des éléments de E.
2. Construire une base orthonormale $\mathscr{B} = (\varepsilon_1, \varepsilon_2)$ du sous-espace vectoriel $F = \mathrm{Vect}(f_1, f_2)$ de E.
3. On admet que $\forall k \in \mathbb{N}^*$, $\displaystyle\int_0^{+\infty} t\,\mathrm{e}^{-kt}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{k^2}$
Calculer les deux réels a et b minimisant l'intégrale

$$\int_0^{+\infty} \left(t\mathrm{e}^{-t} - a\,\mathrm{e}^{-t} - b\,\mathrm{e}^{-2t}\right)^2\,\mathrm{d}t$$

135 Soit E un espace vectoriel euclidien et $f \in \mathscr{L}(E)$ tel que

$$\forall (x,y) \in E^2, \qquad \langle f(x)\,|\,y\rangle = \langle x\,|\,f(y)\rangle$$

1. Montrer que la matrice de f dans une base orthonormée $\mathscr{B} = (e_1, e_2, \dots, e_n)$ est symétrique.
2. Démontrer que le noyau et l'image de f sont supplémentaires et orthogonaux.

3 TP sous Maxima

136 *On utilisera :* `integrate, length, sqrt, for..from..thru..do, sum, append, ratsimp`
On munit l'espace vectoriel $E = \mathscr{C}([0,1],\mathbb{R})$ du produit scalaire :

$$(f,g) \longmapsto \langle f\,|\,g\rangle = \int_0^1 f(t)g(t)\,\mathrm{d}t$$

1. Créer une fonction `ps(expr1,expr2)` qui calcule l'intégrale

$$\int_0^1 \texttt{expr1} \times \texttt{expr2}\,\mathrm{d}t$$

dans laquelle `expr1` et `expr2` sont deux expressions de la variable désassignée t.

2. Soit $\mathscr{F} = (f_1, f_2, \dots, f_n)$ une famille libre de fonctions de E.
   Écrire une procédure `orthom(famille)` prenant en paramètre une liste d'expressions $(f_1(t), f_2(t), \dots, f_n(t))$ de la variable désassignée t et qui renverra la famille orthonormale associée à $\mathscr{F}$ obtenue par l'algorithme de Gram-Schmidt.
3. On note h la fonction définie sur $[0,1]$ par $h(t) = \begin{cases} t\ln t & \text{si} \quad t \in]0,1] \\ 0 & \text{si} \quad t = 0 \end{cases}$
   (a) Justifier que $h \in E$.
   (b) On pose $\quad \delta = \min\limits_{(a,b,c)\in\mathbb{R}^3} \displaystyle\int_0^1 t^2 \left(\ln(t) - a - b\,t^3 - c\sqrt{t}\right)^2 \mathrm{d}t$
   Déterminer le sous-espace vectoriel F de E tel que $\delta = d(h,F)^2$.
   ⋆ En déduire la valeur exacte de δ sans chercher à calculer les réels a, b et c réalisant le minimum.

4 Pour travailler seul

137 *Final 2015* .

On munit $\mathbb{R}^3$ de sa structure euclidienne canonique. Soit $\mathscr{B}_0 = (e_1, e_2, e_3)$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$.

On désigne par F le sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$ engendré par les vecteurs $u = (1,1,1)$ et $v = (1,2,3)$.

1. Construire une base orthonormale $(\varepsilon_1, \varepsilon_2)$ de F.
   Compléter cette base en une base orthonormale directe $\mathscr{B}'$ de $\mathbb{R}^3$.
2. Soit p la projection orthogonale sur F.
   (a) Déterminer la matrice A de p dans la base canonique $\mathscr{B}_0$.
   (b) Calculer la distance du vecteur e_1 au sous-espace F.

138 *Final 2018* .

On se place dans l'espace vectoriel $E = \mathbb{R}_2[X]$ des polynômes à coefficients réels et de degré inférieur ou égal à 2. On considère l'application φ définie de $E \times E$ à valeurs dans $\mathbb{R}$ par :

$$\forall (P,Q) \in E \times E, \quad \varphi(P,Q) = \int_0^1 P'(t)Q'(t)\,\mathrm{d}t + P(0)Q(0)$$

1. Montrer que φ définit un produit scalaire sur E.
2. On notera dorénavant $\langle P \mid Q \rangle$ au lieu de $\varphi(P,Q)$.
   On désigne par $F = \mathbb{R}_1[X]$ le sous-espace vectoriel de E des polynômes de degré inférieur ou égal à 1.
   On rappelle que F est de dimension 2.
   Vérifier que $(\mathbb{1}, X)$ est une base orthonormale de F.
3. (a) Déterminer le projeté orthogonal du polynôme X^2 sur le sous-espace vectoriel F.
   (b) En déduire la distance $d(X^2, F)$ du polynôme X^2 au sous-espace vectoriel F.
4. Trouver un troisième polynôme Q_3 tel que $(\mathbb{1}, X, Q_3)$ soit une base orthonormée de E.

139 Soit $E = \mathbb{R}_2[X]$. On définit sur $E \times E$ l'application

$$\varphi : (P,Q) \longmapsto P(-1)Q(-1) + P(0)Q(0) + P(1)Q(1)$$

1. Vérifier que (E,φ) est un espace euclidien.
2. On pose $F = \mathrm{Vect}(X^2 + 1)$. Déterminer $F^\perp$.
3. Par le procédé de Gram-Schmidt, obtenir une base orthonormée de E.
4. Déterminer $G^\perp$ lorsque $G = \mathbb{R}_1[X]$ puis la distance de X^2 à G.

140

1. Déterminer la matrice $A \in \mathfrak{M}_3(\mathbb{R})$, dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$, de la projection orthogonale sur le plan $\mathscr{P}$ d'équation $x - y + 2z = 0$.
2. Diagonaliser cette matrice A.

Suites et séries de fonctions

1 Pour s'entraîner

141 On définit la suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sur $\mathbb{R}$ par :

$$\forall n\in\mathbb{N},\ \forall x\in\mathbb{R},\quad f_n(x)=\sin\left(\frac{x}{2^n}\right)$$

1. Montrer que la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement sur $\mathbb{R}$ vers une fonction f que l'on précisera.
2. (a) On pose $\forall n\in\mathbb{N},\ u_n=\left|f_n(2^{n-1}\pi)-f(2^{n-1}\pi)\right|$. Calculer u_n
   (b) La convergence de la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est-elle uniforme sur $\mathbb{R}$?

142 On définit la suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ sur $\mathbb{R}$ par :

$$\forall n\in\mathbb{N}^*,\ \forall x\in\mathbb{R},\quad f_n(x)=n\sin\left(\frac{x}{n}\right)$$

1. Montrer que la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge simplement sur $\mathbb{R}$ vers une fonction f que l'on précisera.
2. (a) On pose $\forall n\in\mathbb{N}^*,\ u_n=|f_n(n\pi)-f(n\pi)|$.
   Calculer u_n et en déduire $\lim\limits_{n\longrightarrow+\infty}u_n$
   (b) La convergence de la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est-elle uniforme sur $\mathbb{R}$?
3. On considère, pour tout entier $n\in\mathbb{N}^*$, la fonction g_n définie sur $\mathbb{R}$ par :
   $$\forall x\in\mathbb{R},\quad g_n(x)=n\sin\left(\frac{x}{n}\right)-x$$
   (a) Prouver que g_n est décroissante sur $\mathbb{R}$.
   (b) En déduire la valeur de $\sup\limits_{x\in[0,1]}|g_n(x)-g(x)|$ en fonction de n.
   (c) La convergence de la suite $(g_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est-elle uniforme sur $[0,1]$? Justifier la réponse.

143 On définit la suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sur $[0,1]$ par :

$$\forall n\in\mathbb{N},\ \forall x\in[0,1],\quad f_n(x)=\frac{nx^2}{1+nx}$$

1. Montrer que la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement sur $[0,1]$ vers une fonction f que l'on précisera.
2. (a) Démontrer que $\forall n\in\mathbb{N}^*,\ \forall x\in[0,1],\quad |f_n(x)-f(x)|\leqslant\frac{1}{n}$
   (b) La convergence de la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est-elle uniforme sur $[0,1]$? Justifier.
3. En déduire $\lim\limits_{n\to+\infty}\int_0^1\frac{nx^2}{1+nx}\,\mathrm{d}x$.

144 On définit la suite de fonctions $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sur $[0,+\infty[$ par :

$$\forall n\in\mathbb{N},\ \forall x\in\mathbb{R}^+,\quad u_n(x)=\frac{\cos(nx)}{1+n^2x^2}$$

1. Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement sur $\mathbb{R}^+$ vers une fonction u que l'on précisera.
2. (a) Calculer pour tout entier $n\geqslant1$, $u_n\left(\frac{2\pi}{n}\right)$
   (b) La suite de fonctions $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge-t-elle uniformément vers u sur $]0,+\infty[$?
3. On se fixe un réel $a>0$. Montrer que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers u sur $[a,+\infty[$.

145 Étudier la convergence simple et uniforme de la suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ dans chacun des cas suivants :

1. $f_n : \begin{array}{ccc} [0,1] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & x^n \end{array}$

2. $f_n : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^+ & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \sqrt{x+\dfrac{1}{n}} \end{array}$

3. $f_n : \begin{array}{ccc} [0,1] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & x^n(1-x) \end{array}$

4. $f_n : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \sin\left(x+\dfrac{1}{n}\right) \end{array}$

   On montrera d'abord que $\forall (a,b) \in \mathbb{R}^2$, $|\sin a - \sin b| \leqslant |a-b|$

5. $f_n : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par $f_n(x) = \begin{cases} x^n \ln x & \text{si } 0 < x \leqslant 1 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$

146 Étudier la convergence simple et uniforme de la suite de fonctions $(g_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ dans chacun des cas suivants :

1. $g_n : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \dfrac{nx}{1+n^2x^2} \end{array}$

2. $g_n : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^+ & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \dfrac{1}{1+nx} \end{array}$

3. $g_n : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^+ & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \left(x+\dfrac{1}{n}\right)^2 \end{array}$

4. $g_n : \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par $g_n(x) = \begin{cases} nx^2 & \text{si } 0 \leqslant x \leqslant 1/n \\ x & \text{si } x > 1/n \end{cases}$

5. ★ $g_n : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \dfrac{x}{n^2+x^2} \end{array}$

147 On note $I =]0,+\infty[$ et on définit pour tout entier naturel n non nul, la fonction f_n sur I par

$$\forall x \in \mathbb{R}^{+*},\ f_n(x) = \mathrm{e}^{-nx} - 2\mathrm{e}^{-2nx}$$

1. Justifier que f_n est intégrable sur I puis calculer $\displaystyle\int_0^{+\infty} f_n(x)\,\mathrm{d}x$.
2. Que vaut la somme $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \int_0^{+\infty} f_n(x)\,\mathrm{d}x$?
3. Soit $x \in I$. Démontrer que la série numérique $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} f_n(x)$ est convergente et que $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} f_n(x) = \frac{\mathrm{e}^{-x}}{1+\mathrm{e}^{-x}}$
4. On pose $\forall x \in I,\ S(x) = \dfrac{\mathrm{e}^{-x}}{1+\mathrm{e}^{-x}}$

   Montrer que S est intégrable sur I, puis calculer $\displaystyle\int_0^{+\infty} S(x)\,\mathrm{d}x$.

148 Soit $f_n : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par $\forall x \in \mathbb{R},\ f_n(x) = \dfrac{(-1)^n \arctan(nx)}{1+n^2}$.
Montrer que la série de fonctions $\sum f_n$ converge normalement sur $\mathbb{R}$.

149 Étudier les convergences simple, absolue, normale et uniforme sur $\mathbb{R}^+$ de la série de fonctions $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} f_n$ où

$$f_n : \begin{array}{ccc} [0,+\infty[& \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \dfrac{(-1)^n}{x^2+n} \end{array}$$

150 Pour tout entier naturel n, on considère la fonction

$$u_n : \begin{array}{ccc}]0,+\infty[& \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \dfrac{\mathrm{e}^{-nx}}{n+1} \end{array}$$

1. Montrer que la série de fonctions $\sum u_n$ converge simplement sur $]0,+\infty[$.
2. On pose pour tout réel $x > 0$, $\quad S(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} u_n(x)$.

(a) Calculer, pour tout entier naturel n et pour tout réel $x > 0$, $u_n'(x)$.

(b) Montrer que la série de fonctions $\sum u_n'$ converge normalement sur tout segment $[a, b]$ inclus dans $]0, +\infty[$.

(c) En déduire que la fonction S est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $]0, +\infty[$ et exprimer $S'(x)$ sous forme de somme d'une série.

(d) En déduire le sens de variation de S.

151 Pour tout entier naturel n non nul, on considère la fonction

$$u_n : \begin{array}{ccc} [0, +\infty[& \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \dfrac{\ln(n+x)}{n^2} \end{array}$$

1. (a) Montrer que la série numérique $\sum \dfrac{\ln n}{n^2}$ est convergente.
   En déduire que la série de fonctions $\sum u_n$ converge simplement sur $\mathbb{R}^+$.

   (b) Calculer pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\quad u_n\left(e^{n^2} - n\right)$.
   La série $\sum u_n$ converge-t-elle uniformément sur $\mathbb{R}^+$?

   (c) Soit $b > 0$. Montrer que la série de fonctions $\sum u_n$ converge normalement sur le segment $[0, b]$.

2. On note S la fonction somme : $\quad S = \sum_{n=1}^{+\infty} u_n$.

   (a) Calculer, pour tout entier $n \geqslant 1$ et pour tout réel $x \geqslant 0$, $u_n'(x)$.

   (b) Montrer que la série de fonctions $\sum u_n'$ converge normalement sur $[0, +\infty[$.

   (c) En déduire que la fonction S est dérivable sur $[0, +\infty[$ et exprimer $S'(x)$ sous forme de somme d'une série.

   (d) En déduire le sens de variation de S.

3. Déterminer la limite de S en $+\infty$.

2 Pour approfondir

152 Pour tout entier naturel n, on définit la fonction f_n sur l'intervalle $[0, +\infty[$ par :

$$f_n(t) = \frac{e^{-t}}{(1+t)^n}$$

On pose pour tout entier naturel n, $I_n = \displaystyle\int_0^{+\infty} f_n(t)\,dt = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}}{(1+t)^n}\,dt$

1. (a) Justifier la convergence de l'intégrale généralisée I_n pour tout entier $n \in \mathbb{N}$.

   (b) Prouver que la suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente et préciser sa limite.

2. Soit $n \in \mathbb{N}$.

   (a) Exprimer $f_n'(t)$ en fonction de $f_n(t)$ et de $f_{n+1}(t)$.

   (b) En déduire une relation entre n, I_n et I_{n+1}.

   (c) Déterminer un équivalent simple de I_n lorsque n tend vers $+\infty$.

3. Pour tout entier naturel n, on considère la fonction $u_n : x \longmapsto I_n x^n$
   On note S la fonction somme $\quad S : x \longmapsto \sum_{n=0}^{+\infty} I_n x^n$

   (a) Montrer que la fonction S est définie sur l'intervalle $[-1, 1[$.

   (b) Montrer que la série de fonctions $\sum u_n$ converge normalement sur tout segment $[a, b]$ inclus dans l'intervalle $]-1, 1[$

153 Soit $a \in \mathbb{R}^{+*}$. Pour tout entier naturel n, on définit la fonction S_n sur $[0, 1[$ par $S_n(x) = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k x^{ak}$

1. Montrer que la suite de fonctions $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement sur $[0, 1[$ vers une fonction S que l'on précisera.

2. En appliquant le *théorème de convergence dominée*, prouver que

$$\int_0^1 \frac{1}{1+x^a}\,dx = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{an+1}$$

3. En déduire les sommes $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1}$ et $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n}$.

154 On pose pour $x > 0$, $\quad S(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n!(x+n)}$

1. À $x > 0$ fixé, justifier la convergence de la série $\displaystyle\sum \frac{(-1)^n}{n!(x+n)}$
2. (a) Soit a un réel strictement positif fixé. Montrer que la fonction S est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[a, +\infty[$.
   (b) Calculer $S'(x)$ pour tout $x > 0$.
   En déduire les variations de S sur $]0, +\infty[$.
3. (a) Soit $x > 0$. Démontrer que $\quad S(x+1) = xS(x) - \mathrm{e}^{-1}$
   (b) Calculer $S(1)$.
   En déduire un équivalent simple de $S(x)$ lorsque $x \to 0^+$
4. Déterminer $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} xS(x)$.

3 TP sous Maxima

155 *On utilisera :* `plot2d, makelist, diff, factor, limit`

On pourra conjecturer le mode de convergence d'une suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ donnée en faisant une étude graphique au moyen de la commande `plot2d`. On pourra vérifier les résultats en utilisant des commandes telles que `diff` et `limit`.

On se propose d'étudier la suite de fonctions définie par

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \forall x \in [0,1], \quad f_n(x) = n x^n (1-x)$$

1. Tracer sur un même graphique les courbes représentatives des fonctions $f_0, f_2, f_4, \dots, f_{12}, f_{14}$.
2. Faire calculer $f_n'(x)$ et $\displaystyle\max_{x\in[0,1]} f_n(x)$.
3. En déduire le mode de convergence de la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sur $[0,1]$.

4 Pour travailler seul

156 *Final 2017.* 1. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on définit la fonction f_n sur $[0, +\infty[$ par $f_n(t) = \dfrac{\exp\left(-\frac{t}{n^2}\right)}{1+t^2}$. Déterminer en appliquant le théorème de convergence dominée, $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \int_0^{+\infty} f_n(t)\,\mathrm{d}t$

2. On pose pour tout entier naturel n non nul, $\quad I_n = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-x}}{1+n^4x^2}\,\mathrm{d}x$
   (a) Justifier la convergence de l'intégrale généralisée I_n.
   (b) À l'aide du changement de variable $t = n^2 x$, montrer que
   $$I_n = \frac{1}{n^2}\int_0^{+\infty} f_n(t)\,\mathrm{d}t$$
   (c) En déduire la nature de la série $\sum I_n$.

157 *Final 2019.* Pour tout entier naturel non nul n, on définit la fonction u_n sur l'intervalle ouvert $I =]-1, +\infty[$ par $u_n(x) = \dfrac{x}{n(n+x)} = \dfrac{1}{n} - \dfrac{1}{n+x}$

1. Montrer que la série $\sum u_n(x)$ est convergente pour tout réel $x \in I$.
   On note S la fonction définie sur I par : $\quad \forall x \in I,\ S(x) = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} u_n(x)$
2. (a) Soient $x \in I$ et $n \in \mathbb{N}^*$. À l'aide d'un télescopage, simplifier la différence $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} u_k(x+1) - \sum_{k=1}^{n} u_k(x)$
   (b) En déduire que pour tout réel $x \in I$, $\quad S(x+1) - S(x) = \dfrac{1}{1+x}$
   (c) Calculer $S(0)$ et $S(1)$.
   (d) On admet que la fonction S est continue sur I.
   Déterminer $\displaystyle\lim_{x\to-1} (x+1)S(x)$ puis un équivalent simple de $S(x)$ lorsque x tend vers -1.
3. (a) Montrer que S est **strictement** croissante sur l'intervalle I.
   (b) Prouver, en utilisant l'égalité de 3.(b), que pour tout entier naturel $n \geq 1$, $\quad S(n) = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$
   (c) En déduire la limite de S en $+\infty$.