Éléments de logique - Raisonnements

I Rudiments de logique

Définition 1

Une **assertion** est un énoncé dont on peut dire sans ambiguïté s'il est Vrai ou Faux.
Cette convention permet d'associer à chaque assertion une *valeur de vérité* :
V si l'assertion est Vraie, F si elle est Fausse.

Exemples :

- «le nombre π est compris entre 6 et 7» est une assertion ...
- «tout nombre réel strictement négatif n'est pas un carré» n'est pas une assertion car ...

I.1 Connecteurs logiques

Les connecteurs logiques sont des opérations permettant de créer de nouvelles assertions à partir d'assertion(s) existante(s) pourvu que la valeur de vérité de l'assertion obtenue ne dépende que des valeurs de vérité des assertions existantes.

I.1.1 Négation (non)

Définition 2

Si P est une assertion, la **négation** de P est l'assertion notée «non(P)» qui prend la valeur Vraie si P est fausse et Fausse si P est vraie.

L'assertion non(P) est caractérisée par la table de vérité suivante :

P	non(P)
V	
F	

I.1.2 Conjonction (et)

Définition 3

Soit P et Q deux assertions. La **conjonction** de P et Q, notée «P et Q», est vraie si et seulement si P et Q sont vraies en même temps.

Table de vérité :

P	Q	P et Q
V	V	
V	F	
F	V	
F	F	

I.1.3 Disjonction (ou)

Définition 4

Soit P et Q deux assertions. La **disjonction** de P et Q, notée «P ou Q», est vraie si et seulement si au moins une des deux assertions P ou Q est vraie.

Table de vérité :

P	Q	P ou Q
V	V	
V	F	
F	V	
F	F	

I.1.4 Implication

Définition 5

Soit P et Q deux assertions. L'**implication** de P vers Q, notée $P \Rightarrow Q$, qui se lit «P implique Q», est l'assertion [Q ou (non P)].

Table de vérité :

P	Q	$P \Longrightarrow Q$
V	V	
V	F	
F	V	
F	F	

L'implication $P \Longrightarrow Q$ est vraie quand [P est fausse] ou quand [P et Q sont vraies] toutes les deux.

I.1.5 Équivalence

Définition 6

Soit P et Q deux assertions. L'**équivalence** de P et Q, notée $P \Leftrightarrow Q$, qui se lit «P équivaut à Q», est l'assertion ...

Table de vérité :

P	Q	$P \iff Q$
V	V	
V	F	
F	V	
F	F	

I.2 Formes propositionnelles

Définition 7

(i) Une **forme propositionnelle** est un assemblage d'assertions construit à l'aide de connecteurs logiques et d'éventuelles parenthèses (destinées à lever toute ambiguïté). À chaque forme propositionnelle est associée une table de vérité.

(ii) On dit que deux formes propositionnelles f et g sont synonymes si elles ont la même table de vérité. On écrit alors $f \equiv g$.

Exemples :

- $[(\text{non } P) \text{ ou } Q]$ est une forme propositionnelle. Les parenthèses sont ici indispensables pour lever toute ambiguïté. En écrivant $[\text{non } P \text{ ou } Q]$, on ne sait pas s'il s'agit de $[(\text{non } P) \text{ ou } Q]$ ou de ......
- $\text{non}(\text{non } P) \equiv$
- $[Q \text{ ou } (\text{non } P)] \equiv$
- $[(P \Rightarrow Q) \text{ et } (Q \Rightarrow P)] \equiv$

Théorème 1

Soit P et Q deux assertions.

- $(P \Rightarrow Q) \equiv [(\text{non } Q) \Rightarrow (\text{non } P)]$
  On dit que $(\text{non } Q) \Rightarrow (\text{non } P)$ est la de l'implication $P \Rightarrow Q$.
- Lois de Morgan :

  $\text{non}(P \text{ et } Q) \equiv$; $\text{non}(P \text{ ou } Q) \equiv$

Preuve : avec les tables de vérité.

■

I.3 Quantificateurs

Étant donnée une assertion $A(x)$ dépendant d'un élément x, on introduit le quantificateurs universel $\forall$ et le quantificateur existentiel $\exists$

Définition 8

• $\forall x \in E,\ A(x)$ signifie «pour tout élément x appartenant à l'ensemble E, $A(x)$ est vraie». Pour que cette assertion soit vraie, il faut que $A(x)$ soit vérifiée quel que soit x de E.
• $\exists x \in E\ ;\ A(x)$ signifie «il existe au moins un élément x appartenant à E tel que $A(x)$ soit vraie». Pour que cette assertion soit vraie, il faut que $A(x)$ soit vérifiée pour au moins un x de E.
• $\exists !\, x \in E\ ;\ A(x)$ signifie «il existe un unique élément x appartenant à E tel que $A(x)$ soit vraie». Pour que cette assertion soit vraie, il faut que $A(x)$ soit vérifiée pour exactement un x de E.

Exemples :

(i) Soit f une fonction définie sur l'intervalle $[0\,,+\infty[$. Dire que f est nulle revient à dire que :

$$\forall x \in [0\,,+\infty[, f(x) = 0.$$

(ii) Comment exprimer le fait que f s'annule ?

Proposition 2

Soit E un ensemble.

(i) La négation de $(\forall\, x \in E,\ P(x))$ est

(ii) La négation de $(\exists\, x \in E\ ;\ P(x))$ est

De façon plus générale, la négation d'une propriété contenant un certain nombre de fois les quantificateurs $\forall$, $\exists$ et ensuite l'énoncé d'une assertion $A(x)$, s'obtient en remplaçant chaque quantificateur $\forall$ par le quantificateur $\exists$ et vice versa, et l'assertion $A(x)$ par son contraire non $A(x)$.

Exemple : on dit qu'une suite réelle $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est majorée ssi

$$\exists\, M \in \mathbb{R}\ ;\ \forall\, n \in \mathbb{N},\ u_n \leqslant M$$

À l'aide des quantificateurs, écrire qu'une suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ n'est pas majorée.

II Modes de raisonnement mathématique

II.1 Par chaîne d'implications

PRINCIPE : soient P et Q deux assertions. Si P est vraie et si l'implication $P \Rightarrow Q$ est vraie, alors Q est vraie.

C'est le raisonnement direct de base que l'on reproduit un grand nombre de fois. On confond souvent la phrase simple «$P \Rightarrow Q$ est vraie» avec la phrase plus complète «P est vraie et $P \Rightarrow Q$ est vraie». Mais seule la deuxième permet d'affirmer que Q est vraie. Sachant de plus que l'implication est transitive, une démonstration prend très souvent la forme suivante : P est vraie et $P \Rightarrow Q \Rightarrow R \Rightarrow \ldots \Rightarrow T$ est vraie, et on a donc montré que T est vraie.

II.2 Par contraposée

PRINCIPE : soient P et Q deux assertions. Démontrer l'implication $P \Longrightarrow Q$ revient à démontrer l'implication contraposée $(\text{ non } Q) \Rightarrow (\text{ non } P)$ qui peut dans certains cas être plus simple.

II.3 Raisonnement par l'absurde

PRINCIPE : soit P une assertion. Si on peut trouver une assertion Q telle que les implications $(\text{ non } P) \Rightarrow Q$ et $(\text{ non } P) \Rightarrow (\text{ non } Q)$ soient vraies, alors P est vraie.
En pratique, si on cherche à montrer qu'une assertion P est vraie, on suppose que P est fausse et sous cette hypothèse, on cherche à aboutir à une contradiction.

II.4 La disjonction des cas

PRINCIPE : soient P, Q et R des assertions. Si (P ou Q) est vraie et si les implications $P \Rightarrow R$ et $Q \Rightarrow R$ sont vraies, alors R est vraie.
En pratique, on part d'une assertion (P ou Q) que l'on sait vraie. Effectuer une disjonction des cas consiste alors à séparer la preuve en deux parties : un premier cas où P est vraie et un second cas où Q est vraie.

II.5 Raisonnement par analyse/synthèse

PRINCIPE : il s'agit de questions ouvertes. On demande de trouver toutes les solutions d'un problème (équation algébrique, problème de construction géométrique) sans les donner.
On procède en trois étapes :
• *Première étape* (analyse du problème) : on considère une solution du problème et on essaie, à partir des relations données dans l'énoncé, d'en déduire la forme de cette solution par conditions nécessaires.
• *Deuxième étape* (synthèse ou vérification) : l'étape précédente a donné la forme des solutions éventuelles. Il ne reste plus qu'à vérifier, parmi ces solutions potentielles, lesquelles sont effectivement les solutions du problème initial. On peut être amené à bâtir une discussion ou à rejeter certains objets («fausses solutions») déterminés lors de la première étape.
• *Troisième étape* : on conclut.

II.6 Raisonnement par récurrence

II.6.1 Principe de récurrence

Soit n_0 un entier naturel fixé. Soit $\mathcal{P}(n)$ une assertion dépendant d'un entier naturel n.
Si $\mathcal{P}(n_0)$ est vraie
et si pour tout entier k supérieur ou égal à n_0, l'implication $\mathcal{P}(k) \Rightarrow \mathcal{P}(k+1)$ est vraie,
alors l'assertion « $\forall n \geqslant n_0,\ \mathcal{P}(n)$ » est vraie.

II.6.2 Mise en œuvre

Pour démontrer par récurrence qu'une propriété $\mathcal{P}(n)$ est vraie pour tout entier n ($n \geqslant n_0$), on procède en quatre étapes :

(o) Énoncé : on énonce clairement la propriété $\mathcal{P}(k)$ à démontrer.

(i) Initialisation : on vérifie la propriété au rang initial n_0.

(ii) Hérédité : soit $k \in \mathbb{N}$, $k \geqslant n_0$. On suppose que $\mathcal{P}(k)$ est vraie. On montre alors sous cette hypothèse (dite «hypothèse de récurrence») que $\mathcal{P}(k+1)$ est vraie.

(iii) Conclusion : selon le principe de récurrence, la propriété $\mathcal{P}(n)$ est vraie pour tout entier n supérieur (ou égal) à n_0.

II.6.3 Schéma de rédaction

Exemple : montrer par récurrence que pour tout entier $n \geqslant 4$,

$$2^n \leqslant n!$$