Ensembles et applications

I Comment définir un ensemble ?

Définition 1

- Un ensemble est une collection d'objets tous distincts et définis sans ambiguïté, appelés éléments de l'ensemble.
- Deux ensembles E et F qui contiennent les mêmes éléments sont dits égaux, on écrit alors $E = F$.

I.1 Appartenance et inclusion

Un ensemble contient des éléments. L'assertion «x appartient à E» (ou bien «x est un élément de E») se note $x \in E$. Sa négation s'écrit :

Exemple : $\sqrt{2} \in$ et $\sqrt{2} \notin$

REMARQUE : dans un ensemble, il n'y a pas a priori de notion d'ordre entre les éléments. Il n'y a pas non plus de répétition des éléments.
Pour tout ensemble E et pour tout x, x appartient à E ou ne lui appartient pas.

Axiome de compréhension : si E est un ensemble et si $\mathscr{P}(x)$ est une propriété dépendant de chaque élément x de E, alors il existe un ensemble noté $\{x \in E \mid \mathscr{P}(x)\}$ dont les éléments sont précisément les éléments de E qui vérifient la propriété $\mathscr{P}$.
Un ensemble peut être défini :

- **en extension** : on donne la liste complète, non ordonnée et sans répétition de ses éléments, par exemple $\{0, 1, 2, 3\}$ est un ensemble
- **en compréhension** : on donne une propriété $\mathscr{P}$ qui caractérise ses éléments, par exemple $\{x \in \mathbb{N} \mid x \leqslant 3\}$ est un ensemble (le même que le précédent).

Exemple : on pose $E = \mathbb{N}$ et pour $x \in \mathbb{N}$, on note $\mathscr{P}(x)$ la propriété :
«$x \geqslant 2$ et les seuls diviseurs positifs de x sont 1 et x».
Alors l'ensemble $A = \{x \in \mathbb{N} \mid \mathscr{P}(x)\}$ est

Un ensemble peut être représenté par un diagramme de Venn comme illustré ci-dessous :

Les croix désignent les éléments de E.

Proposition 1

Il existe un unique ensemble qui ne contient aucun élément. Il est noté $\emptyset$ et s'appelle l'*ensemble vide*.

Un ensemble qui a un unique élément, c.à.d. un ensemble de la forme $\{x\}$ s'appelle un *singleton*.
Un ensemble qui a deux éléments, c.à.d. de la forme $\{x, y\}$ avec $x \neq y$, s'appelle une *paire*.
On a $\{x, y\} = \{y, x\}$ car l'ordre d'écriture des éléments n'importe pas, seule leur appartenance à l'ensemble compte.

I.2 Inclusion

Définition 2

On dit qu'un ensemble E est **inclus dans** un ensemble F ou encore que E est un **sous-ensemble** ou une **partie** de F, et on écrit $E \subset F$, ssi tout élément de E est aussi un élément de F c.à.d

$$\forall x, \quad (x \in E) \Rightarrow$$

Remarque :
Il ne faut pas confondre $E \subset F$ et $E \in F$. Par exemple $\{1, 3\} \subset \{1, 2, 3\}$, mais $\{1, 3\} \notin \{1, 2, 3\}$ car $\{1, 3\}$ est différent de 1, de 2, et de 3. Autre exemple : pour tout ensemble E, on a $E \subset E$, mais on n'a jamais $E \in E$.

Exemple :

$$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \ldots$$

ces 5 inclusions étant strictes.

En pratique, pour démontrer que $E \subset F$, on pourra commencer par :
«Soit $x \in E$. Montrons que $x \in F$. …».

Pour démontrer que deux ensembles sont égaux, il est fréquent de procéder par double inclusion :

$$E = F \quad \text{si, et seulement si,} \quad [E \subset F \quad \text{et} \quad F \subset E]$$

I.3 Produit cartésien de deux ensembles

Un couple (x, y) est un objet mathématique formé à partir de deux autres objets x et y et qui possède la propriété suivante :

$$(x, y) = (x', y') \iff \left\{ \begin{array}{rcl} x & = & x' \\ \text{et } y & = & y' \end{array} \right.$$

Par exemple, $(1, 2) \neq (2, 1)$. Dans un couple, l'ordre intervient.

Définition 3

Étant donnés deux ensembles E et F, l'ensemble des couples (x, y) avec $x \in E$ et $y \in F$ est appelé produit cartésien de E par F. On le note $E \times F$.

$$E \times F = \{$$

L'ensemble $E \times E$ est noté E^2.

Exemple : on pose $E = \{a, b, c\}$ et $F = \{1, 2, 3, 4\}$.
Pour écrire $E \times F$ en extension, on peut faire appel à un tableau ou à un «arbre de choix».

II Opérations sur les parties d'un ensemble

II.1 Ensemble des parties

Définition 4

Soit E un ensemble. Les parties de E forment un ensemble noté $\mathcal{P}(E)$ et appelé l'*ensemble des parties* de E.

Remarques :

(i) $\mathcal{P}(E)$ n'est jamais vide car

(ii) on retiendra que

$$X \in \mathcal{P}(E) \iff$$

(iii) il n'existe pas d'ensemble de tous les ensembles.

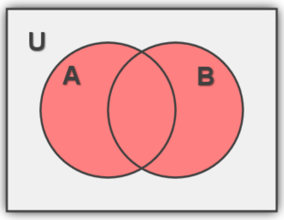
Dorénavant, dans tout ce paragraphe, E désigne un ensemble et A, B et C sont des parties de E.

II.2 Réunion ou union

Définition 5

On appelle réunion de A et B le sous-ensemble de E noté $A \cup B$, défini par

$$A \cup B = \{x \in E \text{ tels que } x \in A \ \underline{\text{ou}}\ x \in B\}$$



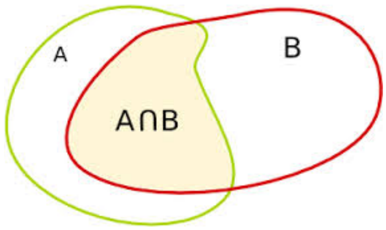
La partie colorée représente l'union des ensembles A et B

II.3 Intersection

Définition 6

On appelle intersection de A et B le sous-ensemble de E noté $A \cap B$, défini par

$$A \cap B = \{x \in E \text{ tels que } x \in A \ \underline{\text{et}} \ x \in B\}$$



La partie colorée représente l'intersection des ensembles A et B

On dit que les sous-ensembles A et B sont **disjoints** lorsque

II.4 Différence et complémentaire

Définition 7

- On appelle différence de A et B le sous-ensemble de E noté $A \setminus B$, défini par

$$A \setminus B = \{x \in E \text{ tels que } x \in A \ \underline{\text{et}} \ x \notin B\}$$

- On appelle complémentaire de A dans E le sous-ensemble de E noté $\overline{A}$, défini par

$$\overline{A} = E \setminus A = \{x \in E \text{ tels que }$$

Diagrammes de Venn :

II.5 Propriétés des opérations sur les ensembles

$$A \cup B = \qquad \text{et } A \cap B =$$

$$(A \cup B) \cup C = \qquad \text{et} \qquad (A \cap B) \cap C =$$

$$A \cup A = \qquad \text{et} \qquad A \cap A =$$

$$A \cup \emptyset = \qquad \text{et} \qquad A \cap E =$$

$$A \cup (B \cap C) = \qquad \text{et} \qquad A \cap (B \cup C) =$$

Attention : en général,

$$A \cup (B \cap C) \neq (A \cup B) \cap C$$

l'emploi des parenthèses est donc indispensable.

$$\overline{A \cup B} = \qquad \text{et} \qquad \overline{A \cap B} =$$

$$\text{Si } A \subset B, \quad \text{alors } A \cap B = \qquad \text{et} \qquad A \cup B =$$

III Applications et fonctions

III.1 Images et antécédents

Définition 8

Soit E et F deux ensembles.

- Une **application** de E vers F est la donnée d'une partie Γ de $E \times F$ (Γ est le graphe de l'application) telle que

$$\forall x \in E, \ \exists ! \, y \in F \, ; \ (x, y) \in \Gamma$$

- On dit que y est l'**image** de x par f, ou que x est un
On note $y = f(x)$.
- E s'appelle l'*ensemble de départ* et F l'*ensemble d'arrivée* de f.
- On note $\mathcal{F}(E, F)$ ou F^E l'ensemble de toutes les applications de E vers F.

On écrit $f : \begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & F \\ x & \longmapsto & f(x) \end{array}$

Deux applications f et g sont égales ssi elles ont le même ensemble de départ E, le même ensemble d'arrivée F et si $\forall x \in E, \ f(x) = g(x)$.

Exemples :

(i) La fonction inverse *inv* est une application de $\mathbb{R}^*$ dans $\mathbb{R}$.
On écrit alors $inv : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^* & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \dfrac{1}{x} \end{array}$

(ii) On définit id_E , l'application identité de E dans E par $\forall\, x \in E,\ \mathrm{id}_E\,(x) = x$

(iii) Pour tout entier naturel n, on note $u(n)$ le reste de la division euclidienne de n par 3.
Alors u est une application de dans

(iv) Soit Ω un ensemble fini contenant n éléments (où $n \in \mathbb{N}^*$).
Une probabilité sur Ω est une application $p : \mathcal{P}(\Omega) \longrightarrow [0\,,1]$ telle que

- $p(\Omega) =$
- $\forall\,(A, B) \in \mathcal{P}(\Omega)^2,\ [\ A \cap B = \emptyset \Longrightarrow p(A \cup B) = \qquad]$

(v) Si $E \subset F$, l'injection canonique j de E dans F est telle que pour tout x de E, $j\,(x) = \ldots$

III.2 Restriction

Soit f une application de E dans F et A une partie de E.
On appelle **restriction** de f à A, notée $f_{|A}$, l'application

$$f_{|A} : \begin{array}{ccc} A & \longrightarrow & F \\ x & \longmapsto & f\,(x) \end{array}$$

Exemple : soit l'application $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \exp(x \ln 2) \end{array}$

Alors $\forall\, n \in \mathbb{Z},\ f(n) =$

Donc $f_{|\mathbb{Z}} : \begin{array}{ccc} \mathbb{Z} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ n & \longmapsto & \end{array}$

III.3 Composition des applications

Définition 9

Soit $f : E \longrightarrow F$ et $g : F \longrightarrow G$ deux applications.
On appelle **composée** de f suivie de g l'application notée $g \circ f$ de E vers G définie par

$$\forall\, x \in E,\ (g \circ f)(x) =$$

Proposition 2

Soit $f \in \mathcal{F}(E,F)$, $g \in \mathcal{F}(F,G)$ et $h \in \mathcal{F}(G,H)$. Alors

- $(h \circ g) \circ f =$
- $\mathrm{id}_F \circ f =$ et $f \circ \mathrm{id}_E =$

Exemple : I et J sont deux points du plan usuel. Déterminer la nature de la composée $s_I \circ s_J$ où s_I désigne la symétrie centrale de centre I.
Comparer cette transformation du plan à $s_J \circ s_I$.

III.4 Images directes par une application

Soit E et F deux ensembles. Soit f une application de E vers F.

Définition 10

Pour toute partie A de E, on appelle **image directe** de A par f le sous-ensemble de F noté $f(A)$, défini par :

$$f(A) = \{f(x) \in F \mid x \in A\}$$

Autrement dit $y \in f(A) \iff$

Remarques : on a toujours $f(\emptyset) =$
et pour tout élément a de E, $f(\{a\}) =$

Si f est une application de E dans F, l'ensemble $f(E)$ est appelé **image** de f.

Exemples :

(i) Dans le plan usuel, on se donne une droite Δ et un point A. On désigne par s_Δ la réflexion d'axe Δ. Alors l'image par s_Δ du cercle $\mathscr{C}$ de centre A et de rayon 2 est ...

(ii) On considère l'application $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{C} & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ z & \longmapsto & z^2 \end{array}$ Déterminer $f(\mathbb{U})$.

IV Applications bijectives

IV.1 Définition

Définition 11

Soit $f : E \longrightarrow F$ une application. On dit que f est **bijective** ou que f une bijection de E sur F ssi

$$\forall y \in F,\ \exists ! x \in E \ ;$$

Exemples :

(i) l'application $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & x^2 \end{array}$ n'est pas ...

(ii) L'application $g : \begin{array}{ccc} \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] & \longrightarrow & [-1\,,1] \\ x & \longmapsto & \sin x \end{array}$ est bijective.

car g est continue et dérivable sur $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$. De plus, $\forall x \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$, $g'(x) > 0$.
Donc g réalise une bijection strictement croissante de $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ sur $g\left(\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]\right) = [-1, 1]$.

Une bijection de E dans lui-même est parfois appelée **permutation** de E.

Proposition 3 (composition de deux bijections)

La composée de deux applications bijectives est bijective.

IV.2 Bijection réciproque

Considérons une application bijective f de E sur F. Pour tout élément y de F, il existe un élément et un seul x de E, tel que $y = f(x)$.
On définit une application de F vers E en associant à tout élément y de F son unique antécédent x par f. On pose $x = f^{-1}(y)$. Cette application $f^{-1} : F \longrightarrow E$ est aussi bijective.

Proposition 4

Soit f une application bijective de E sur F. Alors

$$f^{-1} \circ f = \qquad\qquad \text{et} \qquad f \circ f^{-1} =$$

De plus, $\left(f^{-1}\right)^{-1} = f$

On dit que f et f^{-1} sont **réciproques** l'une de l'autre et que

Exemple : la bijection réciproque de la fonction exponentielle

Théorème 5

Soit $f : E \longrightarrow F$ une application. Pour montrer que f est bijective, il suffit de trouver une application $g \in \mathcal{F}(F, E)$ telle que

$$g \circ f = \qquad\qquad \text{et} \qquad f \circ g =$$

Dans ce cas, g est unique et $g =$

Preuve : on suppose qu'il existe une application $g : F \longrightarrow E$ telle que

■

Exemple : soit Δ une droite du plan géométrique usuel. La bijection réciproque de la réflexion s d'axe Δ est ...

Proposition 6

Soient $f : E \longrightarrow F$ et $g : F \longrightarrow G$ deux applications.
Si f et g sont bijectives alors la composée $g \circ f$ est bijective et

$$(g \circ f)^{-1} =$$

Preuve : f et g étant bijectives,

■

V Ensembles finis

V.1 Cardinal d'un ensemble

Définition 12

- Un ensemble E est un **ensemble fini** s'il existe un entier naturel n non nul et une bijection de
- Un ensemble est dit **fini** s'il comporte un nombre fini d'éléments.
- Le cardinal d'un ensemble fini E, noté $\mathrm{Card}(E)$ est le nombre d'éléments de E.

Exemples :

- Les ensembles $\mathbb{N}$ et $\mathbb{R}$ sont
- L'ensemble D des diviseurs positifs de 12 est fini : $D = \{$
- On convient que l'ensemble vide $\emptyset$ est un ensemble fini et que $\mathrm{Card}(\emptyset) =$

V.2 Propriétés

Proposition 7

Soit E **un ensemble fini**. Soit A et B deux parties de E. Alors

- A et B sont des ensembles finis et
- $A = E \iff$
- Si A et B sont disjoints, alors $\operatorname{Card}(A \cup B) =$
- $\operatorname{Card}(A \setminus B) = \operatorname{Card}(A) -$
- Si $A \subset B$ alors
- $\operatorname{Card}(\overline{A}) =$
- $$\operatorname{Card}(A \cup B) =$$
- $$\operatorname{Card}(A \times B) =$$

Proposition 8

Si $A_1, A_2, \ldots, A_k$ sont des ensembles finis deux à deux disjoints, alors

$$\bigcup_{i=1}^{k} A_i = A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_k \quad \text{est un ensemble fini}$$

et $$\operatorname{Card}(A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_k) =$$

VI Notions de dénombrement

Dans ce paragraphe, n et p sont deux entiers naturels tels que $1 \leqslant p \leqslant n$.
E est un ensemble fini de cardinal n, on écrit : $\operatorname{Card}(E) = n$.

VI.1 Combinaisons

Définition 13

On appelle **combinaison** à p éléments de E toute partie de E ayant p éléments. (sans ordre et sans répétition)

Exemple : $E = \{a, b, c, d\}$ $\quad n = 4 \quad p = 2$
Les combinaisons de 2 éléments de E sont

Proposition 9

Soit E un ensemble fini de cardinal n ($n \in \mathbb{N}^*$).
Le nombre de combinaisons de p éléments de E est :

$$\binom{n}{p} = \frac{\qquad}{\qquad} =$$

Preuve : on appelle *arrangement* de p éléments de E est toute liste ordonnée de p éléments de E, deux à deux distincts (sans répétition). On note A_n^p le nombre d'arrangements de p éléments de E.
A_n^p est donc le nombre de façons de choisir, avec ordre et sans répétition, p éléments distincts parmi n. Alors

$$A_n^p =$$

On peut obtenir le nombre d'arrangements A_n^p de p éléments pris dans E d'une autre façon, en procédant en 2 étapes :

■

$\binom{n}{p}$ est le nombre de façons différentes de choisir, sans tenir compte de l'ordre, p éléments distincts parmi n.

Exemple : une urne contient 10 boules numérotées de 1 à 10. Combien y a-t-il de tirages *simultanés* de 3 boules ?

VI.2 Coefficients binomiaux

Proposition 10

- Pour tous entiers n et p tels que $0 \leqslant p \leqslant n$,

$$\binom{n}{n-p} =$$

- Pour tous entiers n et p tels que $1 \leqslant p \leqslant n-1$,

$$\binom{n-1}{p-1} + \binom{n-1}{p} = \qquad\qquad \text{(relation de Pascal)}$$

Le triangle de Pascal :

VI.3 Cardinal de l'ensemble des parties d'un ensemble fini

Proposition 11

Si E est un ensemble fini de cardinal n, alors

$$\operatorname{Card}(\mathcal{P}(E)) =$$

Preuve : $\operatorname{Card}(\mathcal{P}(E)) =$

■