Applications linéaires

1 Énoncés

18

1. Justifier qu'il existe une unique application linéaire f de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^2$ telle que :

$$f(1,0,0)=(0,1) \quad ; \quad f(1,1,0)=(1,0) \qquad f(1,1,1)=(1,1)$$

2. Calculer $f(x,y,z)$ pour tous réels x, y et z.
3. Déterminer le noyau et l'image de f.

19 Soit $f\in\mathscr{L}(\mathbb{R}^3)$ tel que $f\circ f$ est l'application nulle sur $\mathbb{R}^3$.

1. Montrer que $\operatorname{Im} f\subset \operatorname{Ker} f$.
2. On suppose de plus que $f\neq \widetilde{0_{\mathbb{R}^3}}$.
   Peut-on avoir $\mathrm{rg}(f)=0$? $\mathrm{rg}(f)=3$? $\mathrm{rg}(f)=2$?
   En déduire le rang de f par disjonction des cas.

20 Calculer le rang de chacune des deux matrices suivantes :

$$A=\begin{pmatrix} 0 & -1 & 2 & -2\\ -7 & -7 & 2 & -8\\ 0 & 4 & -6 & 6\\ 2 & -2 & 0 & -2\end{pmatrix} \quad , \quad B=\begin{pmatrix} 1 & 2 & -4 & -2 & -1\\ 0 & -2 & 4 & 2 & 0\\ 1 & 1 & -2 & -1 & 1\end{pmatrix}$$

2 Corrigés

18

1. Pour justifier l'existence et l'unicité d'une telle application linéaire f, il suffit de prouver que la famille de vecteurs $\big((1,0,0),(1,1,0),(1,1,1)\big)$ est une base de $\mathbb{R}^3$. On pose $\overrightarrow{\varepsilon_1}=(1,0,0)$; $\overrightarrow{\varepsilon_2}=(1,1,0)$ et $\overrightarrow{\varepsilon_3}=(1,1,1)$.

   Soient a, b et c des réels tels que $a\cdot\overrightarrow{\varepsilon_1}+b\cdot\overrightarrow{x\varepsilon_2}+c\cdot\overrightarrow{\varepsilon_3}=\overrightarrow{0_{\mathbb{R}^3}}$

$$\begin{array}{rc} \text{Alors} & a(1,0,0)+b(1,1,0)+c(1,1,1)=(0,0,0)\\ \text{D'où} & (a+b+c\,,\,b+c\,,\,c)=(0,0,0)\\ \text{D'où} & \left\{\begin{array}{rcl} a+b+c & = & 0\\ b+c & = & 0\\ c & = & 0\end{array}\right.\\ \text{Donc} & c=b=a=0\end{array}$$

   Donc la famille $(\overrightarrow{\varepsilon_1},\overrightarrow{\varepsilon_2},\overrightarrow{\varepsilon_3})$ est **libre**.
   Cette famille libre comporte 3 vecteurs dans l'espace vectoriel $\mathbb{R}^3$ qui est de dimension 3. Par conséquent la famille $(\overrightarrow{\varepsilon_1},\overrightarrow{\varepsilon_2},\overrightarrow{\varepsilon_3})$ est une base de $\mathbb{R}^3$.

2. Notons $(\overrightarrow{e_1},\overrightarrow{e_2},\overrightarrow{e_3})$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$.
   Exprimons $\overrightarrow{e_1},\overrightarrow{e_2},\overrightarrow{e_3}$ en fonction des vecteurs $\overrightarrow{\varepsilon_1},\overrightarrow{\varepsilon_2},\overrightarrow{\varepsilon_3}$.

$$\left\{\begin{array}{rcl} \overrightarrow{\varepsilon_1} & = & \overrightarrow{e_1}\\ \overrightarrow{\varepsilon_2} & = & \overrightarrow{e_1}+\overrightarrow{e_2}\\ \overrightarrow{\varepsilon_3} & = & \underbrace{(\overrightarrow{e_1}+\overrightarrow{e_2})}_{\overrightarrow{\varepsilon_2}}+\overrightarrow{e_3}\end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{rcl} \overrightarrow{e_1} & = & \overrightarrow{\varepsilon_1}\\ \overrightarrow{e_2} & = & \overrightarrow{\varepsilon_2}-\overrightarrow{\varepsilon_1}\\ \overrightarrow{e_3} & = & \overrightarrow{\varepsilon_3}-\overrightarrow{\varepsilon_2}\end{array}\right.$$

   Donc pour tout $(x,y,z)\in\mathbb{R}^3$,

$$\begin{array}{rcl} f(x,y,z) & = & f\left(x\overrightarrow{e_1}+y\overrightarrow{e_2}+z\overrightarrow{e_3}\right)\\ & = & x f(\overrightarrow{e_1})+y f(\overrightarrow{e_2})+z f(\overrightarrow{e_2}) \text{ par linéarité de } f\\ & = & x f\left(\overrightarrow{\varepsilon_1}\right)+y f\left(\overrightarrow{\varepsilon_2}-\overrightarrow{\varepsilon_1}\right)+z f\left(\overrightarrow{\varepsilon_3}-\overrightarrow{\varepsilon_2}\right)\\ & = & (x-y) f(\overrightarrow{\varepsilon_1})+(y-z) f(\overrightarrow{\varepsilon_2})+z f(\overrightarrow{\varepsilon_3}) \text{ par linéarité de } f\\ & = & (0\,,x-y)+(y-z\,,0)+(z\,,z)\\ & = & (y\,,x-y+z)\end{array}$$

3. • Déterminons le noyau de f.
   Soit $\overrightarrow{u}=(x,y,z)$ un vecteur appartenant à $\mathbb{R}^3$.

$$
\begin{aligned}
\vec{u} \in \operatorname{Ker} f &\iff f(\vec{u}) = \overrightarrow{0_{\mathbb{R}^2}} \\
&\iff \big(y, x-y+z\big) = (0,0) \\
&\iff \left\{ \begin{array}{rcl} y &=& 0 \\ x-y+z &=& 0 \end{array} \right. \\
&\iff \left\{ \begin{array}{rcl} y &=& 0 \\ x+z &=& 0 \end{array} \right. \\
&\iff \left\{ \begin{array}{rcl} x &=& t \\ y &=& 0 \\ z &=& -t \end{array} \right. \quad (\text{avec } t \in \mathbb{R}) \\
&\iff \exists t \in \mathbb{R}\,;\ \vec{u} = t\cdot(1,0,-1)
\end{aligned}
$$

Ainsi $\operatorname{Ker} f = \{t\cdot(1,0,-1) \in \mathbb{R}^3 \mid t \in \mathbb{R}\} = \operatorname{Vect}((1,0,-1)) = \operatorname{Vect}(e_1 - e_3)$ est de dimension 1.

• Déterminons l'image de f.
Sachant que $(\vec{\varepsilon_1}, \vec{\varepsilon_2}, \vec{\varepsilon_3})$ est une base de $\mathbb{R}^3$, on peut dire que $\operatorname{Im} f = \operatorname{Vect}\big(f(\vec{\varepsilon_1}), f(\vec{\varepsilon_2}), f(\vec{\varepsilon_3})\big)$
Or $f(\vec{\varepsilon_1}) = \vec{e_2}$ et $f(\vec{\varepsilon_2}) = \vec{e_1}$ et $f(\vec{\varepsilon_3}) = \vec{e_1} + \vec{e_2}$

$$\text{Donc } \operatorname{Im} f = \operatorname{Vect}\big(\vec{e_2}, \vec{e_1}, \vec{e_1} + \vec{e_2}\big) = \operatorname{Vect}\big(\vec{e_1}, \vec{e_2}\big) = \mathbb{R}^2$$

19 Soit $f \in \mathscr{L}(\mathbb{R}^3)$ tel que $f \circ f = \tilde{0}$.

1. Soit $y \in \operatorname{Im} f$. Alors $\exists u \in \mathbb{R}^3\,;\ y = f(u)$.
   D'où $f(y) = f(f(u)) = (f\circ f)(u) = \tilde{0}(u) = \vec{0} = (0,0,0)$. Donc $y \in \operatorname{Ker} f$.
   Ainsi $\forall y \in \operatorname{Im} f,\ y \in \operatorname{Ker} f$ ce qui signifie que $\operatorname{Im} f \subset \operatorname{Ker} f$.
2. On suppose de plus que $f \neq \tilde{0}$.
   On sait que $\operatorname{Im} f$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$ avec $\dim(\mathbb{R}^3) = 3$.
   Donc $0 \leqslant \dim(\operatorname{Im} f) \leqslant 3$. On rappelle que $\operatorname{rg}(f) = \dim(\operatorname{Im} f)$.
   – On ne peut pas avoir $\operatorname{rg}(f) = 0$ sinon f serait l'endomorphisme nul.
   – Supposons $\operatorname{rg}(f) = 3$. Alors, d'après la formule du rang,
   $\dim(\mathbb{R}^3) = \dim(\operatorname{Ker} f) + \operatorname{rg}(f)$ d'où $\dim(\operatorname{Ker} f) = 3 - 3 = 0$.
   Or, d'après la question 1, $\operatorname{Im} f \subset \operatorname{Ker} f$.
   Donc $\dim(\operatorname{Im} f) \leqslant \dim(\operatorname{Ker} f)$ c'est-à-dire $3 \leqslant 0$ **ce qui est absurde**.
   – Supposons $\operatorname{rg}(f) = 2$. Alors, d'après la formule du rang,
   $\dim(\mathbb{R}^3) = \dim(\operatorname{Ker} f) + \operatorname{rg}(f)$ d'où $\dim(\operatorname{Ker} f) = 3 - 2 = 1$.
   Or, d'après la question 1, $\operatorname{Im} f \subset \operatorname{Ker} f$.
   Donc $\dim(\operatorname{Im} f) \leqslant \dim(\operatorname{Ker} f)$ c'est-à-dire $2 \leqslant 1$ **ce qui est absurde**.

Ainsi $\boxed{\text{le rang de } f \text{ est nécessairement égal à } 1}$ et $\dim(\operatorname{Ker} f) = 2$.

20 A.
$$
\operatorname{rg}\begin{pmatrix} 1 & 2 & -4 & -2 & -1 \\ 0 & -2 & 4 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & -2 & -1 & 1 \end{pmatrix}
\underset{\substack{C_3 \leftarrow C_3 + 2C_2 \\ C_4 \leftarrow C_4 + C_2}}{=}
\operatorname{rg}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & -2 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}
$$
$$
= \operatorname{rg}\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & -2 & 0 \\ \boxed{1} & 1 & 1 \end{pmatrix}
\underset{\substack{C_2 \leftarrow C_2 - C_1 \\ C_3 \leftarrow C_3 - C_1}}{=}
\operatorname{rg}\begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 0 & -2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}
$$
$$
\underset{C_1 \longleftrightarrow C_3}{=}
\begin{pmatrix} \boxed{-2} & 1 & 1 \\ \mathbf{0} & \boxed{-2} & 0 \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \boxed{1} \end{pmatrix} = 3
$$

B.
$$
\operatorname{rg}\begin{pmatrix} 0 & -1 & 2 & -2 \\ -7 & -7 & 2 & -8 \\ 0 & 4 & -6 & 6 \\ 2 & -2 & 0 & \boxed{-2} \end{pmatrix}
\underset{\substack{C_1 \leftarrow C_1 + C_4 \\ C_2 \leftarrow C_2 - C_4}}{=}
\operatorname{rg}\begin{pmatrix} -2 & 1 & 2 & -2 \\ -15 & 1 & 2 & -8 \\ 6 & -2 & \boxed{-6} & 6 \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & -2 \end{pmatrix}
$$
$$
\underset{\substack{C_1 \leftarrow C_1 + C_3 \\ C_2 \leftarrow 3C_2 - C_3}}{=}
\operatorname{rg}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & -2 \\ -13 & 1 & 2 & -8 \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & -6 & 6 \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & -2 \end{pmatrix}
\underset{C_1 \leftarrow C_1 + 13C_2}{=}
\operatorname{rg}\begin{pmatrix} \boxed{13} & 1 & 2 & -2 \\ \mathbf{0} & \boxed{1} & 2 & -8 \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \boxed{-6} & 6 \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \boxed{-2} \end{pmatrix}
$$
$$= 4$$

Intégration sur un intervalle quelconque

1 Énoncés

42

1. Soit α un réel strictement positif.
Pour quelles valeurs de α, l'intégrale généralisée $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^\alpha(1+t)}\,\mathrm{d}t$ est-elle convergente ?
2. On définit la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ par :
$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad u_n = \int_1^{+\infty} \frac{1}{t^n(1+t)}\,\mathrm{d}t$$
   (a) Prouver que
$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad u_n + u_{n+1} = \frac{1}{n}$$
   (b) Calculer u_1 en remarquant que pour tout réel $t \geqslant 1$,
$$\frac{1}{t(1+t)} = \frac{1}{t} - \frac{1}{1+t}$$
   (c) En déduire u_2 et u_3.
3. (a) Montrer que la suite (u_n) est décroissante.
   (b) Établir que pour tout entier $n \geqslant 2$,
$$\frac{1}{n} \leqslant 2u_n \leqslant \frac{1}{n-1}$$
   (c) En déduire un équivalent simple de u_n lorsque n tend vers $+\infty$.

43

1. Justifier, pour tout réel $x > 0$, la convergence de l'intégrale
$$J(x) = \int_x^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-t}}{t}\,\mathrm{d}t$$
2. Soit $x > 0$.
   (a) Montrer, par une intégration par parties, que
$$\frac{\mathrm{e}^{-x}}{x}\left(1 - \frac{1}{x}\right) \leqslant J(x) \leqslant \frac{\mathrm{e}^{-x}}{x}$$
   (b) En déduire un équivalent simple de $J(x)$ lorsque x tend vers $+\infty$.
3. (a) Vérifier que pour tout réel $x > 0$, $\quad J(x) = -\displaystyle\int_1^x \frac{\mathrm{e}^{-t}}{t}\,\mathrm{d}t + J(1)$
   (b) Prouver que J est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}^{+*}$ et calculer $J'(x)$.
   (c) En déduire les variations de J sur $\mathbb{R}^{+*}$.
   Préciser la limite de J en zéro.

2 Corrigés

42

1. Soit α un réel strictement positif.
La fonction $f : t \longmapsto \dfrac{1}{t^\alpha(1+t)}$ est continue et positive sur $[1, +\infty[$.
Le problème se pose donc en $+\infty$ seulement.
$$f(t) \underset{(t\to+\infty)}{\sim} \frac{1}{t^\alpha\, t} = \frac{1}{t^{\alpha+1}}$$
Or l'intégrale de Riemann $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^{\alpha+1}}\,\mathrm{d}t$ converge si, et seulement si, $\alpha + 1 > 1$ c'est-à-dire $\alpha > 0$.
Donc l'intégrale généralisée $\boxed{\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^\alpha(1+t)}\,\mathrm{d}t \text{ est convergente ssi } \alpha > 0}$
2. (a) Soit $n \in \mathbb{N}^*$, n fixé.
$$u_n + u_{n+1} = \int_1^{+\infty} \frac{1}{t^n(1+t)}\,\mathrm{d}t + \int_1^{+\infty} \frac{1}{t^{n+1}(1+t)}\,\mathrm{d}t$$
$$= \int_1^{+\infty} \left(\frac{1}{t^n(1+t)} + \frac{1}{t^{n+1}(1+t)}\right)\mathrm{d}t \qquad \text{par linéarité}$$

$$= \int_1^{+\infty}\left(\frac{t+1}{t^{n+1}(1+t)}\right)\mathrm{d}t = \int_1^{+\infty}\frac{1}{t^{n+1}}\mathrm{d}t = \lim_{x\to+\infty}\int_1^x \frac{1}{t^{n+1}}\,\mathrm{d}t$$
$$= \lim_{x\to+\infty}\left[\frac{-1}{n\,t^n}\right]_1^x = \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{-1}{n\,x^n}+\frac{1}{n}\right) = \frac{1}{n}$$

Ainsi $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\boxed{u_n + u_{n+1} = \frac{1}{n}}$

(b) Soit x un réel supérieur à 1.

$$\int_1^x \frac{1}{t(1+t)}\,\mathrm{d}t = \int_1^x\left(\frac{1}{t}-\frac{1}{1+t}\right)\mathrm{d}t = [\ln t - \ln(1+t)]_1^x$$
$$= \left[-\ln\left(\frac{t+1}{t}\right)\right]_1^x = \left[-\ln\left(1+\frac{1}{t}\right)\right]_1^x$$
$$= -\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)+\ln 2 \underset{(x\to+\infty)}{\longrightarrow} \ln 2\,.$$

Donc $\boxed{u_1 = \ln 2}$

(c) En utilisant 2.(a) avec $n=1$ puis $n=2$, on obtient :
- $u_1+u_2 = 1$ d'où $u_2 = 1-\ln 2$.
- $u_2+u_3 = 1/2$ d'où $u_3 = 1/2-(1-\ln 2) = \ln(2)-1/2$.

3. (a) Soit $n\in\mathbb{N}^*$. Par linéarité,
$$u_n - u_{n+1} = \int_1^{+\infty}\left(\frac{1}{t^n(1+t)} - \frac{1}{t^{n+1}(1+t)}\right)\mathrm{d}t = \int_1^{+\infty}\left(\frac{t-1}{t^{n+1}(1+t)}\right)\mathrm{d}t$$
Or la fonction $t\longmapsto \dfrac{t-1}{t^{n+1}(1+t)}$ est continue, intégrable et **positive** sur l'intervalle $[1,+\infty[$.
Par conséquent $\displaystyle\int_1^{+\infty}\left(\frac{t-1}{t^{n+1}(1+t)}\right)\mathrm{d}t \geqslant 0$ ce qui revient à dire que $u_n \geqslant u_{n+1}$.
La suite (u_n) est donc décroissante.

(b) Soit n un entier, $n\geqslant 2$. Puisque la suite (u_n) est décroissante,
$$u_{n+1}\leqslant u_n \leqslant u_{n-1} \quad \text{d'où} \quad u_n + u_{n+1} \leqslant 2u_n \leqslant u_{n-1}+u_n$$
Or, d'après l'égalité obtenue en 2.(a), $u_n+u_{n+1} = \dfrac{1}{n}$ et $u_{n-1}+u_n = \dfrac{1}{n-1}$.

On en déduit que : $\dfrac{1}{n} \leqslant 2u_n \leqslant \dfrac{1}{n-1}$

(c) Pour tout entier $n\geqslant 2$, $1\leqslant 2\,n\,u_n \leqslant \dfrac{n}{n-1}$
Or $\displaystyle\lim_{n\longrightarrow+\infty}\frac{n}{n-1} = \lim_{n\longrightarrow+\infty}\frac{n}{n} = 1$.
Donc, d'après le théorème «des gendarmes», $\displaystyle\lim_{n\longrightarrow+\infty} 2\,n\,u_n = 1$
ce qui revient à dire que

$$\boxed{u_n \underset{(n\to+\infty)}{\sim} \frac{1}{2n}}$$

43

$$J(x) = \int_x^{+\infty}\frac{\mathrm{e}^{-t}}{t}\,\mathrm{d}t$$

1. Soit $x>0$ donné. La fonction $\varphi : t\mapsto \dfrac{\mathrm{e}^{-t}}{t}$ est définie, continue et positive sur $[x,+\infty[$.
Par ailleurs $t^2\varphi(t) = t\,\mathrm{e}^{-t} \underset{(t\to+\infty)}{\longrightarrow} 0$.
Il s'ensuit que l'intégrale généralisée $\displaystyle\int_x^{+\infty}\frac{\mathrm{e}^{-t}}{t}\,\mathrm{d}t$ converge.
En revanche $\varphi(t) \underset{(t\to0)}{\sim} \dfrac{1}{t}$ et l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{e}^{-t}}{t}\,\mathrm{d}t$ diverge. A fortiori, on ne peut pas prendre $x<0$ et J est définie uniquement sur l'intervalle ouvert $]0,+\infty[$.

2. Soit $x>0$.
(a) On obtient par une intégration par parties sur un segment $[x,y]\subset[x,+\infty[$:
$$\int_x^y \frac{\mathrm{e}^{-t}}{t}\,\mathrm{d}t = \left[-\frac{\mathrm{e}^{-t}}{t}\right]_x^y - \int_x^y\frac{\mathrm{e}^{-t}}{t^2}\,\mathrm{d}t = \frac{\mathrm{e}^{-x}}{x} - \frac{\mathrm{e}^{-y}}{y} - \int_x^y \frac{\mathrm{e}^{-t}}{t^2}\,\mathrm{d}t$$
D'où, en passant à la limite lorsque $y\to+\infty$,
$$J(x) = \int_x^{+\infty}\frac{\mathrm{e}^{-t}}{t}\,\mathrm{d}t = \frac{\mathrm{e}^{-x}}{x} - \int_x^{+\infty}\frac{\mathrm{e}^{-t}}{t^2}\,\mathrm{d}t$$
Or $\displaystyle\int_x^{+\infty}\frac{\mathrm{e}^{-t}}{t^2}\,\mathrm{d}t\geqslant 0$ donc $J(x)\leqslant \dfrac{\mathrm{e}^{-x}}{x}$

De plus $\forall t\in[x,+\infty[$, $\dfrac{\mathrm{e}^{-t}}{t^2}\leqslant\dfrac{\mathrm{e}^{-t}}{x^2}$

d'où $\displaystyle\int_x^{+\infty}\frac{e^{-t}}{t^2}\,dt \leqslant \int_x^{+\infty}\frac{e^{-t}}{x^2}\,dt = \frac{1}{x^2}\int_x^{+\infty}e^{-t}\,dt$

Ainsi $\displaystyle -\int_x^{+\infty}\frac{e^{-t}}{t^2}\,dt \geqslant -\frac{1}{x^2}e^{-x}$ puis $\displaystyle J(x) \geqslant \frac{e^{-x}}{x} - \frac{1}{x^2}e^{-x}$

Finalement $\boxed{\displaystyle\frac{e^{-x}}{x}\left(1-\frac{1}{x}\right) \leqslant J(x) \leqslant \frac{e^{-x}}{x}}$

(b) En utilisant l'encadrement précédent et le théorème des gendarmes,

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{J(x)}{\left(\frac{e^{-x}}{x}\right)} = 1$$

ce qui signifie que $\boxed{J(x) \underset{(x\to+\infty)}{\sim} \dfrac{e^{-x}}{x}}$

3. (a) On se fixe un réel $x > 0$. En distinguant les cas $0 < x < 1$ et $x \geqslant 1$, on obtient par la **relation de Chasles** :

$$\int_x^{+\infty}\varphi(t)\,dt = \int_x^1\varphi(t)\,dt + \int_1^{+\infty}\varphi(t)\,dt$$

ce qui revient à dire que $\displaystyle J(x) = -\int_1^x\frac{e^{-t}}{t}\,dt + J(1)$

(b) La fonction φ étant continue sur l'intervalle $\mathbb{R}^{+*}$ qui contient 1, la fonction $\displaystyle x \longmapsto \int_1^x\frac{e^{-t}}{t}\,dt$ est l'unique primitive sur $\mathbb{R}^{+*}$ de la fonction φ, primitive qui s'annule en 1.

Autrement dit, la fonction $\displaystyle x \longmapsto \int_1^x\frac{e^{-t}}{t}\,dt$ est dérivable sur $\mathbb{R}^{+*}$, de dérivée φ et s'annule en 1.

Donc la fonction J est dérivable sur $\mathbb{R}^{+*}$ et $J' = -\varphi$.

Comme la fonction φ est infiniment dérivable sur $\mathbb{R}^{+*}$, la fonction J est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}^{+*}$ et

$$\forall x > 0, \quad J'(x) = -\frac{e^{-x}}{x}$$

(c) $\forall x > 0, \quad J'(x) < 0$. Donc la fonction J est strictement décroissante sur l'intervalle $\mathbb{R}^{+*}$.

De plus en fixant d'abord un réel $x \in]0,1]$, nous avons

$\displaystyle\forall t \in [x,1]\ \frac{e^{-t}}{t} \geqslant \frac{e^{-1}}{t}$ d'où $\displaystyle\int_x^1\frac{e^{-t}}{t}\,dt \geqslant \int_x^1\frac{e^{-1}}{t}\,dt = -e^{-1}\ln x$

Or on a vu que $\displaystyle J(x) = \int_x^1\frac{e^{-t}}{t}\,dt + J(1)$

Donc pour tout réel $x \in]0,1]$, $J(x) \geqslant -e^{-1}\ln x + J(1)$

De plus $\displaystyle\lim_{x\to0^+} -e^{-1}\ln x + J(1) = +\infty$. Ainsi $\boxed{\displaystyle\lim_{x\to0^+} J(x) = +\infty}$

Déterminants

1 Énoncés

67 Les deux questions suivantes sont indépendantes.

1. Pour $z \in \mathbb{C}$, on pose $M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ z & 1 & z-1 \\ 1 & z & 1 \end{pmatrix} \in \mathfrak{M}_3(\mathbb{C})$.

   Pour quelles valeurs de z la matrice M est-elle inversible ?
2. Soit $N \in \mathfrak{M}_3(\mathbb{R})$ une matrice carrée d'ordre 3 à coefficients réels telle que $N^3 = -I_3$.
   Que vaut $\det(N)$?

68 *Final 2016* .

On pose $A = \begin{pmatrix} a & c & c \\ c & a & b \\ c & b & a \end{pmatrix} \in \mathfrak{M}_3(\mathbb{R})$. Calculer sous forme factorisée le déterminant de la matrice A.

2 Corrigés

67

1. Calculons le déterminant de M.

$$\det(M) \underset{\substack{C_1 \leftarrow C_1 - C_3 \\ C_2 \leftarrow C_2 - C_3}}{=} \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 2-z & z-1 \\ 0 & z-1 & 1 \end{vmatrix} = (-1) \times \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ z-1 & 1 \end{vmatrix} = z-1$$

Donc M est inversible ssi $\det(M) \neq 0$ c'est-à-dire $\boxed{z \neq 1}$

2. Puisque $N^3 = -I_3$, $\det(N^3) = \det(-I_3)$.

   Or $\det(N^3) = \det(N)^3$ et $\det(-I_3) = (-1)^3 \det(I_3) = -1$.

   D'où $\det(N)^3 = -1$.
   Ainsi le réel $\det(N)$ est solution dans $\mathbb{R}$ de l'équation

$$x^3 = -1 \iff x = -1.$$

   Ainsi $\boxed{\det(N) = -1}$

68 $\det(A) = \begin{vmatrix} a & c & c \\ c & a & b \\ c & b & a \end{vmatrix} \overset{C_3 \leftarrow C_3 - C_2}{=} \begin{vmatrix} a & c & 0 \\ c & a & b-a \\ c & b & a-b \end{vmatrix} \overset{\text{par linéarité}}{=} (a-b) \begin{vmatrix} a & c & 0 \\ c & a & -1 \\ c & b & 1 \end{vmatrix}$

$\overset{L_2 \leftarrow L_2 + L_3}{=} (a-b) \begin{vmatrix} a & c & 0 \\ 2c & a+b & 0 \\ c & b & 1 \end{vmatrix} = (a-b) \begin{vmatrix} a & c & 0 \\ 2c & a+b & 0 \\ c & b & \boxed{1} \end{vmatrix} = (a-b) \times 1 \begin{vmatrix} a & c \\ 2c & a+b \end{vmatrix}$

$= (a-b)(a(a+b) - 2cc) = (a-b)(a^2 + ab - 2c^2)$

Séries numériques

1 Énoncés

94 Les six questions sont indépendantes

1. Combien vaut la somme suivante : $\displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{k!2^k}$?

2. Soit $\sum u_n$ une série à termes réels positifs. Quelle condition est suffisante pour garantir la convergence de cette série ?

   (a) $u_n \leqslant \frac{1}{n}$ (b) $u_n^2 \leqslant \frac{1}{n}$ (c) $\sqrt{u_n} \leqslant \frac{1}{n}$ (d) $\mathrm{e}^{u_n} \leqslant \frac{1}{n}$

3. Pour laquelle des séries suivantes sait-on facilement calculer la somme ?

   (a) $\sum \frac{1}{n^3}$ (b) $\sum \frac{1}{n(n+1)}$ (c) $\sum \frac{1}{n^2+1}$ (d) $\sum \frac{(-1)^n}{3n+1}$

4. Pour laquelle des séries suivantes, la règle de D'Alembert permet-elle de justifier la convergence ?

   (a) $\sum \frac{1}{n \ln(n)^2}$ (b) $\sum \frac{n}{2^n}$ (c) $\sum \frac{\sin n}{n!}$ (d) $\sum \frac{1}{n^2}$

5. Soit $a \in \mathbb{R}^{+*}$. Donner une condition nécessaire et suffisante sur a pour que la série de terme général $\frac{\sinh(n)}{a^n}$ soit convergente.

6. Parmi les 4 séries suivantes, une seule est divergente. Indiquer laquelle.

   (a) $\sum_{n\geqslant 1} \frac{\ln n}{n^2}$ (b) $\sum_{n\geqslant 2} \frac{1}{n \ln n}$ (c) $\sum \frac{(-2)^n}{n!}$ (d) $\sum \frac{n+1}{2^n}$

95 On note E l'ensemble des suites réelles $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ telles que la série de terme général $n^2 u_n^2$ converge.

1. Montrer que la suite $(w_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définie par $w_n = \frac{1}{n^2}$ appartient à E.
2. Montrer que, si u et v sont deux suites de E, alors la série de terme général $n^2 u_n v_n$ est absolument convergente.
3. En déduire que E est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel.

96 *Final 2013* . La série alternée $\sum \frac{(-1)^k}{2k+1}$ est semi-convergente.

On appelle «reste d'ordre n» de la série $\sum \frac{(-1)^k}{2k+1}$, le nombre réel

$$R_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{2k+1}$$

L'objectif de cet exercice est d'obtenir un équivalent de R_n, reste d'une série alternée convergente.

1. Démontrer que, pour tout entier naturel n,

$$2R_n - \frac{(-1)^{n+1}}{2n+3} = \sum_{k=n+1}^{+\infty} (-1)^k \left(\frac{1}{2k+1} - \frac{1}{2k+3}\right)$$

2. Justifier que, pour tout entier naturel n,

$$\left|\sum_{k=n+1}^{+\infty} (-1)^k \left(\frac{1}{2k+1} - \frac{1}{2k+3}\right)\right| \leqslant \frac{2}{(2n+3)(2n+5)}$$

3. Déterminer un équivalent simple de R_n lorsque n tend vers $+\infty$.

2 Corrigés

94

1. $\sum \frac{1}{k!2^k} = \sum \frac{x^k}{k!}$ avec $x = \frac{1}{2}$. On reconnaît la série exponentielle et on sait que
$$\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{k!2^k} = e^{\frac{1}{2}} = \sqrt{e}$$

2. Pour que la série à termes réels positifs $\sum u_n$ soit convergente, il suffit que
$\forall n \in \mathbb{N}^*, u_n \leqslant \frac{1}{n^2}$ car la série de Riemann $\sum \frac{1}{n^2}$ converge.
Il suffit donc que $\forall n \in \mathbb{N}^*, \sqrt{u_n} \leqslant \frac{1}{n}$

3. $\forall k \in \mathbb{N}^*, \quad \frac{1}{k(k+1)} = \frac{(k+1)-k}{k(k+1)} = \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}$.
$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)}$ apparaît comme une somme «téléscopique» dont on sait calculer facilement la limite lorsque n tend vers $+\infty$.

4. La règle de D'Alembert permet de justifier la convergence de la série $\sum \frac{n}{2^n}$.

5. Soit $a \in \mathbb{R}^{+*}$. Pour tout entier naturel n,
$\sinh(n) = \frac{e^n - e^{-n}}{2}$ et $\frac{\sinh(n)}{a^n} \geqslant 0$.
Donc $\sinh(n) \underset{(n\to+\infty)}{\sim} \frac{e^n}{2}$ et $\frac{\sinh(n)}{a^n} \underset{(n\to+\infty)}{\sim} \frac{e^n}{2a^n} = \frac{(e/a)^n}{2}$
Or les séries $\sum \frac{\sinh(n)}{a^n}$ et $\sum \left(\frac{e}{a}\right)^n$ sont de même nature
et la série géométrique $\sum \left(\frac{e}{a}\right)^n$ converge ssi $\left|\frac{e}{a}\right| < 1$.
Ainsi la série de terme général $\frac{\sinh(n)}{a^n}$ est convergente si, et seulement si, $\frac{e}{a} < 1$ c'est-à-dire $a > e$.

6. (a) converge avec le critère de Riemann car $\lim_{n\longrightarrow+\infty} n^{3/2}\frac{\ln n}{n^2} = 0$
(c) converge car il s'agit d'une série exponentielle.
(d) converge d'après le critère de d'Alembert.

95

1. On a $n^2 w_n^2 = \frac{1}{n^2}$, et la série de Riemann $\sum \frac{1}{n^2}$ est convergente, ce qui prouve que (w_n) appartient à E.
2. Par identité remarquable, on a : $(|u_n| - |v_n|)^2 \geqslant 0$
d'où $u_n^2 + v_n^2 - 2|u_n|\,|v_n| \geqslant 0$
Donc $|u_n v_n| \leqslant \frac{u_n^2+v_n^2}{2}$ et on en déduit aisément que la série de terme général $n^2|u_n v_n|$ est convergente.
3. ⋆ E est une partie non vide de l'espace vectoriel $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ des suites réelles.
⋆ Soit u et v deux suites de E et λ un réel. On a :
$$n^2(u_n+\lambda v_n)^2 = n^2u_n^2 + \lambda^2 n^2 v_n^2 + 2\lambda n^2 u_n v_n$$
On termine avec la question précédente.
Conclusion : E est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel.

96

1. Soit n un entier naturel fixé.
$$2R_n - \frac{(-1)^{n+1}}{2n+3} = R_n + \left(R_n - \frac{(-1)^{n+1}}{2n+3}\right) = \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{2k+1} + \sum_{p=n+2}^{+\infty} \frac{(-1)^p}{2p+1}$$
$$\underset{(k=p-1)}{=} \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{2k+1} + \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{2k+3} = \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{2k+1} - \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{2k+3}$$
$$= \sum_{k=n+1}^{+\infty} (-1)^k \left(\frac{1}{2k+1} - \frac{1}{2k+3}\right)$$
2. Posons $\forall k \in \mathbb{N}, \quad u_k = \frac{1}{2k+1} - \frac{1}{2k+3} = \frac{2}{(2k+1)(2k+3)}$
Alors la suite $(u_k)_{k\in\mathbb{N}}$ est positive, décroissante et de limite nulle en $+\infty$. D'après le **critère spécial des séries alternées**, on peut majorer le reste d'ordre n de la série $\sum(-1)^k u_k$:
$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \left|\sum_{k=n+1}^{+\infty} (-1)^k u_k\right| \leqslant u_{n+1}$$
ce qui revient à dire que
$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \left|\sum_{k=n+1}^{+\infty} (-1)^k \left(\frac{1}{2k+1} - \frac{1}{2k+3}\right)\right| \leqslant \frac{2}{(2n+3)(2n+5)}$$
3. Il est clair que
$$\frac{2}{(2n+3)(2n+5)} \underset{(n\to+\infty)}{=} o\left(\frac{1}{2n+3}\right)$$

On déduit de 2. que

$$\sum_{k=n+1}^{+\infty}(-1)^k\left(\frac{1}{2k+1}-\frac{1}{2k+3}\right)\underset{(n\to+\infty)}{=}o\left(\frac{1}{2n+3}\right)$$

On obtient alors d'après 1. :

$$\begin{aligned}2R_n &= \frac{(-1)^{n+1}}{2n+3}+\sum_{k=n+1}^{+\infty}(-1)^k\left(\frac{1}{2k+1}-\frac{1}{2k+3}\right)\\ &\underset{(n\to+\infty)}{=}\frac{(-1)^{n+1}}{2n+3}+o\left(\frac{1}{2n+3}\right)\\ &\underset{(n\to+\infty)}{\sim}\frac{(-1)^{n+1}}{2n+3}\end{aligned}$$

Finalement $R_n \underset{(n\to+\infty)}{\sim} \frac{1}{2}\frac{(-1)^{n+1}}{2n+3}$

Puis $\boxed{R_n \underset{(n\to+\infty)}{\sim} \frac{(-1)^{n+1}}{4n}}$

Diagonalisation de matrices

1 Énoncés

124 *Final 2019* .

Soit k un nombre réel fixé tel que $k \neq -1$. On pose

$$A = \begin{pmatrix} k & 0 \\ (k+1)^2 & -1 \end{pmatrix} \in \mathfrak{M}_2(\mathbb{R})$$

1. Donner le polynôme caractéristique $\chi_A(X)$ de la matrice A.
   Justifier que A est diagonalisable.
2. Déterminer une base de chaque sous-espace propre de A.
3. Donner une matrice diagonale $D \in \mathfrak{M}_2(\mathbb{R})$ et une matrice inversible $P \in GL_2(\mathbb{R})$ telles que $A = P\,D\,P^{-1}$.
4. En déduire les quatre coefficients de la matrice A^n pour $n \in \mathbb{N}$.

125 *Final 2018* .

Soient a, b, c trois réels **tous non nuls**. On considère la matrice M carrée d'ordre 3 suivante :

$$M = \begin{pmatrix} 1 & a/b & a/c \\ b/a & 1 & b/c \\ c/a & c/b & 1 \end{pmatrix}$$

1. (a) Calculer M^2 et donner le nombre réel k tel que $M^2 = k\,M$.
   (b) En déduire un polynôme annulateur de M.
   Quelles sont les éventuelles valeurs propres de M ?
2. Déterminer le rang de M. En déduire une valeur propre de M.
3. On admet que M a deux valeurs propres distinctes.
   (a) Déterminer une base de chaque sous-espace propre de M.
   (b) La matrice M est-elle diagonalisable ?
4. On pose :

$$P = \begin{pmatrix} a & a & a \\ b & -b & 0 \\ c & 0 & -c \end{pmatrix} \qquad D = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad Q = \begin{pmatrix} 1/a & 1/b & 1/c \\ 1/a & -2/b & 1/c \\ 1/a & 1/b & -2/c \end{pmatrix}$$

   (a) Calculer PQ. En déduire que P est inversible et donner P^{-1}
   (b) Diagonaliser la matrice M en l'exprimant en fonction de P, D et Q.

126 *Médian 2014.* Soient a, b et c trois nombres réels.
On note I_3, J et A les matrices suivantes :

$$I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad J = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad A = \begin{pmatrix} a & b & c \\ c & a & b \\ b & c & a \end{pmatrix}$$

1. Exprimer A comme combinaison linéaire des matrices I_3, J et J^2.
2. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $z^3 = 1$. On notera j la solution complexe dont la partie imaginaire est strictement positive.
3. Déterminer les valeurs propres de J. Justifier que la matrice J est diagonalisable dans $\mathfrak{M}_3(\mathbb{C})$.
4. On note P la matrice de passage de la base canonique de $\mathfrak{M}_{3,1}(\mathbb{C})$ vers une base de vecteurs propres de J.
   (a) Sans calculer le polynôme caractéristique de A, donner la décomposition de A en fonction de la matrice P et d'une matrice diagonale Δ que l'on explicitera.
   (b) En déduire les valeurs propres de A en fonction de j et des réels a, b et c.
5. (a) Montrer que toutes les valeurs propres de A sont réelles si, et seulement si, $b = c$.
   (b) Donner une condition nécessaire et suffisante portant sur a, b et c pour que A soit diagonalisable dans $\mathfrak{M}_3(\mathbb{R})$.

2 Corrigés

124 Soient $k \in \mathbb{R}\setminus\{-1\}$ et $A = \begin{pmatrix} k & 0 \\ (k+1)^2 & -1 \end{pmatrix} \in \mathfrak{M}_2(\mathbb{R})$

1. $\chi_A(X) = \det(A - X I_2) = \begin{vmatrix} k-X & 0 \\ (k+1)^2 & -1-X \end{vmatrix} = (k-X)(-1-X)$
   $\chi_A(X)$ admet deux racines distinctes : k et -1.
   La matrice A admet donc pour valeurs propres -1 et k. Comme A est d'ordre 2 avec **2 valeurs propres distinctes**, A est diagonalisable.

2. On pose $U = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ un élément de $\mathfrak{M}_{2,1}(\mathbb{R})$

   - $U \in E_{-1}(A) \Longleftrightarrow AU = -U \Longleftrightarrow \begin{cases} kx &= -x \\ (k+1)^2 x - y &= -y \end{cases}$

     $\Longleftrightarrow \begin{cases} (k+1)x = 0 \\ (k+1)^2 x = 0 \end{cases} \Longleftrightarrow x = 0 \quad$ car $k+1 \neq 0$

     On choisit $U_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$. Alors $\boxed{E_{-1}(A) = \mathrm{Vect}(U_1) \text{ est de dimension } 1}$.

   - $U \in E_k(A) \Longleftrightarrow AU = kU \Longleftrightarrow \begin{cases} kx &= kx \\ (k+1)^2 x - y &= ky \end{cases}$

     $\Longleftrightarrow (k+1)^2 x = (k+1)y \Longleftrightarrow y = (k+1)x \quad$ car $k+1 \neq 0$

     On choisit $U_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ k+1 \end{pmatrix}$. Alors $\boxed{E_k(A) = \mathrm{Vect}(U_2) \text{ est de dimension } 1}$.

3. On désigne par P la matrice de passage de la base canonique de $\mathfrak{M}_{2,1}(\mathbb{R})$ vers la base de vecteurs propres (U_1, U_2). Alors $P = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & k+1 \end{pmatrix}$

   Donc, en posant $D = \mathrm{diag}(-1, k)$, on obtient $\boxed{A = PDP^{-1}}$

4. Soit $n \in \mathbb{N}$. $\quad A^n = P D^n P^{-1}$ par une récurrence immédiate.

   Avec $D^n = \mathrm{diag}((-1)^n, k^n)$ et $P^{-1} = \dfrac{1}{\det(P)} \cdot {}^t(\mathrm{com}\, P)$

   où $\det(P) = -1$, $\quad \mathrm{com}\,(P) = \begin{pmatrix} k+1 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$. Donc $P^{-1} = \begin{pmatrix} -(k+1) & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

   De plus, $PD^n = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & k+1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} (-1)^n & 0 \\ 0 & k^n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & k^n \\ (-1)^n & (k+1)k^n \end{pmatrix}$

   Enfin $A^n = (PD^n)P^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & k^n \\ (-1)^n & (k+1)k^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -(k+1) & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

   $$A^n = \begin{pmatrix} k^n & 0 \\ (k+1)(k^n - (-1)^n) & (-1)^n \end{pmatrix}$$

125

1. (a) $M^2 = M \cdot M = \begin{pmatrix} 1 & a/b & a/c \\ b/a & 1 & b/c \\ c/a & c/b & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & a/b & a/c \\ b/a & 1 & b/c \\ c/a & c/b & 1 \end{pmatrix}$

   $= \begin{pmatrix} \boxed{3} & 3a/b & 3a/c \\ 3b/a & 3 & 3b/c \\ 3c/a & 3c/b & 3 \end{pmatrix} = 3M$

   Donc $M^2 = kM$ avec $\boxed{\text{k=3}}$.

   (b) Nous avons $M^2 - 3M = \mathbb{O}_3$.
   Donc le polynôme $X^2 - 3X = X(X-3)$ est annulateur de M.
   Si λ est une valeur propre de M alors λ est une racine de $X(X-3)$.
   Ainsi $\boxed{\text{les seules valeurs propres possibles pour } M \text{ sont 0 et 3}}$.

2. On constate que les deux dernières colonnes de M sont proportionnelles à la première colonne qui n'est pas nulle.
   En effet, la deuxième colonne est égale à a/b multiplié par la première colonne. Et la troisième colonne est égale à a/c multiplié par la première colonne.
   Par conséquent $\boxed{M \text{ est de rang } 1}$.

   Comme M n'est pas inversible, $\boxed{\text{zéro est une valeur propre de } M}$.

   On peut même préciser la dimension du sous-espace propre associé, à savoir la dimension de $E_0(M) = \mathrm{Ker}(M)$. En effet, selon le théorème du rang en version matricielle

   $$\dim(\mathrm{Ker} M) + \mathrm{rg}(M) = \mathrm{ordre}(M) \quad \text{d'où} \quad \dim(\mathrm{Ker} M) = 3 - 1 = 2$$

3. La matrice M admet pour valeurs propres 3 et 0.

   (a) On pose $U = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ un élément de $\mathfrak{M}_{3,1}(\mathbb{R})$

   - $U \in E_3(M) \Longleftrightarrow MU = 3U \Longleftrightarrow \begin{cases} x + a/b \cdot y + a/c \cdot z &= 3x \\ b/a \cdot x + y + b/c \cdot z &= 3y \\ c/a \cdot x + c/b \cdot y + z &= 3z \end{cases}$

     $\Longleftrightarrow \begin{cases} -2x + a/b \cdot y + a/c \cdot z = 0 \\ b/a \cdot x - 2y + b/c \cdot z = 0 \\ c/a \cdot x + c/b \cdot y - 2z = 0 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} -2bcx + acy + abz = 0 \\ bcx - 2acy + abz = 0 \\ bcx + acy - 2abz = 0 \end{cases}$

     $\Longleftrightarrow \begin{cases} -2bcx + acy + abz = 0 & \\ 3bcx - 3acy = 0 & L_2 \leftarrow L_2 - L_1 \\ 0 = 0 & L_3 \leftarrow L_3 + L_2 + L_1 \end{cases}$

$$\iff \begin{cases} -2bc\,x+ac\,y+ab\,z=0 \\ b\,x=a\,y\end{cases} \iff \exists t\in\mathbb{R}\,;\begin{cases} ab\,z=2bc\,x-ac\,y\\ y=b\,t \\ x=a\,t\end{cases}$$

$$\iff \exists t\in\mathbb{R}\,;\begin{cases}x=a\,t\\y=b\,t\\z=2c/a\cdot x - c/b\,y\end{cases} \iff \exists t\in\mathbb{R}\,;\begin{cases}x=a\,t\\y=b\,t\\z=c\,t\end{cases}$$

On choisit $U_1=\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}$. Alors $\boxed{E_3(M)=\mathrm{Vect}(U_1)\text{ est de dimension }1}$.

- $U\in E_0(M) \iff MU=\mathbb{O}_{3,1} \iff \begin{cases} x+a/b\cdot y+a/c\cdot z &= 0\\ b/a\cdot x+y+b/c\cdot z &= 0\\ c/a\cdot x+c/b\cdot y+z &= 0\end{cases}$

$$\iff \begin{cases} bc\,x+ac\,y+ab\,z=0\\ bc\,x+ac\,y+ab\,z=0\\ bc\,x+ac\,y+ab\,z=0\end{cases} \iff \frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=0$$

On reconnaît une équation de plan vectoriel.
Donc $\boxed{E_0(M)\text{ est de dimension }2}$ Pour obtenir une base de $E_0(M)$, il suffit de choisir deux vecteurs de $E_0(M)$ qui ne sont pas colinéaires. Par exemple, en prenant $U_2=\begin{pmatrix}a\\-b\\0\end{pmatrix}$ et $U_3=\begin{pmatrix}a\\0\\-c\end{pmatrix}$, on voit que U_2 et U_3 forment une famille libre.
D'où $E_0(M)=\mathrm{Vect}(U_2,U_3)$.

(b) La somme des dimensions des sous-espaces propres de M est égale à 3 qui est aussi l'ordre de M. La matrice M est donc diagonalisable.

4. (a) $PQ=\begin{pmatrix}a&a&a\\b&-b&0\\c&0&-c\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1/a&1/b&1/c\\1/a&-2/b&1/c\\1/a&1/b&-2/c\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3&0&0\\0&3&0\\0&0&3\end{pmatrix}=3I_3$

D'où $P\left(\frac{1}{3}Q\right)=I_3$. Donc P est inversible et $\boxed{P^{-1}=\frac{1}{3}Q}$

(b) On remarque que P est la matrice de passage de la base canonique de $\mathfrak{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ vers la base de vecteurs propres (U_1,U_2,U_3). Donc, en posant $D=\mathrm{diag}(3,0,0)$, on obtient

$$\boxed{M=PDP^{-1}=\frac{1}{3}PDQ}$$

1. $J^2=\begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&1\\1&0&0\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&1\\1&0&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&0&1\\1&0&0\\0&1&0\end{pmatrix}$.

D'où $A=\begin{pmatrix}a&b&c\\c&a&b\\b&c&a\end{pmatrix}=a\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}+b\begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&1\\1&0&0\end{pmatrix}+c\begin{pmatrix}0&0&1\\1&0&0\\0&1&0\end{pmatrix}$.

Donc $\boxed{A=a\,I_3+b\,J+c\,J^2}$

2. Les solutions de l'équation $z^3=1$ sont les racines cubiques de l'unité, à savoir $\omega_k=\mathrm{e}^{i\frac{2k\pi}{3}}$ où $k\in[\![0,2]\!]$

$$\text{Donc } z^3=1 \iff z=1 \text{ ou } z=\mathrm{e}^{i\frac{2\pi}{3}} \text{ ou } z=\mathrm{e}^{i\frac{4\pi}{3}}$$
$$\iff z=1 \text{ ou } z=-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2} \text{ ou } z=-\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}$$

j étant la solution complexe dont la partie imaginaire est strictement positive,

on a $\quad j=-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}=\mathrm{e}^{i\frac{2\pi}{3}}$ et $j^2=\mathrm{e}^{i\frac{4\pi}{3}}=-\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}=\overline{j}$.

On sait que la somme des racines n-ièmes de l'unité est toujours égale à 0 (pour tout entier $n\geqslant 2$). Donc $1+j+j^2=0$.

3. On calcule le polynôme caractéristique de la matrice J par la règle de Sarrus :

$$\chi_J(X)=\det(J-X\,I_3)=\begin{vmatrix}-X&1&0\\0&-X&1\\1&0&-X\end{vmatrix}=(-X)^3+0+1-0-0-0=1-X^3$$

Les valeurs propres de J sont les racines (complexes) du polynôme caractéristique $\chi_J(X)$, c'est-à-dire les solutions de l'équation $z^3=1$.
D'après la question précédente, les valeurs propres de J sont 1, j et j^2.

J est une matrice carrée d'ordre 3 qui admet 3 valeurs propres deux à deux distinctes. Donc la matrice J est diagonalisable dans $\mathfrak{M}_3(\mathbb{C})$.

4. (a) Comme J est diagonalisable dans $\mathfrak{M}_3(\mathbb{C})$, elle est semblable à une matrice diagonale dont les coefficients diagonaux sont les valeurs propres de J. Autrement dit, il existe une matrice inversible

$P\in GL_3(\mathbb{C})$ telle que $J=PDP^{-1}$ avec $D=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&j&0\\0&0&j^2\end{pmatrix}$.

D'où $J^2=(PDP^{-1})(PDP^{-1})=PD(P^{-1}P)DP^{-1}=PD^2P^{-1}$

avec $D^2=\begin{pmatrix}1^2&0&0\\0&j^2&0\\0&0&j^4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&j^2&0\\0&0&j\end{pmatrix}$

Or on rappelle que $A = aI_3 + bJ + cJ^2$.

$$\text{Par conséquent} \quad A = aPI_3P^{-1} + bPDP^{-1} + cPD^2P^{-1}$$
$$= P(aI_3)P^{-1} + P(bD)P^{-1} + P(cD^2)P^{-1}$$
$$= P\big((aI_3)P^{-1} + (bD)P^{-1} + (cD^2)P^{-1}\big)$$
$$= P\big(\underbrace{aI_3 + bD + cD^2}_{\Delta}\big)P^{-1}$$

On pose $\Delta = aI_3 + bD + cD^2 = \begin{pmatrix} a+b+c & 0 & 0 \\ 0 & a+bj+cj^2 & 0 \\ 0 & 0 & a+bj^2+cj \end{pmatrix}$.

Alors $A = P\Delta P^{-1}$.

(b) Les matrices A et Δ étant semblables, elles admettent le même polynôme caractéristique et les mêmes valeurs propres.
Les valeurs propres de la matrice A sont donc

$$\boxed{a+b+c \quad , \quad a+bj+cj^2 \quad \text{et} \quad a+bj^2+cj}$$

5. (a) $a+b+c$ est déjà un nombre réel.

Les valeurs propres de A sont réelles ssi $a+bj+cj^2$ et $a+bj^2+cj$ sont réels
ssi les parties imaginaires des complexes $bj+cj^2$ et bj^2+cj sont nulles
ssi $b\frac{\sqrt{3}}{2} + c\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = b\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) + c\frac{\sqrt{3}}{2} = 0$
ssi $b - c = 0$

(b) Démontrons que A soit diagonalisable dans $\mathfrak{M}_3(\mathbb{R})$ si, et seulement si, $\boxed{b = c}$

- «⇐» On suppose que $b = c$.
  Alors la matrice $A = \begin{pmatrix} a & b & b \\ b & a & b \\ b & b & a \end{pmatrix}$ est **symétrique, à coefficients réels**. Elle est donc diagonalisable dans $\mathfrak{M}_3(\mathbb{R})$.
- «⇒» Réciproquement, on suppose que A est diagonalisable dans $\mathfrak{M}_3(\mathbb{R})$.
  Alors son polynôme caractéristique $\chi_A(X) \in \mathbb{R}_3[X]$ est scindé (produit de polynômes de degré 1).
  Or comme A est à coefficients réels, son polynôme caractéristique est le même dans $\mathfrak{M}_3(\mathbb{R})$ que dans $\mathfrak{M}_3(\mathbb{C})$.

Donc les racines de $\chi_A(X) \in \mathbb{C}_3[X]$ sont toutes réelles.
Ainsi les valeurs propres de A sont toutes réelles.
Finalement, d'après la question précédente 5.(a),

$$b = c$$

Produit scalaire

1 Énoncés

146 *Final 2015* .

On munit $\mathbb{R}^3$ de sa structure euclidienne canonique. Soit $\mathscr{B}_0 = (e_1, e_2, e_3)$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$.

On désigne par F le sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$ engendré par les vecteurs $u = (1,1,1)$ et $v = (1,2,3)$.

1. Construire une base orthonormale $(\varepsilon_1, \varepsilon_2)$ de F.
   Compléter cette base en une base orthonormale directe $\mathscr{B}'$ de $\mathbb{R}^3$.
2. Soit p la projection orthogonale sur F.
   (a) Déterminer la matrice A de p dans la base canonique $\mathscr{B}_0$.
   (b) Calculer la distance du vecteur e_1 au sous-espace F.

147 Soit $E = \mathbb{R}_2[X]$. On définit sur $E \times E$ l'application

$$\varphi : (P,Q) \longmapsto P(-1)Q(-1) + P(0)Q(0) + P(1)Q(1)$$

1. Vérifier que (E, φ) est un espace euclidien.
2. On pose $F = \mathrm{Vect}(X^2+1)$. Déterminer $F^{\perp}$.
3. Par le procédé de Gram-Schmidt, obtenir une base orthonormée de E.
4. Déterminer $G^{\perp}$ lorsque $G = \mathbb{R}_1[X]$ puis la distance de X^2 à G.

148 *Final 2017* .

Dans tout l'exercice, I désigne l'intervalle fermé $[0, +\infty[$.
On note E le $\mathbb{R}$−espace vectoriel constitué des fonctions $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ continues sur I telles que f^2 est intégrable sur I, c'est-à-dire telles que l'intégrale généralisée $\displaystyle\int_0^{+\infty} f(t)^2\,dt$ converge.

Partie A : un produit scalaire sur E

1. Prouver que pour tous réels a et b, $|ab| \leqslant \dfrac{1}{2}\left(a^2+b^2\right)$.
2. Montrer que le produit de deux éléments de E est une fonction intégrable sur I.
3. Soit φ l'application qui au couple $(f,g) \in E^2$ associe le réel :
   $\varphi(f,g) = \displaystyle\int_0^{+\infty} f(t)g(t)\,\mathrm{d}t$.
   Montrer que φ est un produit scalaire sur E que l'on notera par la suite $\langle\ |\ \rangle$.

Partie B : inégalité de Cauchy Schwarz

Soit α un nombre réel strictement positif.

1. Justifier la convergence et donner la valeur de l'intégrale généralisée $\displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-2\alpha t}\,\mathrm{d}t$.
2. Démontrer que pour toute fonction $f \in E$,

$$\int_0^{+\infty} f(t)\mathrm{e}^{-\alpha t}\,\mathrm{d}t \leqslant \frac{1}{\sqrt{2\alpha}}\left(\int_0^{+\infty} f(t)^2\,\mathrm{d}t\right)^{1/2}$$

Partie C : orthonormalisation

On considère les fonctions $f_1 : t \longmapsto \mathrm{e}^{-t}$ et $f_2 : t \longmapsto \mathrm{e}^{-2t}$

1. Justifier que f_1 et f_2 sont des éléments de E.
2. Construire une base orthonormale $\mathscr{B} = (\varepsilon_1, \varepsilon_2)$ du sous-espace vectoriel $F = \mathrm{Vect}(f_1, f_2)$ de E.
3. On admet que $\forall k \in \mathbb{N}^*$, $\displaystyle\int_0^{+\infty} t\,\mathrm{e}^{-kt}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{k^2}$
   Calculer les deux réels a et b minimisant l'intégrale

$$\int_0^{+\infty} \left(t\mathrm{e}^{-t} - a\,\mathrm{e}^{-t} - b\,\mathrm{e}^{-2t}\right)^2\,\mathrm{d}t$$

149

1. Déterminer la matrice $A \in \mathfrak{M}_3(\mathbb{R})$, dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$, de la projection orthogonale sur le plan $\mathscr{P}$ d'équation $x - y + 2z = 0$.
2. Diagonaliser cette matrice A.

2 Corrigés

146 Soit $\mathscr{B}_0=(e_1,e_2,e_3)$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$.
On pose $u=(1,1,1)$, $v=(1,2,3)$ et $F=\text{Vect}(u,v)$.

1. • On applique le procédé d'orthonormalisation de Gram-Schmidt.
   On pose $g_1=u=(1,1,1)$ et $g_2=v-\dfrac{\langle v\mid g_1\rangle}{\|g_1\|^2}g_1=v-\dfrac{6}{3}u=v-2u=(-1,0,1)$.
   Alors (g_1,g_2) est une base orthogonale de F.
   En prenant $\varepsilon_1=\dfrac{1}{\|g_1\|}g_1=\dfrac{1}{\sqrt3}(1,1,1)$ et $\varepsilon_2=\dfrac{1}{\|g_2\|}g_2=\dfrac{1}{\sqrt2}(-1,0,1)$,
   on obtient $(\varepsilon_1,\varepsilon_2)$ comme base orthonormale du plan vectoriel F.

   • Posons $\varepsilon_3=\varepsilon_1\wedge\varepsilon_2=\dfrac{1}{\sqrt6}g_1\wedge g_2$. Alors ε_3 a pour coordonnées dans la base $\mathscr{B}_0$,
   $$\frac{1}{\sqrt6}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}\wedge\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}=\frac{1}{\sqrt6}\begin{pmatrix}1\\-2\\1\end{pmatrix}$$
   Donc $\varepsilon_3=\dfrac{1}{\sqrt6}(1,-2,1)$ et la famille $\mathscr{B}'=(\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3)$ est une base orthonormale directe de $\mathbb{R}^3$.

2. Soit p la projection orthogonale sur F.
   (a) • **1ère méthode** utilisant une base orthonormale de F.
   On sait d'après le cours (thm8 - ch4) que
   $$\forall x\in\mathbb{R}^3,\ p(x)=\langle x\mid\varepsilon_1\rangle\,\varepsilon_1+\langle x\mid\varepsilon_2\rangle\,\varepsilon_2=\frac13\langle x\mid g_1\rangle\,g_1+\frac12\langle x\mid g_2\rangle\,g_2$$
   $$\text{D'où}\begin{cases}p(e_1)=\frac13g_1-\frac12g_2=\left(\frac13,\frac13,\frac13\right)-\left(-\frac12,0,\frac12\right)=\left(\frac56,\frac13,-\frac16\right)\\ p(e_2)=\frac13g_1=\left(\frac13,\frac13,\frac13\right)\\ p(e_3)=\frac13g_1+\frac12g_2=\left(\frac13,\frac13,\frac13\right)+\left(-\frac12,0,\frac12\right)=\left(-\frac16,\frac13,\frac56\right)\end{cases}$$
   $$\text{Ainsi } A=\text{Mat}_{\mathscr{B}_0}(p)=\begin{pmatrix}5/6&1/3&-1/6\\1/3&1/3&1/3\\-1/6&1/3&5/6\end{pmatrix}=\frac16\begin{pmatrix}5&2&-1\\2&2&2\\-1&2&5\end{pmatrix}$$
   • **2ème méthode** utilisant la droite vectorielle $F^\perp=\text{Vect}(\varepsilon_3)$.

On désigne par $p_{F^\perp}$ la projection orthogonale sur $F^\perp$.
On sait que $\mathbb{R}^3=F\oplus F^\perp$ d'où $\forall x\in\mathbb{R}^3$, $x=p(x)+p_{F^\perp}(x)$.
Donc $p=\text{id}_{\mathbb{R}^3}-p_{F^\perp}$ puis en passant aux matrices dans la base canonique $\mathscr{B}_0$, $A=I_3-\text{Mat}_{\mathscr{B}_0}(p_{F^\perp})$
Or $\forall x\in\mathbb{R}^3$, $p_{F^\perp}(x)=\langle x\mid\varepsilon_3\rangle\,\varepsilon_3=\dfrac16\langle x\mid g_3\rangle\,g_3$ où $g_3=(1,-2,1)$.
$$\text{Donc}\begin{cases}p_{F^\perp}(e_1)=\frac16g_3\\ p_{F^\perp}(e_2)=-\frac13g_3\\ p_{F^\perp}(e_3)=\frac16g_3\end{cases}$$
$$\text{Ainsi } A=I_3-\frac16\begin{pmatrix}1&-2&1\\-2&4&-2\\1&-2&1\end{pmatrix}=\frac16\begin{pmatrix}5&2&-1\\2&2&2\\-1&2&5\end{pmatrix}$$

• **3ème méthode** utilisant les formules de changement de base.
Posons $A'=\text{Mat}_{\mathscr{B}'}(p)$. Puisque $p(\varepsilon_1)=\varepsilon_1$, $p(\varepsilon_2)=\varepsilon_2$ et $p(\varepsilon_3)=0_{\mathbb{R}^3}$,
$$A'=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&0\end{pmatrix}$$
On sait que $A'=P^{-1}AP$ où P désigne la matrice de passage de la base canonique $\mathscr{B}_0$ vers la base $\mathscr{B}'$.
$$P=\begin{pmatrix}1/\sqrt3&-1/\sqrt2&1/\sqrt6\\1/\sqrt3&0&-2/\sqrt6\\1/\sqrt3&1/\sqrt2&1/\sqrt6\end{pmatrix}=\frac{1}{\sqrt6}\begin{pmatrix}\sqrt2&-\sqrt3&1\\\sqrt2&0&-2\\\sqrt2&\sqrt3&1\end{pmatrix}$$
Comme $\mathscr{B}_0$ et $\mathscr{B}'$ sont des bases orthonormales de $\mathbb{R}^3$, la matrice P est orthogonale : $P\in\mathscr{O}_3(\mathbb{R})$ et $P^{-1}={}^tP$.
$$\begin{aligned}\text{Ainsi } A'=P^{-1}AP\Longrightarrow A&=PA'P^{-1}\\&=(PA')\,{}^tP\\&=\frac{1}{\sqrt6}\begin{pmatrix}\sqrt2&-\sqrt3&0\\\sqrt2&0&0\\\sqrt2&\sqrt3&0\end{pmatrix}{}^tP\\&=\frac16\begin{pmatrix}5&2&-1\\2&2&2\\-1&2&5\end{pmatrix}\end{aligned}$$

Cette méthode n'est envisageable qui si l'on dispose d'un logiciel de calcul matriciel.

(b) La distance du vecteur e_1 au sous-espace F est :

$$d(e_1,F) = \|e_1 - p(e_1)\| = \left\| \left(\frac{1}{6}, -\frac{1}{3}, \frac{1}{6} \right) \right\| = \frac{1}{6} \|(1,-2,1)\| = \frac{\sqrt{6}}{6}$$

147

1. Montrons que φ est un produit scalaire sur E.
Soient P, Q et R trois polynômes de E. Soit $\lambda \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned}
&\varphi(\lambda P + R, Q) \\
&= (\lambda P + R)(-1)Q(-1) + (\lambda P + R)(0)Q(0) + (\lambda P + R)(1)Q(1) \\
&= (\lambda P(-1) + R(-1))Q(-1) + (\lambda P(0) + R(0))Q(0) + (\lambda P(1) + R(1))Q(1) \\
&= \lambda \left(P(-1)Q(-1) + P(0)Q(0) + P(1)Q(1) \right) + R(-1)Q(-1) + R(0)Q(0) + R(1)Q(1) \\
&= \lambda \varphi(P,Q) + \varphi(R,Q)
\end{aligned}$$

$\varphi(Q,P) = \varphi(P,Q)$. Donc l'application φ est symétrique et bilinéaire.

$\varphi(P,P) = P(-1)^2 + P(0)^2 + P(1)^2$ est un réel positif en tant que somme de trois réels positifs. φ est donc positive.

Si $\varphi(P,P) = 0$ alors $P(-1) = P(0) = P(1) = 0$, donc P étant un polynôme de degré au plus 2, il est nul car un polynôme de degré inférieur ou égal à 2, ayant trois racines distinctes, est nécessairement nul.
φ est donc définie positive.

Enfin E est $\mathbb{R}-$espace vectoriel de dimension finie égale à 3 et muni d'un produit scalaire φ. E est un espace euclidien.

2. Soit $P \in E$. Le plus simple ici est de poser $P = aX^2 + bX + c$ et de résoudre l'équation $P \in F^\perp \iff \varphi(P, X^2+1) = 0$.

   Or $\varphi(P, X^2+1) = P(-1)((-1)^2+1) + P(0)(0^2+1) + P(1)(1^2+1)$
   $= 2P(-1) + P(0) + 2P(1) = 2a - 2b + 2c + c + 2a + 2b + 2c = 4a + 5c$.
   Les polynômes solutions sont donc de la forme
   $aX^2 + bX - \frac{4}{5}a = bX + a\left(X^2 - \frac{4}{5}\right)$. Autrement dit, $F^\perp = \mathrm{Vect}\left(X, X^2 - \frac{4}{5}\right)$.
   Sans surprise, cet espace est de dimension 2 puisqu'il est le supplémentaire d'une droite vectorielle dans $\mathbb{R}_2[X]$ qui est de dimension 3.

3. On part comme toujours de la base canonique $\mathscr{B}_0 = (\mathbb{1}, X, X^2)$. Pour plus de simplicité, on notera $\langle P \mid Q \rangle = \varphi(P,Q)$ et la norme associée à φ avec les doubles barres usuelles.
   Commençons par calculer $\| \mathbb{1} \| = \sqrt{1+1+1} = \sqrt{3}$;
   puis $X - \left\langle X \mid \frac{1}{\sqrt{3}} \right\rangle \frac{1}{\sqrt{3}} = X - \frac{1}{3} \langle X \mid \mathbb{1} \rangle \mathbb{1} = X - \frac{1}{3}(-1+0+1) = X$ (les polynômes 1 et X étaient donc déjà orthogonaux) ;
   on enchaîne avec $\| X \| = \sqrt{1+0+1} = \sqrt{2}$;
   ensuite on calcule $X^2 - \frac{1}{2}\langle X^2 \mid X \rangle X - \frac{1}{3}\langle X^2 \mid \mathbb{1} \rangle \mathbb{1} = X^2 - \frac{1}{2}(-1+0+1)X - \frac{1}{3}(1+0+1) = X^2 - \frac{2}{3}$;
   enfin, on normalise ce dernier polynôme : $\left\| X^2 - \frac{2}{3} \right\| = \sqrt{\frac{1}{9} + \frac{4}{9} + \frac{1}{9}} = \sqrt{\frac{2}{3}}$.
   En conclusion, la famille $\left(\frac{1}{\sqrt{3}}; \frac{1}{\sqrt{2}}X; \sqrt{\frac{3}{2}}\left(X^2 - \frac{2}{3}\right) \right)$ est une base orthonormale de E pour le produit scalaire φ.

4. G est de dimension 2, engendré par $\mathbb{1}$ et X. On a déjà fait le calcul pour l'orthogonal de G à la question précédente :

$$G = \mathbb{R}_1[X] = \mathrm{Vect}(\mathbb{1}, X) = \mathrm{Vect}\left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{2}}X \right)$$

   Donc $G^\perp$ est la droite engendrée par $X^2 - \frac{2}{3}$. Le projeté orthogonal de X^2 sur G a aussi été calculé à la question précédente :

$$p_G(X^2) = \frac{1}{2}\langle X^2 \mid X \rangle X + \frac{1}{3}\langle X^2 \mid \mathbb{1} \rangle \mathbb{1} = \frac{2}{3}$$

   La distance recherchée est donc

$$d(X^2, G) = \|X^2 - p_G(X^2)\| = \left\| X^2 - \frac{2}{3} \right\| = \sqrt{\frac{2}{3}}$$

148 $I = [0,+\infty[$. On note E le $\mathbb{R}-$espace vectoriel constitué des fonctions $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ continues sur I telles que l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} f(t)^2\,\mathrm{d}t$ converge.

Partie A : un produit scalaire sur E

1. Soit $(a,b)\in\mathbb{R}^2$. On a $(|a|-|b|)^2 \geqslant 0$ d'où $|a|^2+|b|^2 \geqslant 2|a|\,|b|$.

   Or $|a|^2 = a^2$ et $|a|\,|b| = |ab|$. Ainsi $\boxed{|ab| \leqslant \frac{1}{2}\left(a^2+b^2\right)}$.

2. Soit $(f,g)\in E^2$. Alors f et g sont continues sur I.
   Donc la fonction fg est également continue sur I.
   D'après l'inégalité précédente, on a $\forall t\in I$, $\left|f(t)g(t)\right| \leqslant \frac{1}{2}\left(f(t)^2+g(t)^2\right)$.
   Or les fonctions f^2 et g^2 sont continues et intégrables sur I.
   Comme la fonction $t \longmapsto \frac{1}{2}\left(f(t)^2+g(t)^2\right)$ est positive, continue et intégrable sur I, la fonction produit fg est intégrable sur I.
   Ainsi $\boxed{\text{le produit de deux éléments de } E \text{ est intégrable sur } I}$

3. Soit f, g et h trois fonctions de E. Soit $\lambda\in\mathbb{R}$.
   - Existence. Le réel $\varphi(f,g)$ est bien défini car on a vu que la fonction fg était intégrable sur I.
   - Linéarité par rapport à la première variable.
     $\varphi(\lambda f+g,h) = \displaystyle\int_I (\lambda f+g)(t)h(t)\,\mathrm{d}t = \int_I (\lambda f(t)h(t)+g(t)h(t))\,\mathrm{d}t$
     $= \lambda \displaystyle\int_I f(t)h(t)\,\mathrm{d}t + \int_I g(t)h(t)\,\mathrm{d}t$ par **linéarité de l'intégrale**.

     Ainsi $\varphi(\lambda f+g,h) = \lambda\varphi(f,h)+\varphi(g,h)$
   - Symétrie. $\varphi(g,f) = \displaystyle\int_I g(t)f(t)\,\mathrm{d}t = \int_I f(t)g(t)\,\mathrm{d}t = \varphi(f,g)$.
   - Positivité. Par définition de E, la fonction f^2 est continue, positive et intégrable sur I.
     Donc par **positivité de l'intégrale**, $\displaystyle\int_I f(t)^2\,\mathrm{d}t \geqslant 0$. Ainsi $\varphi(f,f)\geqslant 0$.
   - Définie positivité. On suppose que $\varphi(f,f)=0$. Alors $\displaystyle\int_I f(t)^2\,\mathrm{d}t = 0$.
     Or la fonction $t\mapsto f(t)^2$ est *continue* et positive sur l'intervalle $I=[0,+\infty[$.
     Donc d'après le **théorème de positivité stricte**, $\forall t\in I$, $f(t)^2=0$
     Ainsi $f = 0_E$.

   Finalement $\boxed{\varphi \text{ définit bien un produit scalaire sur } E}$

Partie B : inégalité de Cauchy Schwarz

Soit α un nombre réel strictement positif.

1. Soit x un réel positif.
   $$\int_0^x \mathrm{e}^{-2\alpha t}\,\mathrm{d}t = \left[-\frac{1}{2\alpha}\mathrm{e}^{-2\alpha t}\right]_{t=0}^{t=x} = -\frac{1}{2\alpha}\left(\mathrm{e}^{-2\alpha x}-1\right)$$
   Or $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \mathrm{e}^{-2\alpha x} = 0$ car $-2\alpha<0$.
   Donc $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\int_0^x \mathrm{e}^{-2\alpha t}\,\mathrm{d}t = -\frac{1}{2\alpha}(0-1) = \frac{1}{2\alpha}$
   Ainsi l'intégrale généralisée $\displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-2\alpha t}\,\mathrm{d}t$ est convergente et
   $\boxed{\displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-2\alpha t}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2\alpha}}$.

2. Soit f une fonction quelconque de E. On considère la fonction $\boxed{g : t\mapsto \mathrm{e}^{-\alpha t}}$.
   Alors la fonction g est continue sur I et d'après la question précédente, l'intégrale généralisée $\displaystyle\int_I g(t)^2\,\mathrm{d}t$ est convergente. Donc $g\in E$.

   D'après l'**inégalité de Cauchy-Schwarz**, $|\langle f \mid g\rangle| \leqslant \|f\|\times\|g\|$

   Avec $\|f\| = \sqrt{\langle f\mid f\rangle} = \left(\displaystyle\int_0^{+\infty} f(t)^2\,\mathrm{d}t\right)^{1/2}$

   et $\|g\| = \left(\displaystyle\int_0^{+\infty} g(t)^2\,\mathrm{d}t\right)^{1/2} = \left(\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-2\alpha t}\,\mathrm{d}t\right)^{1/2} = \sqrt{\frac{1}{2\alpha}}$

   $$\text{Ainsi}\quad \int_0^{+\infty} f(t)\mathrm{e}^{-\alpha t}\,\mathrm{d}t \leqslant \left|\int_0^{+\infty} f(t)\mathrm{e}^{-\alpha t}\,\mathrm{d}t\right| \leqslant \frac{1}{\sqrt{2\alpha}}\left(\int_0^{+\infty} f(t)^2\,\mathrm{d}t\right)^{1/2}$$

Partie C : orthonormalisation

On considère les fonctions $f_1 : t\longmapsto \mathrm{e}^{-t}$ et $f_2 : t\longmapsto \mathrm{e}^{-2t}$

1. Les fonctions f_1 et f_2 sont continues sur I. De plus, on a vu à la première question de la partie B, que l'intégrale généralisée
   $\displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-2\alpha t}\,\mathrm{d}t = \int_0^{+\infty} \left(\mathrm{e}^{-\alpha t}\right)^2\,\mathrm{d}t$ était convergente pour tout réel $\alpha>0$.
   En particulier pour $\alpha=1$ et $\alpha=2$.
   Donc f_1 et f_2 sont des éléments de E.

2. La famille (f_1,f_2) est libre. Donc $F = \mathrm{Vect}(f_1,f_2)$ est un sous-espace vectoriel de dimension 2 de E.
   On applique l'algorithme d'**orthonormalisation de Gram-Schmidt**.
   On construit d'abord une *base orthogonale* (g_1,g_2) de F en posant $\boxed{g_1 = f_1}$

et

$$g_2 = f_2 - \frac{\langle f_2 \mid g_1\rangle}{\langle g_1 \mid g_1\rangle}\cdot g_1 = f_2 - \frac{\langle f_2 \mid f_1\rangle}{\langle f_1 \mid f_1\rangle}\cdot f_1$$

Or $\langle f_1 \mid f_1\rangle = \displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-2t}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2}$ et $\langle f_2 \mid f_1\rangle = \displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-3t}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{3}$

Donc $\boxed{g_2 = f_2 - \frac{2}{3} f_1}$. Il reste à normaliser ces deux vecteurs g_1 et g_2.

On sait déjà que $\|g_1\| = \sqrt{\langle g_1 \mid g_1\rangle} = \sqrt{\langle f_1 \mid f_1\rangle} = \sqrt{\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$

De plus $\|g_2\|^2 = \displaystyle\int_0^{+\infty}\left(\mathrm{e}^{-2t} - \frac{2}{3}\mathrm{e}^{-t}\right)^2 \mathrm{d}t = \int_0^{+\infty}\left(\mathrm{e}^{-4t} - \frac{4}{3}\mathrm{e}^{-3t} + \frac{4}{9}\mathrm{e}^{-4t}\right)\mathrm{d}t$

$$= \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-4t}\,\mathrm{d}t - \frac{4}{3}\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-3t}\,\mathrm{d}t + \frac{4}{9}\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-2t}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{4} - \frac{4}{9} + \frac{4}{18} = \frac{1}{36}$$

D'où $\|g_2\| = \frac{1}{6}$

On pose enfin $\varepsilon_1 = \dfrac{1}{\|g_1\|} g_1 = \sqrt{2} g_1$ et $\varepsilon_2 = \dfrac{1}{\|g_2\|} g_2 = 6 g_2$

Ainsi $\boxed{\varepsilon_1 : t \mapsto \sqrt{2}\mathrm{e}^{-t} \quad \text{et} \quad \varepsilon_2 : t \mapsto 6\mathrm{e}^{-2t} - 4\mathrm{e}^{-t}}$

3. • Montrons d'abord que $\boxed{g \in E}$. Comme g est continue sur I, on montre que g est de carré intégrable sur I.

Pour tout réel $t > 0$, $t^2 g(t)^2 = t^4 \mathrm{e}^{-2t} = \dfrac{1}{\left(\frac{\mathrm{e}^t}{t^2}\right)^2}$

Or par croissance comparée, $\displaystyle\lim_{t\to+\infty} \frac{\mathrm{e}^t}{t^2} = +\infty$ d'où $\displaystyle\lim_{t\to+\infty}\left(\frac{\mathrm{e}^t}{t^2}\right)^2 = +\infty$ puis $\displaystyle\lim_{t\to+\infty} t^2 g(t)^2 = 0$. Le critère de Riemann permet de conclure que l'intégrale généralisée $\displaystyle\int_0^{+\infty} g(t)^2\,\mathrm{d}t$ converge.

La question posée revient à minimiser $\|g-h\|^2$ lorsque h décrit le sous-espace F. On sait, d'après le théorème de projection orthogonale, que ce minimum est atteint en un unique point h de F, qui est le projeté orthogonal de g sur F.

$$\min_{(a,b)\in\mathbb{R}^2} \int_0^{+\infty}\left(t\mathrm{e}^{-t} - a\,\mathrm{e}^{-t} - b\,\mathrm{e}^{-2t}\right)^2 \mathrm{d}t = d(g,F)^2 = \|g - p_F(g)\|^2$$

On cherche donc à exprimer $h = p_F(g)$ comme combinaison linéaire de f_1 et f_2.

• Première méthode utilisant une base orthonormale $\mathscr{B} = (\varepsilon_1, \varepsilon_2)$ de F.

$p_F(g) = \langle g|\varepsilon_1\rangle\cdot\varepsilon_1 + \langle g|\varepsilon_2\rangle\cdot\varepsilon_2$

avec $\langle g|\varepsilon_1\rangle = \displaystyle\int_0^{+\infty} t\mathrm{e}^{-t}\sqrt{2}\mathrm{e}^{-t}\mathrm{d}t = \sqrt{2}\int_0^{+\infty} t\mathrm{e}^{-2t}\,\mathrm{d}t = \frac{\sqrt{2}}{4}$

et $\langle g|\varepsilon_2\rangle = \displaystyle\int_0^{+\infty} t\mathrm{e}^{-t}(6\mathrm{e}^{-2t} - 4\mathrm{e}^{-t})\mathrm{d}t = 6\int_0^{+\infty} t\mathrm{e}^{-3t}\,\mathrm{d}t - 4\int_0^{+\infty} t\mathrm{e}^{-2t}\,\mathrm{d}t$

$= \frac{6}{9} - \frac{4}{4} = \frac{2}{3} - 1 = -\frac{1}{3}$

D'où $p_F(g) = \dfrac{\sqrt{2}}{4}\varepsilon_1 - \dfrac{1}{3}\varepsilon_2 = \dfrac{\sqrt{2}}{4}(\sqrt{2}f_1) - \dfrac{1}{3}(6f_2 - 4f_1) = \dfrac{1}{2}f_1 - 2f_2 + \dfrac{4}{3}f_1$

Ainsi $\boxed{p_F(g) = \frac{11}{6} f_1 - 2 f_2}$

• Deuxième méthode utilisant une caractérisation du projeté orthogonal d'un vecteur.

Soit h un élément de F. Alors $\exists (a,b)\in\mathbb{R}^2\,;\, h = a\cdot f_1 + b\cdot f_2$.

$$h = p_F(g) \iff (g-h)\in F^\perp \iff \begin{cases}(g-h)\perp f_1\\ (g-h)\perp f_2\end{cases} \iff \begin{cases}\langle g-h \mid f_1\rangle = 0\\ \langle g-h \mid f_2\rangle = 0\end{cases}$$

$$\iff \begin{cases}\langle h \mid f_1\rangle = \langle g \mid f_1\rangle\\ \langle h \mid f_2\rangle = \langle g \mid f_2\rangle\end{cases} \iff \begin{cases} a\,\langle f_1 \mid f_1\rangle + b\,\langle f_2 \mid f_1\rangle = \langle g \mid f_1\rangle\\ a\,\langle f_1 \mid f_2\rangle + b\,\langle f_2 \mid f_2\rangle = \langle g \mid f_2\rangle\end{cases}$$

Or on a vu que $\langle f_1 \mid f_1\rangle = \frac{1}{2}$, $\langle f_2 \mid f_1\rangle = \displaystyle\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-3t}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{3}$, $\langle f_2 \mid f_2\rangle = \frac{1}{4}$

et $\langle g \mid f_1\rangle = \displaystyle\int_0^{+\infty} t\,\mathrm{e}^{-2t}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2^2} = \frac{1}{4}$, $\langle g \mid f_2\rangle = \displaystyle\int_0^{+\infty} t\,\mathrm{e}^{-3t}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{3^2} = \frac{1}{9}$

$$\text{Donc } h = p_F(g) \iff \begin{cases}\dfrac{a}{2} + \dfrac{b}{3} = \dfrac{1}{4}\\[2mm] \dfrac{a}{3} + \dfrac{b}{4} = \dfrac{1}{9}\end{cases} \iff \begin{cases}6a + 4b = 3\\ 12a + 9b = 4\end{cases}$$

$$\iff \begin{cases}6a = 3 - 4b\\ b = -2 \quad L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1\end{cases} \iff \begin{cases} a = \dfrac{11}{6}\\ b = -2\end{cases}$$

149

1. Le vecteur $\vec{n} = (1,-1,2)$ est normal au plan $\mathscr{P}$, ce qui revient à dire que la droite $\mathscr{P}^{\perp}$ est dirigée par $\vec{n}$.
Comme $\mathbb{R}^3$ est de dimension finie, nous avons : $\mathbb{R}^3 = \mathscr{P} \oplus \mathscr{P}^{\perp}$. D'où $\mathrm{id}_{\mathbb{R}^3} = p_{\mathscr{P}} + p_{\mathscr{P}^{\perp}}$
Or on sait que $\forall u \in \mathbb{R}^3$, $p_{\mathscr{P}^{\perp}}(u) = \left\langle u \mid \dfrac{\vec{n}}{\|\vec{n}\|} \right\rangle \dfrac{\vec{n}}{\|\vec{n}\|} = \dfrac{\langle u \mid \vec{n}\rangle}{\|\vec{n}\|^2}\vec{n}$
On en déduit que
$$\forall u \in \mathbb{R}^3, \boxed{p_{\mathscr{P}}(u) = u - \frac{\langle u \mid \vec{n}\rangle}{\|\vec{n}\|^2}\vec{n}}$$
Notons $\mathscr{B}_0 = (e_1, e_2, e_3)$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$. $\|\vec{n}\|^2 = 6$
$$p_{\mathscr{P}}(e_1) = e_1 - \frac{1}{6}\vec{n} = (5/6\,,\,1/6\,,\,-2/6)$$
$$p_{\mathscr{P}}(e_2) = e_2 - \frac{(-1)}{6}\vec{n} = (1/6\,,\,5/6\,,\,2/6)$$
$$p_{\mathscr{P}}(e_3) = e_3 - \frac{2}{6}\vec{n} = (-2/6\,,\,2/6\,,\,2/6)$$
Ainsi
$$A = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}_0}(p_{\mathscr{P}}) = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} 5 & 1 & -2 \\ 1 & 5 & 2 \\ -2 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

2. On choisit une base quelconque du plan $\mathscr{P}$: $(\varepsilon_1, \varepsilon_2)$ avec par exemple $\varepsilon_1 = (1,1,0)$ et $\varepsilon_2 = (0,2,1)$.
Alors la famille $(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \vec{n})$ est une base de $\mathbb{R}^3$ dans la laquelle la matrice de la projection orthogonale $p_{\mathscr{P}}$ est :
$$D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Suites de fonctions

1 Énoncés

160 *Final 2017* .

1. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on définit la fonction f_n sur $[0, +\infty[$ par $f_n(t) = \dfrac{\exp\left(-\frac{t}{n^2}\right)}{1+t^2}$
Déterminer en appliquant le théorème de convergence dominée,
$$\lim_{n\to+\infty} \int_0^{+\infty} f_n(t)\,\mathrm{d}t$$
2. On pose pour tout entier naturel n non nul, $I_n = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-x}}{1+n^4x^2}\,\mathrm{d}x$
   (a) Justifier la convergence de l'intégrale généralisée I_n.
   (b) À l'aide du changement de variable $t = n^2x$, montrer que
   $$I_n = \frac{1}{n^2}\int_0^{+\infty} f_n(t)\,\mathrm{d}t$$
   (c) En déduire la nature de la série $\sum I_n$.

161 *Final 2019.* Pour tout entier naturel non nul n, on définit la fonction u_n sur l'intervalle ouvert $I =]-1, +\infty[$ par $u_n(x) = \dfrac{x}{n(n+x)} = \dfrac{1}{n} - \dfrac{1}{n+x}$

1. Montrer que la série $\sum u_n(x)$ est convergente pour tout réel $x \in I$.
On note S la fonction définie sur I par : $\forall x \in I, S(x) = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} u_n(x)$
2. (a) Soient $x \in I$ et $n \in \mathbb{N}^*$. À l'aide d'un télescopage, simplifier la différence $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} u_k(x+1) - \sum_{k=1}^{n} u_k(x)$
   (b) En déduire que pour tout réel $x \in I$, $S(x+1) - S(x) = \dfrac{1}{1+x}$
   (c) Calculer $S(0)$ et $S(1)$.
   (d) On admet que la fonction S est continue sur I.
   Déterminer $\displaystyle\lim_{x\longrightarrow -1}(x+1)S(x)$ puis un équivalent simple de $S(x)$ lorsque x tend vers -1.
3. (a) Montrer que S est **strictement** croissante sur l'intervalle I.
   (b) Prouver, en utilisant l'égalité de 3.(b), que pour tout entier naturel $n \geqslant 1$, $S(n) = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$
   (c) En déduire la limite de S en $+\infty$.

2 Corrigés

160

1. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on définit la fonction f_n sur $[0, +\infty[$ par
$$f_n(t) = \frac{\exp\left(-\frac{t}{n^2}\right)}{1+t^2}$$

Chaque fonction f_n est continue sur $[0, +\infty[$.

– Soit $t \in \mathbb{R}^+$, t fixé. $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} -\frac{t}{n^2} = 0$ et $\displaystyle\lim_{x\to 0} \mathrm{e}^x = \mathrm{e}^0 = 1$

D'où, par composition $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \exp\left(-\frac{t}{n^2}\right) = 1$ et $\boxed{\displaystyle\lim_{n\to+\infty} f_n(t) = \frac{1}{1+t^2}}$

– La fonction $f : t \longmapsto \dfrac{1}{1+t^2}$ est continue sur $[0, +\infty[$.

– Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $t \in \mathbb{R}^+$. Alors $-\dfrac{t}{n^2} \leqslant 0 \implies \exp\left(-\dfrac{t}{n^2}\right) \leqslant 1$

Donc $\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall t \in [0, +\infty[, |f_n(t)| \leqslant \dfrac{1}{1+t^2}$

la fonction dominante $f : t \longmapsto \dfrac{1}{1+t^2}$ est positive et **intégrable** sur $[0, +\infty[$. En effet :
$$\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^x \frac{1}{1+t^2}\,\mathrm{d}t = [\arctan t]_0^x = \arctan x - \arctan(0) \underset{(x\to+\infty)}{\longrightarrow} \frac{\pi}{2}$$
Le **théorème de convergence dominée** permet de conclure que les fonctions f_n sont intégrables sur $[0, +\infty[$ et que
$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} \int_0^{+\infty} f_n(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^{+\infty} \frac{1}{1+t^2}\,\mathrm{d}t = \frac{\pi}{2}}$$

2. On pose pour tout entier naturel n non nul, $I_n = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-x}}{1+n^4x^2}\,\mathrm{d}x$

(a) Soit $n \in \mathbb{N}^*$, n fixé.
La fonction $g_n : x \longmapsto \dfrac{e^{-x}}{1+n^4x^2}$ est continue et positive sur $[0,+\infty[$.

- Première méthode avec le critère de comparaison.

$x \geqslant 0 \Longrightarrow 1+n^4x^2 \geqslant 1 \Longrightarrow 0 < \dfrac{1}{1+n^4x^2} \leqslant 1 \Longrightarrow 0 < \dfrac{e^{-x}}{1+n^4x^2} \leqslant e^{-x}$

Donc $\forall x \in \mathbb{R}^+,\ 0 < g_n(x) \leqslant e^{-x}$. Or l'intégrale généralisée $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-x}\,dx$ est convergente car $\displaystyle\lim_{A\to+\infty}\int_0^A e^{-x}\,dx = \lim_{A\to+\infty} -e^{-A}+1 = 1$

Ainsi, par comparaison, l'intégrale généralisée $\displaystyle\int_0^{+\infty} g_n(x)\,dx$ converge aussi.

- Deuxième méthode avec le critère de Riemann.

$x^2g_n(x) = \dfrac{x^2}{1+n^4x^2}e^{-x} \underset{(x\to+\infty)}{\sim} \dfrac{1}{n^4}e^{-x}$.

D'où $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} x^2g_n(x) = 0$. Donc, d'après le **critère de Riemann** (2>1), l'intégrale généralisée $I_n = \displaystyle\int_0^{+\infty} g_n(x)\,dx$ est convergente.

(b) Soit A un réel positif. On procède au changement de variable affine $t = n^2x$, dans l'intégrale définie $\displaystyle\int_0^A \frac{e^{-x}}{1+n^4x^2}\,dx$.

Alors $x = \dfrac{t}{n^2}$ et $dx = \dfrac{1}{n^2}dt$. D'où

$$\int_0^A \frac{e^{-x}}{1+(n^2x)^2}\,dx = \int_0^{n^2A} \frac{\exp\left(-\frac{t}{n^2}\right)}{1+t^2}\frac{1}{n^2}\,dt = \frac{1}{n^2}\int_0^{n^2A}\frac{\exp\left(-\frac{t}{n^2}\right)}{1+t^2}\,dt$$

En faisant tendre A vers $+\infty$, on obtient l'égalité

$$\int_0^{+\infty} \frac{e^{-x}}{1+(n^2x)^2}\,dx = \frac{1}{n^2}\int_0^{+\infty}\frac{\exp\left(-\frac{t}{n^2}\right)}{1+t^2}\,dt$$

Ainsi $\boxed{I_n = \dfrac{1}{n^2}\displaystyle\int_0^{+\infty} f_n(t)\,dt}$

(c) $\sum I_n$ est une série à termes positifs. On rappelle que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\int_0^{+\infty} f_n(t)\,dt = \frac{\pi}{2}$. On en déduit que $\boxed{I_n \underset{(n\to+\infty)}{\sim} \dfrac{\pi}{2}\dfrac{1}{n^2}}$.

Donc, d'après le **critère d'équivalence**, les séries $\sum I_n$ et $\sum \dfrac{\pi}{2}\dfrac{1}{n^2}$ sont de même nature.
Or la série $\sum \dfrac{\pi}{2}\dfrac{1}{n^2}$ est de même nature que la **série de Riemann** $\sum \dfrac{1}{n^2}$ qui est convergente (car 2>1).
Par conséquent la série $\boxed{\sum I_n \text{ est convergente}}$.

161 $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \forall x \in I,\quad u_n(x) = \dfrac{x}{n(n+x)} = \dfrac{1}{n} - \dfrac{1}{n+x}$

1. On se fixe un réel $x > -1$. Si $n \in \mathbb{N}^*$ alors $n+x > n-1 \geqslant 0$.
D'où $|u_n(x)| = \dfrac{|x|}{n(n+x)} \underset{(n\to+\infty)}{\sim} \dfrac{|x|}{n^2}$
Or les séries $\sum \dfrac{|x|}{n^2}$ et $\sum \dfrac{1}{n^2}$ sont de même nature et la série de Riemann $\sum \dfrac{1}{n^2}$ est convergente car $2 > 1$.
Donc, d'après *le critère d'équivalence*, la série numérique $\sum |u_n(x)|$ est convergente ce qui revient à dire que la série $\sum u_n(x)$ converge absolument.
Par conséquent la série $\sum u_n(x)$ est convergente pour tout réel $x \in I$.
On pose $\quad \forall x \in I,\ \boxed{S(x) = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} u_n(x)}$

2. (a) Soient $x \in I$ et $n \in \mathbb{N}^*$.

$$\begin{aligned}
&\sum_{k=1}^{n} u_k(x+1) - \sum_{k=1}^{n} u_k(x) \\
&= \sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+(x+1)}\right) - \sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+x}\right) \\
&= \sum_{k=1}^{n}\left(-\frac{1}{k+1+x}\right) - \sum_{k=1}^{n}\left(-\frac{1}{k+x}\right) \\
&= -\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{(k+1)+x} + \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k+x} \\
&= -\sum_{j=2}^{n+1}\frac{1}{j+x} + \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k+x} \text{ par changement d'indice } j=k+1 \\
&= -\sum_{j=2}^{n}\frac{1}{j+x} - \frac{1}{n+1+x} + \frac{1}{1+x} + \sum_{k=2}^{n}\frac{1}{k+x} \\
&= -\frac{1}{n+1+x} + \frac{1}{1+x} \text{ par télescopage}
\end{aligned}$$

(b) À x réel fixé de I, on passe à la limite dans l'égalité ci-dessus, **en faisant tendre n vers $+\infty$**. On obtient alors

$$\sum_{k=1}^{+\infty} u_k(x+1) - \sum_{k=1}^{+\infty} u_k(x) = 0 + \frac{1}{1+x}$$

c'est-à-dire : $\boxed{S(x+1)-S(x) = \dfrac{1}{1+x}}$

(c) $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $u_n(0) = 0$ d'où $S(0) = 0$.
En prenant $x = 0$ dans l'égalité établie en 3.(c), il vient $S(1) - S(0) = \dfrac{1}{1+0}$ donc $S(1) = 1$.

(d) $\forall x \in I$, $(x+1)S(x) = (x+1)S(x+1) - 1$

Or $\lim\limits_{x\to(-1)^+} x+1 = 0$ et $\lim\limits_{t\to 0} S(t) = S(0)$ car S est continue en zéro.
Donc, par composition, $\lim\limits_{x\to(-1)^+} S(x+1) = S(0) = 0$
puis $\lim\limits_{\substack{x\to -1\\ <}} (x+1)S(x) = -1$

On en déduit que $\boxed{S(x) \underset{(x\to(-1)^+)}{\sim} -\dfrac{1}{1+x}}$

3. (a) Soit $x \in I$.
On a vu que $S'(x) = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} u_n'(x)$ avec $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $u_n'(x) = \dfrac{1}{(n+x)^2} > 0$

Donc $S'(x) \geqslant u_1'(x) > 0$. Ainsi S est **strictement** croissante sur I.

Variante : soient a et b deux réels appartenant à I tels que $-1 < a < b$.
Alors pour tout entier $k \in \mathbb{N}^*$,

$$0 \leqslant k-1 < k+a < k+b \Longrightarrow \frac{1}{k+a} > \frac{1}{k+b} \Longrightarrow -\frac{1}{k+a} < -\frac{1}{k+b}$$

$$\Longrightarrow \frac{1}{k} - \frac{1}{k+a} < \frac{1}{k} - \frac{1}{k+b} \Longrightarrow u_k(a) < u_k(b)$$

On en déduit que pour tout entier $n \geqslant 2$, $\sum\limits_{k=2}^{n} u_k(a) < \sum\limits_{k=2}^{n} u_k(b)$.
En faisant tendre n vers $+\infty$, on obtient l'inégalité **large** :
$\sum\limits_{k=2}^{+\infty} u_k(a) \leqslant \sum\limits_{k=2}^{+\infty} u_k(b)$
Or $u_1(a) < u_1(b)$. Donc $\sum\limits_{k=1}^{+\infty} u_k(a) < \sum\limits_{k=1}^{+\infty} u_k(b)$. Ainsi $S(a) < S(b)$

(b) Montrons **par récurrence** sur $n \in \mathbb{N}^*$ que $S(n) = \sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{1}{k}$

– $S(1) = 1 = \sum\limits_{k=1}^{1} \dfrac{1}{k}$

– Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Supposons que $S(n) = \sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{1}{k}$

On sait d'après 3.(b) que $S(n+1) - S(n) = \dfrac{1}{1+n}$.

D'où $S(n+1) = S(n) + \dfrac{1}{n+1} \overset{\text{(hyp de rec)}}{=} \left(\sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{1}{k}\right) + \dfrac{1}{n+1} = \sum\limits_{k=1}^{n+1} \dfrac{1}{k}$

– Le principe de récurrence permet de conclure que $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $S(n) = \sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{1}{k}$

(c) La fonction S étant croissante sur l'intervalle ouvert $]-1, +\infty[$, elle admet une limite ℓ (finie ou infinie) en $+\infty$ selon le *théorème de la limite monotone*.
Or la série de Riemann $\sum \dfrac{1}{n}$ est divergente, ce qui signifie que $\lim\limits_{n\to+\infty} \sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{1}{k} = +\infty$.
Par conséquent $\lim\limits_{n\to+\infty} S(n) = +\infty$ puis $\boxed{\lim\limits_{x\to+\infty} S(x) = +\infty}$.

On pourrait aussi démontrer que $S(x) \underset{(x\to+\infty)}{\sim} \ln x$

Représentation graphique de S :