Suites réelles

Notion de suite :
Une suite réelle est une application de $\mathbb{N}$ (ou parfois de $\mathbb{N}^*$) à valeurs dans $\mathbb{R}$.
La suite $u : \begin{array}{ccc} \mathbb{N} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ n & \longmapsto & u(n) \end{array}$ est notée de plusieurs façons :

$$(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \quad , \quad (u_n) \quad \text{ou plus simplement} \quad \boldsymbol{u}$$

I Exemples élémentaires de suites

I.1 Suites arithmétiques

Définition 1

Soit $r \in \mathbb{R}$. Une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est dite **arithmétique de raison** r si, et seulement si,

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} =$$

Formule explicite du terme de rang n : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = u_0 +$

Proposition 1 (somme de termes consécutifs)

- $1 + 2 + 3 + \ldots + n =$
- Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite arithmétique de raison r, alors

$$u_p + u_{p+1} + \ldots + u_{p+n} =$$

I.2 Suites géométriques

Définition 2

Soit $q \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$. Une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est dite **géométrique de raison** q si, et seulement si,

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} =$$

Formule explicite du terme de rang n : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = u_0 \times$

Proposition 2 (somme de $n+1$ termes consécutifs)

- $1 + q + q^2 + q^3 + \ldots + q^n =$ ______________
- Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite géométrique de raison q, alors

$$u_p + u_{p+1} + \ldots + u_{p+n} =$$

Théorème 3

- Si q est un nombre réel tel que $q > 1$ alors $\lim\limits_{n\longrightarrow+\infty} q^n =$
- Si $-1 < q < 1$ alors $\lim\limits_{n\longrightarrow+\infty} q^n =$
- Si $q \leqslant -1$ alors la suite $(q^n)_{n\in\mathbb{N}}$ n'a pas de limite.

I.3 Suites arithmético-géométriques

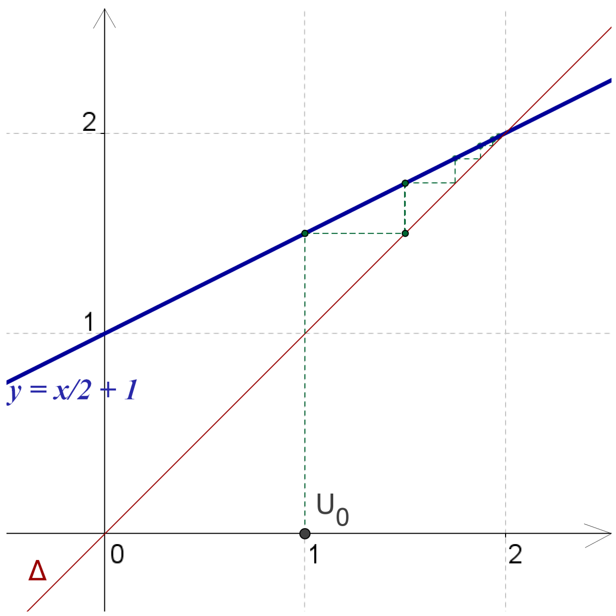
Définition 3

Une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est dite arithmético-géométrique si et seulement si, il existe des constantes $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\,,\,1\}$ et $b \neq 0$ telles que

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = a\, u_n + b$$

Exemple : on considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 1$
et $\forall\, n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = \dfrac{1}{2}\, u_n + 1$

Dans un repère orthonormal, on trace la droite Δ d'équation $y = x$ et la représentation graphique de la fonction affine $x \longmapsto \dfrac{1}{2}x + 1$. Il est alors possible de placer les premiers termes de la suite (u_n) sur l'axe des abscisses sans calcul.



Proposition 4 (formule explicite du terme de rang n)

Soit c la solution de l'équation $x = a\,x + b$.
Alors la suite $\boldsymbol{v}$ de terme général $v_n = u_n - c$ est géométrique de raison a.

On en déduit que $\forall\, n \in \mathbb{N},\ u_n =$

II Comportement global d'une suite réelle

II.1 Monotonie d'une suite

Définition 4

- On dit qu'une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est **croissante** si et seulement si pour tout entier naturel n, $u_{n+1} \geqslant u_n$
- On dit qu'une suite (u_n) est **strictement décroissante** si et seulement si pour tout entier naturel n,
- On dit que la suite u est **constante** si et seulement si pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = u_n$
- Une suite est dite *monotone* lorsqu'elle est *croissante ou décroissante*.

Remarque : pour étudier le sens de variation d'une suite $\boldsymbol{u}$, on pourra étudier le signe de la différence $u_{n+1} - u_n$ ou comparer le rapport $\dfrac{u_{n+1}}{u_n}$ à 1 lorsque tous les termes sont strictement positifs.

Exemple : on pose pour tout entier $n \geqslant 1$, $\quad u_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} =$

II.2 Majorée, minorée, bornée

Définition 5

- On dit qu'une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est **majorée** ssi il existe un réel M tel que pour tout entier naturel n, ...
- On dit qu'une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est **minorée** ssi
- Une suite est dite **bornée** lorsqu'elle est à la fois **majorée et minorée**.

Proposition 5

Une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée ssi il existe un réel positif k tel que pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, $|u_n| \leqslant k$.

Exemple : la suite u de terme général

III Convergence ou divergence

III.1 Suites convergentes

Définition 6

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite et ℓ un nombre réel.
On dit que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers ℓ si et seulement si tout intervalle ouvert centré en ℓ contient tous les termes u_n à partir d'un certain rang.

Proposition 6 (unicité de la limite)

Si une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers ℓ_1 et ℓ_2 , alors

Preuve : raisonnons par l'absurde.

■

Si (u_n) converge vers un nombre ℓ, on dit que ℓ est **la** limite de (u_n) et on note :

Exemples :

Si $p \in \mathbb{N}^*$ alors $\lim\limits_{n\longrightarrow+\infty} \dfrac{1}{n^p} = \dots$ Si $q \in \mathbb{R}$ et $-1 < q < 1$ alors $\lim\limits_{n\longrightarrow+\infty} q^n = \dots$

Remarques :
(i) Dire que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers ℓ revient à dire que $\lim\limits_{n\longrightarrow+\infty} |u_n - \ell| = \dots$

(ii) Les locutions «à partir d'un certain rang» et «pour tout entier naturel n assez grand» ont le même sens, elles signifient plus précisément :

(iii) Toute suite convergente est bornée.

III.2 Suites divergentes

Définition 7

- On dit qu'une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est divergente lorsqu'elle n'admet pas de limite finie quand n tend vers $+\infty$.
- On dit qu'une suite réelle $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers $+\infty$ ssi
- On dit qu'une suite réelle $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ admet pour limite $-\infty$ ssi

Exemples :

- Si $p \in \mathbb{N}^*$ alors $\lim\limits_{n\longrightarrow+\infty} n^p = \ldots\ldots$
- $\lim\limits_{n\longrightarrow+\infty} \mathrm{e}^n = \ldots\ldots$ car $\ldots\ldots$

III.3 Suites extraites

Définition 8

Soit $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite. On appelle **suite extraite** de u toute suite v dont le terme général est de la forme

$$v_n = u_{\varphi(n)}$$

où φ est une application **strictement croissante** de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$.

Exemple :

Proposition 7 (suites extraites d'une suite convergente)

Si u est une suite convergente de limite ℓ, alors toute suite extraite de u $\ldots$

On utilise souvent la contraposée de cette proposition pour montrer qu'une suite bornée est divergente : il suffit d'exhiber deux suites extraites convergeant vers des limites différentes.

Exemple : montrer que la suite u de terme général $u_n = (-1)^n$ est divergente.

IV Opérations algébriques sur les limites de suites réelles

Dans ce paragraphe, ℓ et ℓ' désignent deux nombres réels.

IV.1 Limite d'une somme

Si $\lim\limits_{n \longrightarrow +\infty} u_n =$	ℓ	ℓ	ℓ	$-\infty$	$+\infty$	$+\infty$
et si $\lim\limits_{n \longrightarrow +\infty} v_n =$	ℓ'	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$
Alors $\lim\limits_{n \longrightarrow +\infty} (u_n + v_n) =$						

Forme indéterminée du type :

Preuve : on suppose que (u_n) converge vers $\ell \in \mathbb{R}$ et que

∎

IV.2 Limite d'un produit

Si $\lim\limits_{n \longrightarrow +\infty} u_n =$	ℓ	$\ell (\ell < 0)$	$+\infty$	$-\infty$	0	$-\infty$
et si $\lim\limits_{n \longrightarrow +\infty} v_n =$	ℓ'	$-\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	0
Alors $\lim\limits_{n \longrightarrow +\infty} (u_n \times v_n) =$						

Forme indéterminée du type :

IV.3 Limite d'un quotient

Si $\lim\limits_{n \longrightarrow +\infty} u_n =$	ℓ	$\ell(\ell > 0)$	$\ell(\ell < 0)$	∞	0	∞	$-\infty$	0
et si $\lim\limits_{n \longrightarrow +\infty} v_n =$	$\ell'(\ell' \neq 0)$	0^+	0^-	$\ell'(\ell' \neq 0)$	0	∞	0^-	∞
Alors $\lim\limits_{n \longrightarrow +\infty} \dfrac{u_n}{v_n} =$								

Formes indéterminées du type :

IV.4 Limite de la composée d'une suite et d'une fonction

Théorème 8

Soit f une fonction définie sur un intervalle non vide I de $\mathbb{R}$.
Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de réels appartenant à I.

$$\left.\begin{array}{lrcl} \text{Si} & \lim\limits_{n \longrightarrow +\infty} u_n & = & \alpha \\ \text{et si} & \lim\limits_{x \longrightarrow \alpha} f(x) & = & \ell \end{array}\right\} \quad \text{Alors} \quad \lim\limits_{n \longrightarrow +\infty} f(u_n) =$$

REMARQUE : on peut avoir $\alpha \in \mathbb{R}$, ou $\alpha = +\infty$, ou $\alpha = -\infty$. Idem pour ℓ.

Exemple : $a_n = 2^n \exp(-2^n)$

V Limites et relation d'ordre

V.1 Théorème des gendarmes

Théorème 9

Soit (a_n), (u_n) et (v_n) trois suites réelles vérifiant pour tout entier naturel n assez grand,

$$u_n \leqslant a_n \leqslant v_n$$

Si $\lim\limits_{n \longrightarrow +\infty} u_n = \lim\limits_{n \longrightarrow +\infty} v_n = \ell$ (avec $\ell \in \mathbb{R}$) alors

Preuve : soit $\varepsilon > 0$, ε fixé.

■

Proposition 10 (conséquence)

(i) Tout nombre réel est limite d'une suite de nombres rationnels.

(ii) Entre deux réels distincts a et b, on peut toujours trouver un nombre rationnel.

$$\forall (a, b) \in \mathbb{R}^2, \quad [\, a < b \implies \qquad\qquad\qquad\qquad]$$

Preuve : (i) Soit x un réel fixé. On considère la suite u de terme général $u_n =$

■

Remarques :

- ▷ Entre deux réels distincts a et b, il existe une infinité de rationnels.
- ▷ Tout intervalle ouvert non vide $]a\,,b[$ contient

V.2 Limites et inégalités

Proposition 11

Soit (a_n) et (b_n) deux suites réelles telles que pour tout entier naturel n assez grand, $\boxed{a_n \leqslant b_n}$

(i) Si (a_n) et (b_n) convergent respectivement vers ℓ et ℓ' , alors

(ii) Si $\lim\limits_{n\longrightarrow+\infty} a_n = +\infty$, alors $\lim\limits_{n\longrightarrow+\infty} b_n = \ldots\ldots$

(iii) Si $\lim\limits_{n\longrightarrow+\infty} \ldots\ldots = \ldots\ldots$, alors $\lim\limits_{n\longrightarrow+\infty} a_n = -\infty$

V.3 Relations de comparaison

Définition 9

Soit $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $v = (v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites.

(i) On dit que u est **négligeable devant** v au voisinage de $+\infty$ et on écrit $u_n \underset{(n\to+\infty)}{=} \mathrm{o}(v_n)$ ssi il existe une suite (ε_n) et un entier naturel n_0 tels que

(ii) On dit que u est **équivalente à** v au voisinage de $+\infty$ et on écrit $u_n \underset{(n\to+\infty)}{\sim} v_n$ ssi il existe une suite (x_n) et un entier naturel n_0 tels que

Exemples : au voisinage de $+\infty$,

$$\sqrt{n} \underset{(n\to+\infty)}{=} \mathrm{o}(\quad) \quad , \quad \ln\left(1+\frac{1}{n}\right) \underset{(n\to+\infty)}{\sim} \quad , \quad n\cos n \underset{(n\to+\infty)}{=} \mathrm{o}(\quad)$$

Proposition 12

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites telles que v ne s'annule pas à partir d'un certain rang N_0. Alors

- $u_n \underset{(n\to+\infty)}{=} \mathrm{o}(v_n)$ ssi la suite $\left(\dfrac{u_n}{v_n}\right)_{n\geqslant N_0}$ ...
- $u_n \underset{(n\to+\infty)}{\sim} v_n$ ssi la suite $\left(\dfrac{u_n}{v_n}\right)_{n\geqslant N_0}$ ...

Théorème 13

Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ quatre suites ne s'annulant pas à partir d'un certain rang. Si $a_n \underset{(n\to+\infty)}{\sim} b_n$ et si $u_n \underset{(n\to+\infty)}{\sim} v_n$

Alors

$$a_n\, u_n \underset{(n\to+\infty)}{\sim} \qquad \text{et} \qquad \frac{a_n}{u_n} \underset{(n\to+\infty)}{\sim}$$

Mise en garde :

V.4 Croissances comparées des suites de référence

Théorème 14

Soit p un nombre entier strictement positif et a un réel strictement supérieur à 1.

- $\ln n$ est négligeable devant n^p lorsque n tend vers $+\infty$: $\lim\limits_{n\longrightarrow+\infty} \dfrac{\ln n}{n^p} =$
- n^p est négligeable devant lorsque n tend vers $+\infty$: $\lim\limits_{n\longrightarrow+\infty} \dfrac{n^p}{a^n} = 0$
- a^n est négligeable devant lorsque n tend vers $+\infty$:

Preuve : On pose $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = \dfrac{a^n}{n!}$

■

VI Convergence des suites monotones

VI.1 Un théorème d'existence de limite

Théorème 15 (théorème de la limite monotone, admis)

- Toute suite **croissante** et **majorée**, est
- Toute suite **décroissante** et

Exemple : soit (v_n) la suite définie par $v_0 = 0$ et $v_{n+1} = \sqrt{2 + v_n}$

VI.2 Suites adjacentes

Définition 10

On dit que deux suites réelles (u_n) et (v_n) sont **adjacentes** lorsque :
(i) l'une est croissante
(ii) l'autre est décroissante
(iii) $\lim\limits_{n \longrightarrow +\infty} (v_n - u_n) = 0$

Théorème 16

Si deux suites sont adjacentes, alors elles sont

La limite commune ℓ des deux suites vérifie :

Preuve : on suppose que u est une suite croissante, v est décroissante et $\lim\limits_{n \to +\infty} (v_n - u_n) = 0$.

■