Calculs dans $\mathbb{R}$

I Ensemble ordonné des nombres réels

I.1 Majorants et minorants

Définition 1

Soit A une partie de $\mathbb{R}$. Soit M et m des nombres réels. On dit que :

(i) M est **un majorant** de A si et seulement si pour tout x appartenant à A,

$$\ldots$$

Dans ce cas, on dit que la partie A est **majorée** (par le réel M).

(ii) m est **un minorant** de A si et seulement si pour tout x appartenant à A,

$$\ldots$$

Dans ce cas, on dit que la partie A est **minorée**.

Un majorant n'est jamais unique.
En effet si M est un majorant de A, alors $M+1$ est encore un majorant.

Exemples : $\mathbb{R}^+$ désignant l'ensemble des réels positifs,

L'intervalle $[0,1[$ admet comme majorants :

I.2 Maximum et minimum

Définition 2

Soit A une partie de $\mathbb{R}$.

- On appelle **plus grand élément de** A tout élément M qui appartient à A et qui est aussi un majorant de A , autrement dit un élément M vérifiant

$$M \in A \quad \text{et} \quad \text{pour tout } x \text{ de } A, \quad x \ldots$$

- On appelle **plus petit élément de la partie** A tout élément m qui appartient à A et qui est aussi un minorant de A , autrement dit un élement m vérifiant :

$$m \in A \quad \text{et} \quad \text{pour tout } x \text{ de } A, \quad \ldots$$

Proposition 1

- s'il existe, *le* **plus grand élément** de la partie A est **unique**, et on le note alors $\max(A)$.
- s'il existe, *le* **plus petit élément** de la partie A est

Preuve : On suppose que M_1 et M_2 sont

■

Exemples :

- Soit $A = [0, 1]$ alors ... est le maximum de A et ... est un majorant.
- Soit $B = [0, 1[$ alors B n'a pas de maximum. En effet, si M était le plus grand élément de B, alors il devrait appartenir à $[0, 1[$, mais ne pourrait plus être un majorant de cette partie car, par exemple, l'élément $x_0 = \dfrac{M+1}{2}$ vérifierait $x_0 \in B$ et $M < x_0$, ce qui contredit la nature de majorant de M.

I.3 Classification des intervalles de $\mathbb{R}$

Soit a et b deux réels tels que $a \leqslant b$.
On dénombre 9 types d'**intervalles** de $\mathbb{R}$ que l'on qualifie d'ouverts ou fermés :

- intervalles bornés (majorés et minorés) :

- intervalles minorés, non majorés :

- intervalles majorés, non minorés :

- un seul intervalle non majoré et non minoré :

CONSÉQUENCE : et sont des intervalles de $\mathbb{R}$.

II Quelques propriétés de $\mathbb{R}$

II.1 Inégalités dans $\mathbb{R}$

La relation d'ordre $\leqslant$ est compatible avec l'addition et la multiplication :
Pour tous nombres réels a, b, c et d

$$
\begin{aligned}
a \leqslant b \quad &\Longrightarrow \\
(a \leqslant b \quad \text{et} \quad c \geqslant 0) \quad &\Longrightarrow \\
a < b \quad &\Longrightarrow \\
(a \leqslant b \quad \text{et} \quad c < d) \quad &\Longrightarrow \\
(0 < a \leqslant b \quad \text{et} \quad 0 < c \leqslant d) \quad &\Longrightarrow \\
(a < b \quad \text{et} \quad c < 0) \quad &\Longrightarrow
\end{aligned}
$$

Les produits ac et bc sont rangés dans le même ordre que a et b lorsque c est ...

Exemple : comparons a^2 et b^2 lorsque $a < b \leqslant 0$.

II.2 Partie entière d'un réel

Définition 3

Pour tout nombre réel x, il existe un unique entier relatif n tel que

$$n \leqslant$$

Cet entier relatif n s'appelle **la partie entière** de x et on le note $n = E(x)$ ou $n = \lfloor x \rfloor$.

Exemples : $\lfloor 1,9 \rfloor =$; $\left\lfloor -\sqrt{2} \right\rfloor =$

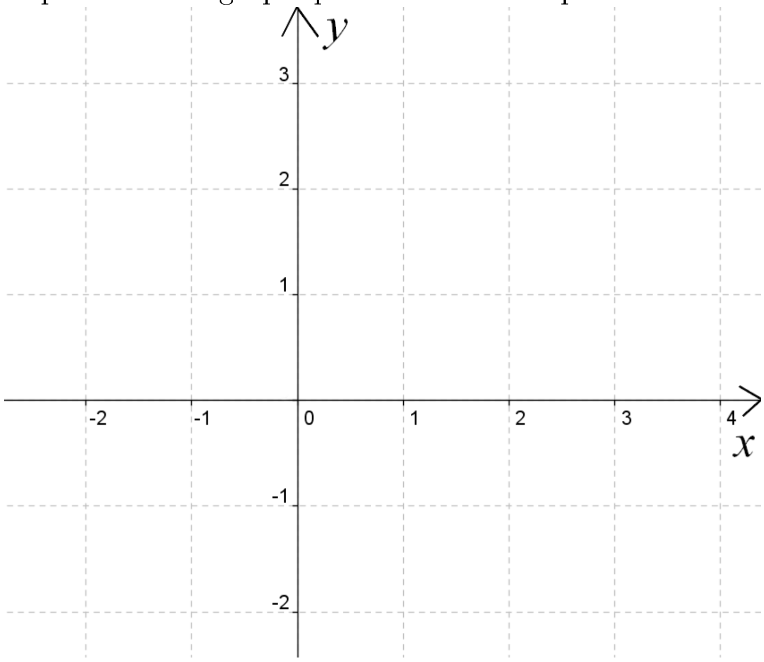
$$\text{pour tout } k \in \mathbb{Z}, \quad \lfloor k \rfloor =$$

REMARQUES :

- $E(x)$ est le plus

- $\lfloor x \rfloor = \max\{$
- Pour tout nombre réel x, $E(x) \leqslant x < E(x)+1$ et
- La fonction partie entière $x \longmapsto E(x)$ est sur $\mathbb{R}$.

Représentation graphique de la fonction partie entière :



II.3 Valeurs décimales approchées d'un réel

Définition 4

Soit x un réel et n un entier naturel.
Alors il existe un unique entier relatif p tel que

On dit que $\dfrac{p}{10^n}$ est une valeur décimale approchée de x par défaut à la précision 10^{-n} et que

Exemple : donner des valeurs décimales approchées par excès de π et de e à la précision 10^{-4}.

II.4 Valeur absolue

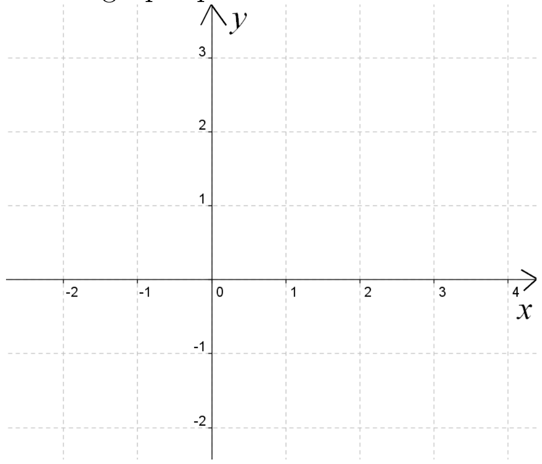
Définition 5

Soit $x \in \mathbb{R}$. On appelle **valeur absolue** de x le réel positif noté $|x|$ défini par :

$$|x| =$$

La fonction valeur absolue $x \longmapsto |x|$ est

Représentation graphique de la fonction valeur absolue :



Proposition 2 (inégalité triangulaire)

Pour tous réels x et y,

Remarque : on appelle distance entre deux réels x et y le nombre noté $d(x, y)$ et défini par

$$d(x, y) = |x - y|$$

La distance d vérifie les quatre propriétés suivantes :

-
-
-
-

Proposition 3

Soit x, a et r trois nombres réels tels que $r > 0$. Alors

$$|x - a| < r \iff \qquad \iff$$

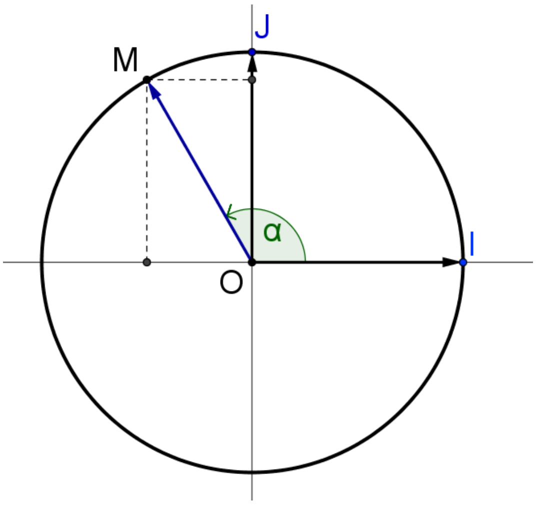
III Trigonométrie circulaire

III.1 Le cercle trigonométrique

Le plan orienté est muni d'un repère orthonormal direct $\left(O\,;\vec{i}\,,\vec{j}\right)$.
On désigne par $\mathscr{C}$ le cercle trigonométrique.

Définition 6

Soit α un nombre réel et M le point de $\mathscr{C}$ tel que $(\widehat{\vec{i}\,,\overrightarrow{OM}}) = \alpha$
$\cos\alpha$ est l'abscisse de M dans le repère $\left(O\,;\vec{i}\,,\vec{j}\right)$ et $\sin\alpha$ l'ordonnée de M.



Propriétés : pour tout réel α,
$$-1 \leqslant \cos\alpha \leqslant 1$$
$$-1 \leqslant \sin\alpha \leqslant 1$$
$$\cos^2\alpha + \sin^2\alpha =$$

et pour tout entier relatif k,
$$\cos(\alpha + 2\,k\pi) =$$
$$\sin(\alpha + 2\,k\pi) =$$

Valeurs remarquables :

α	0	$\pi/6$	$\pi/4$	$\pi/3$	$\pi/2$	π
$\cos\alpha$						
$\sin\alpha$						

Définition 7

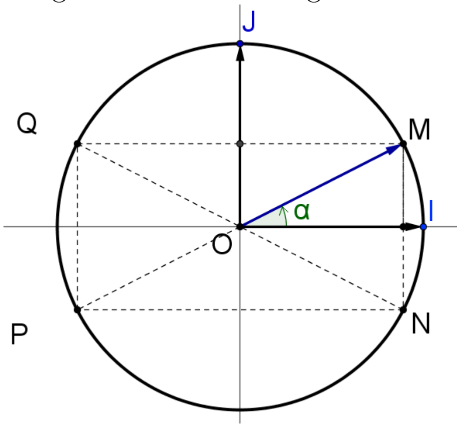
Pour tout réel α tel que $\cos\alpha \neq 0$ (c.à.d. $\alpha \neq$), on pose

$$\tan\alpha =$$

Visualisation sur le cercle trigonométrique : si $\mathscr{D}$ est la droite verticale d'équation $x = 1$ alors la droite (OM) coupe $\mathscr{D}$ au point T de coordonnées

III.2 Formulaire de trigonométrie

- configuration du rectangle



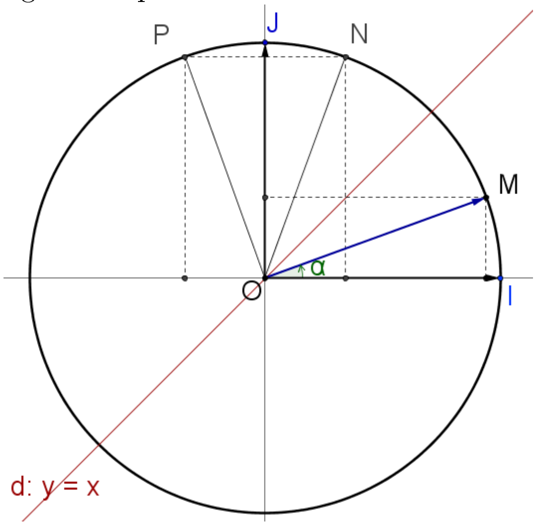
Pour tout réel α,

$$\begin{cases} \cos(-\alpha) & = \\ \sin(-\alpha) & = \end{cases}$$

$$\begin{cases} \cos(\alpha+\pi) & = \\ \sin(\alpha+\pi) & = \end{cases}$$

$$\begin{cases} \cos(\pi-\alpha) & = \\ \sin(\pi-\alpha) & = \end{cases}$$

- angles complémentaires



Pour tout réel α,

$$\begin{cases} \cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right) & = \\ \sin\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right) & = \end{cases}$$

$$\begin{cases} \cos\left(\alpha+\frac{\pi}{2}\right) & = \\ \sin\left(\alpha+\frac{\pi}{2}\right) & = \end{cases}$$

- formules d'addition

Théorème 4

Pour tous réels a et b,

$$\cos(a+b) = \cos a\cos b - \sin a \sin b$$

$$\sin(a+b) =$$

Preuve : soit A et B les deux points du cercle trigonométrique tels que

$$(\widehat{\vec{i}\,,\overrightarrow{OA}}) = a \quad \text{et} \quad (\widehat{\overrightarrow{OA}\,,\overrightarrow{OB}}) = b$$

■

- formules de duplication : pour tout réel a,

$$\cos(2a) = \qquad \text{et} \qquad \sin(2a) =$$
$$=$$
$$=$$

III.3 Résolution d'équations trigonométriques

Soit a un réel fixé.

- $\cos x = \cos a \iff x = a + 2k\pi \, (k \in \mathbb{Z})$ ou $x = \qquad (k' \in \mathbb{Z})$
- $\sin x = \sin a \iff x = a + 2k\pi \, (k \in \mathbb{Z})$ ou $x = \qquad (k' \in \mathbb{Z})$
- si, de plus, a est un nombre réel différent de $\pi/2$ modulo π alors

$$\tan x = \tan a \iff x =$$

IV Les notations $\sum$ (sigma) , $\prod$ (pi) et ! (factorielle)

IV.1 Le symbole de sommation discrète

Définition 8

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de nombres réels.

La notation symbolique $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} u_k$ désigne la somme $u_0 + u_1 + u_2 + \cdots + u_n$

qui comporte termes. Elle se lit : «somme pour k variant de 0 à n des u_k».

Exemples :

$$\sum_{k=0}^{4} k^2 = \qquad ; \qquad \sum_{k=1}^{n} n = \qquad ; \qquad \sum_{k=1}^{n} 1 =$$

Règles de calcul : soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites. Soit n un entier naturel.

- $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} (u_k + v_k) =$
- Pour tout nombre réel λ, $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} (\lambda\, u_k) =$
- Changement d'indice : $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} u_{k+2} = \sum_{p=} u_p =$

Théorème 5

Soit n un entier naturel non nul.

- $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k =$
- Somme de puissances consécutives : si q est un réel différent de 1, alors

$$\sum_{k=0}^{n} q^k =$$

Preuve : Posons $S = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} k = 0+1+2+3+\cdots+n$ et calculons de deux manières la somme de tous les termes du tableau suivant :

0	1	2	$\cdots$	$n-1$	n
n	$n-1$	$n-2$	$\cdots$	1	0

■

IV.2 Le symbole produit $\prod$

Définition 9

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de nombres réels.

La notation symbolique $\prod_{k=0}^{n} u_k$ désigne le produit $u_0 \times u_1 \times u_2 \times \cdots \times u_n$

qui comporte facteurs. Elle se lit : «produit pour k variant de 0 à n des u_k».

Exemple : pour tout réel a, $\prod_{k=0}^{n} a =$

Définition 10

Pour tout entier $n \geqslant 1$, on appelle «factorielle n» et on note $n!$ le nombre entier défini par

$$n! =$$

Par convention : $0! = 1$

Exemples : $1! =$; $2! =$; $3! =$; $4! =$; $5! =$

Conséquence : pour tout entier naturel n,

$$\boxed{(n+1)\,! = \qquad\qquad}$$

V Les identités remarquables

V.1 Factorisation de $a^n - b^n$

On sait que $a^2 - b^2 =$

Proposition 6

Soient a et b deux réels. Alors

$a^3 - b^3 =$ et $a^5 - b^5 =$

Preuve : il suffit de développer le membre de chacune des égalités ci-dessus. ∎

Exemple : $a^5 + b^5 =$

V.2 Les coefficients binomiaux

Définition 11

Pour tous entiers naturels k et n tels que $k \leqslant n$, on appelle «coefficient binomial k parmi n» le nombre entier noté $\binom{n}{k}$, défini par :

$$\binom{n}{k} =$$

Exemples : $\binom{5}{2} =$; Si $n \geqslant 0$, $\binom{n}{0} =$; Si $n \geqslant 1$, $\binom{n}{1} =$

Proposition 7

- **Symétrie** : pour tous entiers n et k tels que $0 \leqslant k \leqslant n$,

$$\binom{n}{n-k} =$$

- **Relation de Pascal** : pour tous entiers n et k tels que $1 \leqslant k \leqslant n$,

$$\binom{n}{k-1} + \binom{n}{k} =$$

Preuve : prouvons la formule de Pascal.

■

LE TRIANGLE DE PASCAL :

V.3 Développement de $(a+b)^n$

On sait que $(a+b)^2 =$; $(a-b)^2 =$

et peut-être aussi que $(a+b)^3 =$

Théorème 8 (formule du binôme de Newton)

Pour tous nombres réels a et b, pour tout entier $n \geqslant 1$,

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n}$$

$$=$$

Exemple : développer $(a-b)^7$