Limites et continuité

Dans tout ce chapitre, I désigne un intervalle de $\mathbb{R}$ non vide et non réduit à un point.

I Limite d'une fonction en l'infini

I.1 Une définition précise

Définition 1

Soit f une fonction définie sur un intervalle I non vide et non majoré, du type $[x_0\,,+\infty[$ ou $]x_0\,,+\infty[$.

- Dire que $f(x)$ tend vers $+\infty$ quand x tend vers $+\infty$ signifie que pour tout réel A, l'intervalle $[A\,,+\infty[$ contient toutes les valeurs $f(x)$ pour x assez grand.
  On écrit alors $\lim\limits_{x\longrightarrow+\infty} f(x) = +\infty$ ou $\lim\limits_{+\infty} f = +\infty$.

$$\lim_{x\longrightarrow+\infty} f(x) = +\infty \iff \forall\, A \in \mathbb{R}\,,\ \exists\, B \in \mathbb{R}\,;\ \forall\, x \in I\,,\ (x \geqslant B \Rightarrow \qquad\qquad)$$

- Soit ℓ un réel. Dire que $f(x)$ tend vers ℓ quand x tend vers $+\infty$ signifie que tout intervalle ouvert centré en ℓ contient toutes les valeurs $f(x)$ pour x assez grand.
  On écrit alors $\lim\limits_{x\longrightarrow+\infty} f(x) = \ell$ ou $\lim\limits_{+\infty} f = \ell$.

$$\lim_{x\longrightarrow+\infty} f(x) = \ell \iff \forall\, \varepsilon > 0\,,\ \exists\, B \in \mathbb{R}\,;$$

Exemples : $\lim\limits_{x\longrightarrow+\infty} \ln x = \ldots\ldots$

Si $p \in \mathbb{N}^*$ alors

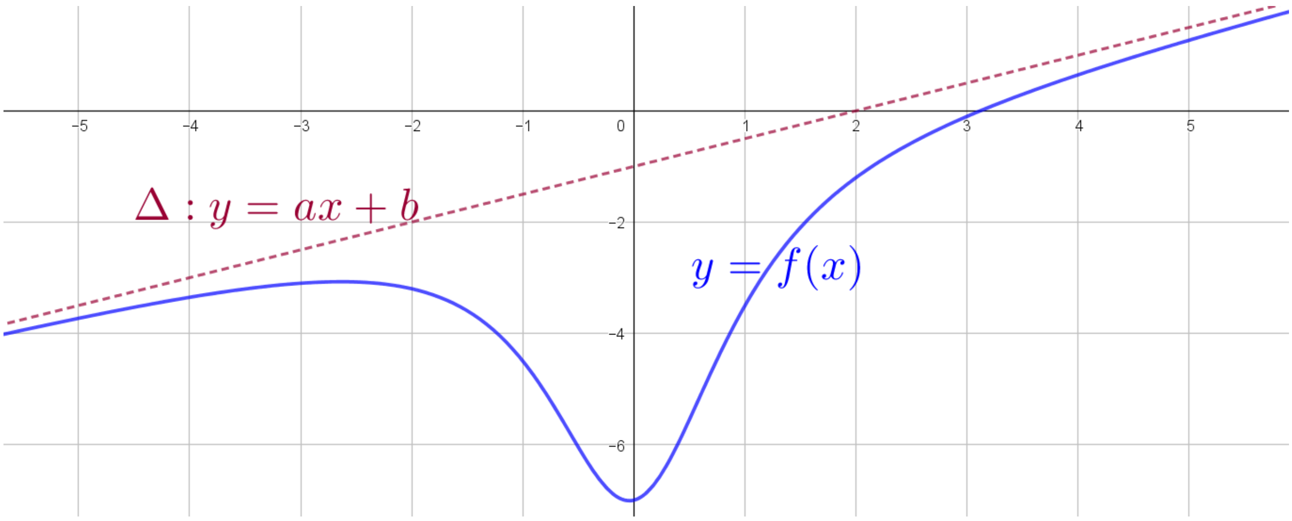
$$\lim_{x\longrightarrow+\infty} \frac{1}{x^p} = \ldots\ldots \qquad \lim_{x\longrightarrow-\infty} \frac{1}{x^p} = \begin{cases} \ldots\ldots\ldots \\ \ldots\ldots\ldots \end{cases}$$

Exercice : rédiger les définitions similaires pour $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \ell$, $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$ et $\lim\limits_{+\infty} f = -\infty$

I.2 Asymptote oblique

Définition 2

Soit f une fonction définie sur un intervalle du type $[x_0\,,+\infty[$.
Si pour tout réel x assez grand, $f(x) = ax + b + \varepsilon(x)$ avec $\lim\limits_{x\longrightarrow+\infty} \varepsilon(x) = 0$,
on dit alors que la droite d'équation $y = ax + b$ est asymptote à la courbe représentative de f en $+\infty$.



II Limites de fonctions en un point a

II.1 Des définitions précises

Définition 3

Soit f une fonction définie sur un intervalle non vide I de $\mathbb{R}$.
Soient a et ℓ deux réels tels que a soit un élément ou une extrémité de I.

- On dit que f admet pour limite ℓ au point a et on note $\lim\limits_{x \longrightarrow a} f(x) = \ell$ ssi

- On dit que f admet pour limite $-\infty$ au point a et on note $\lim\limits_{x \longrightarrow a} f(x) = -\infty$ ssi

On notera que f n'est pas nécessairement définie en a. Mais si f est définie en a ($a \in I$), la limite éventuelle de f en a ne peut être que ...

Exemple : pour $I =]1, +\infty[$, déterminer, sous réserve d'existence, $\lim\limits_{x \longrightarrow 1} \sqrt{\dfrac{x+1}{x^2-1}}$

Proposition 1 (unicité de la limite)

Si une fonction f admet une limite en un point a, alors cette limite est ...

II.2 Limite à droite, limite à gauche

Définition 4

- On dit qu'une fonction $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ admet une **limite à gauche** en a lorsque la restriction de f à $]-\infty\,,a[\cap I$ admet une limite en a.
On la note alors $\lim\limits_{x \longrightarrow a^-} f(x)$ ou encore $\lim\limits_{\substack{x \longrightarrow a \\ x<a}} f(x)$.

- On dit qu'une fonction $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ admet une **limite à droite** en a lorsque la restriction de f à

Exemple : $\lim\limits_{\substack{x \longrightarrow 0 \\ x<0}} \dfrac{1}{x} = \ldots\ldots$ $\lim\limits_{\substack{x \longrightarrow 0 \\ x>0}} \dfrac{1}{x} = \ldots\ldots$

Proposition 2

Soit f une fonction définie sur un intervalle non vide I de $\mathbb{R}$ et ℓ un nombre réel.
Soit a un élément de I tel que a n'est pas une extrémité de I.

f admet pour limite ℓ au point a ssi

Exemple : la fonction partie entière $x \longmapsto \lfloor x \rfloor$ n'a pas de limite en ...

Définition 5

Soit a un réel. On dit que la droite d'équation $x = a$ est asymptote verticale à la représentation graphique de f dans chacun des cas suivants :

$$\lim_{x \longrightarrow a^-} f(x) = +\infty \quad \text{ou} \quad \lim_{x \longrightarrow a^+} f(x) = +\infty$$

$$\text{ou} \quad \lim_{x \longrightarrow a^-} f(x) = -\infty \quad \text{ou} \quad \lim_{x \longrightarrow a^+} f(x) = -\infty$$

II.3 Caractérisation séquentielle de la limite

Théorème 3

Soit $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction définie sur un intervalle non vide I de $\mathbb{R}$.
Soit α un élément de I ou une extrémité de I et $\ell \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$. Alors,

$$\lim_{x \longrightarrow \alpha} f(x) = \ell \iff \forall\,(u_n) \in I^{\mathbb{N}}\ ,$$

Ce théorème permet souvent de montrer qu'une fonction f n'admet pas de limite en α.

Preuve : supposons par exemple que $\alpha = a$ et ℓ sont des nombres réels.

$\blacksquare$

Exemple : la fonction sinus $x \longmapsto \sin(x)$ n'a pas de limite en $+\infty$.

III Comment déterminer une limite ?

Définition 6

Soit f une fonction définie sur un intervalle non vide I de $\mathbb{R}$.

(i) Soit $a \in \mathbb{R}$ un élément de I ou une extrémité de I. On dit qu'une propriété portant sur f est vraie au voisinage du réel a ssi il existe un intervalle ouvert J_a de centre a tel que cette propriété soit vraie sur $J_a \cap I$.

(ii) Soit I un intervalle non majoré, du type $[x_0\,, +\infty[$ ou $]x_0\,, +\infty[$. On dit qu'une propriété portant sur f est vraie au voisinage de $+\infty$ ssi il existe un réel $b > x_0$ tel que cette propriété soit vraie sur $]b\,,\,+\infty[$.

III.1 Opérations algébriques sur les limites

Les énoncés concernant les opérations algébriques sur les limites (somme, produit et quotient) sont entièrement analogues à ceux relatifs aux suites (voir chapitre 3, paragraphe IV).

Limite d'une fonction polynôme ou rationnelle en l'infini

- Une fonction polynôme a la même limite en $+\infty$ (ou en $-\infty$) que son terme de plus haut degré.
- Une fonction rationnelle a la même limite en $+\infty$ (ou en $-\infty$) que le quotient du terme de plus haut degré de son numérateur, par le terme de plus haut degré de son dénominateur.

Exemple :

III.2 Ordre et limites

Proposition 4 ($\alpha \in \mathbb{R}$ ou $\alpha = +\infty$ ou $\alpha = -\infty$)

Soit f et g deux fonctions définies sur un intervalle non vide I tel que α est un élément ou une borne de I. On suppose que pour tout réel x voisin de α, $\boxed{f(x) \leqslant g(x)}$

(i) Si f et g admettent des limites finies en α , alors

(ii) Si $\lim\limits_{x \longrightarrow \alpha} f(x) = +\infty$, alors $\lim\limits_{x \longrightarrow \alpha} g(x) = \ldots\ldots$

(iii) Si $\lim\limits_{x \longrightarrow \alpha} \ldots\ldots = \ldots\ldots$, alors $\lim\limits_{x \longrightarrow \alpha} f(x) = -\infty$

Théorème 5 (théorème d'encadrement)

Soient f, u et v trois fonctions vérifiant pour tout réel x voisin de α,

$$u(x) \leqslant f(x) \leqslant v(x)$$

Si $\lim\limits_{x \longrightarrow \alpha} u(x) = \lim\limits_{x \longrightarrow \alpha} v(x) = \ell$
Alors f admet pour limite ...

Proposition 6 (théorème de la limite monotone)

Soit a un réel et $b \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ tel que $a < b$.
Soit $f : [a\,,b[\longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction **croissante** sur l'intervalle $[a\,,b[$.

(i) Si f est majorée, alors f admet

(ii) Si f n'est pas majorée, alors $\lim\limits_{x \longrightarrow b} f(x) =$ ...

Preuve : (ii) on suppose que f est croissante sur $[a\,,+\infty[$ et que f n'est pas majorée.

■

III.3 Limite d'une fonction composée

Théorème 7

Soit α un élément ou une borne d'un intervalle I.
Soient $f : I \longrightarrow J$ et $g : J \longrightarrow \mathbb{R}$ deux fonctions définies respectivement sur des intervalles I et J tels que $f(I) \subset J$.

$$\left.\begin{array}{ll} \text{Si} & \lim\limits_{x \longrightarrow \alpha} f(x) = b \\ \text{et si} & \lim\limits_{t \longrightarrow b} g(t) = c \end{array}\right\} \quad \text{alors}$$

Preuve : on suppose que $\lim\limits_{+\infty} f = +\infty$ et que $\lim\limits_{+\infty} g = c$ avec c réel.

■

Exemple : limite en $+\infty$ de $\varphi : x \longmapsto x \sin\left(\dfrac{1}{x}\right)$.

IV Comparaison des fonctions au voisinage d'un point

a désigne un élément ou une extrémité de l'intervalle I ($a \in \mathbb{R}$ ou $a = +\infty$ ou $a = -\infty$).

IV.1 Négligeabilité

Définition 7

Soit f et g deux fonctions définies sur I.
On dit que f est **négligeable devant** g au voisinage de a s'il existe une fonction $\varepsilon : I \longrightarrow \mathbb{R}$ définie sur I telle que

$$\forall x \in I,\ f(x) = g(x)\,\varepsilon(x) \quad \text{avec } \lim$$

On note alors $f(x) \underset{(x\to a)}{=} o(g(x))$ ou plus simplement $f \underset{a}{=} o(g)$.

Exemples :

- $x \underset{(x\to\quad)}{=} o(\sqrt{x})$ et $\sqrt{x} \underset{(x\to\quad)}{=} o(x)$
- Si $0 < \alpha < \beta$ alors x^{α}
- $f \underset{a}{=} o(1) \iff \lim\limits_{x\longrightarrow a} f(x) =$

Proposition 8

(i) Dans le cas où la fonction g ne s'annule pas sur $I \setminus \{a\}$,

$$f(x) \underset{(x \longrightarrow a)}{=} o(g(x)) \iff \lim_{x \longrightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} =$$

(ii) La relation «est négligeable devant» est transitive : si $f \underset{a}{=} o(g)$ et si $g \underset{a}{=} o(h)$ alors

IV.2 Équivalence

Définition 8

Soit f et g deux fonctions définies sur I.
On dit que f est **équivalente à** g au voisinage de a s'il existe une fonction $\varepsilon : I \longrightarrow \mathbb{R}$ définie sur I telle que

$$\forall x \in I,\ f(x) = g(x)\big(1 + \varepsilon(x)\big) \quad \text{avec } \lim$$

On note alors $f(x) \underset{(x \longrightarrow a)}{\sim} g(x)$ ou plus simplement $f \underset{a}{\sim} g$.

Exemples : équivalents classiques au voisinage de zéro

$$\sin x \underset{(x \longrightarrow 0)}{\sim} \qquad ; \qquad e^x - 1 \underset{(x \longrightarrow 0)}{\sim} \qquad ; \qquad \ln(1+x) \underset{(x \longrightarrow 0)}{\sim} \qquad ; \qquad 1 - \cos x \underset{(x \longrightarrow 0)}{\sim}$$

Proposition 9

(i) Dans le cas où la fonction g ne s'annule pas sur $I \setminus \{a\}$,

$$f(x) \underset{(x \longrightarrow a)}{\sim} g(x) \iff \lim_{x \longrightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} =$$

(ii) La relation «est équivalente à» est symétrique : si $f \underset{a}{\sim} g$ alors

(iii) La relation «est équivalente à» est transitive : si $f \underset{a}{\sim} g$ et si $g \underset{a}{\sim} h$ alors

(iv) Si $f \underset{a}{\sim} g$ et si $h \underset{a}{\sim} k$ alors $\qquad fh$

(v) Si f et g ne s'annulent pas au voisinage de a et si $f \underset{a}{\sim} g$, alors $\dfrac{1}{f}$

La notion d'équivalent est un moyen efficace pour calculer des limites à partir des équivalents classiques. Attention toutefois dans la manipulation de ces équivalents. Seules les opérations relatives à la multiplication et le passage à l'inverse sont autorisées. On ne peut pas additionner ou composer des équivalents.

Exemple : déterminer la limite éventuelle en zéro de la fonction $f : x \longmapsto \dfrac{\sin^2 x}{x^3 + x^4}$

V Fonctions continues

V.1 Continuité en un point

Définition 9

Soit $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction définie sur un intervalle non vide I de $\mathbb{R}$.
Soit a un réel appartenant à I.
On dit que f est **continue en** a ssi f admet pour limite ...

Proposition 10

Soit $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction définie sur un intervalle non vide I de $\mathbb{R}$. Soit a un réel de I.

Alors f est continue en a ssi pour toute suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de points de I, qui converge vers a, la suite

V.2 Continuité globale

Définition 10

Soit $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction définie sur un intervalle non vide I de $\mathbb{R}$.
On dit que f est **continue sur** I ssi f est continue en tout point de I.

La continuité d'une fonction sur un intervalle signifie qu'on peut tracer sa représentation graphique sans lever le crayon : la courbe ne présente aucun saut, aucun trou, aucune rupture.

Définition 11

Soit $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction définie sur un intervalle I et a une borne réelle ouverte de I. On dit que f est prolongeable par continuité au point a ssi f admet une limite finie ℓ en a. On définit alors f en a en posant $f(a) =$

Exemple : la fonction $f :]0\,,+\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$ est définie par $f(x) = \dfrac{\sin x}{x}$.

Proposition 11

Si f et g sont deux fonctions continues sur I et si $\lambda \in \mathbb{R}$, alors

(i) λf est continue sur I.

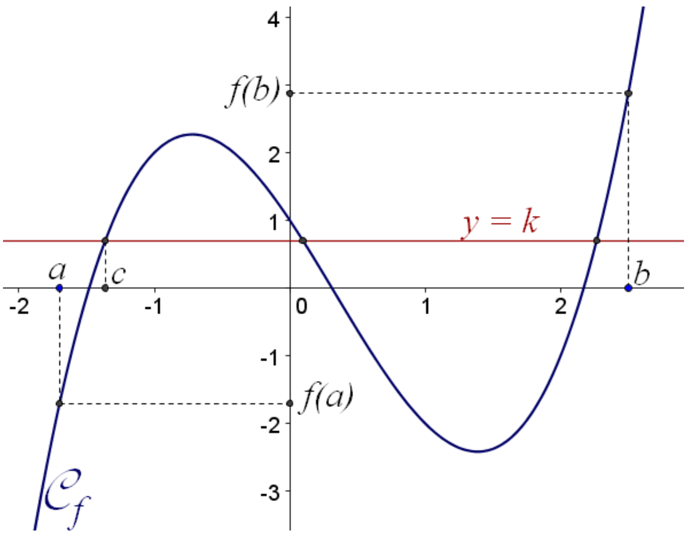
(ii) $f + g$ est continue sur I.

(iii) $f \times g$ est continue sur I.

(iv) $\dfrac{f}{g}$ est continue sur I en supposant de plus que $\forall x \in I\ ,\ g(x) \neq 0$.

Exemple : les fonctions polynômes et les fractions rationnelles sont continues sur leur intervalle de définition.

V.3 Théorème des valeurs intermédiaires



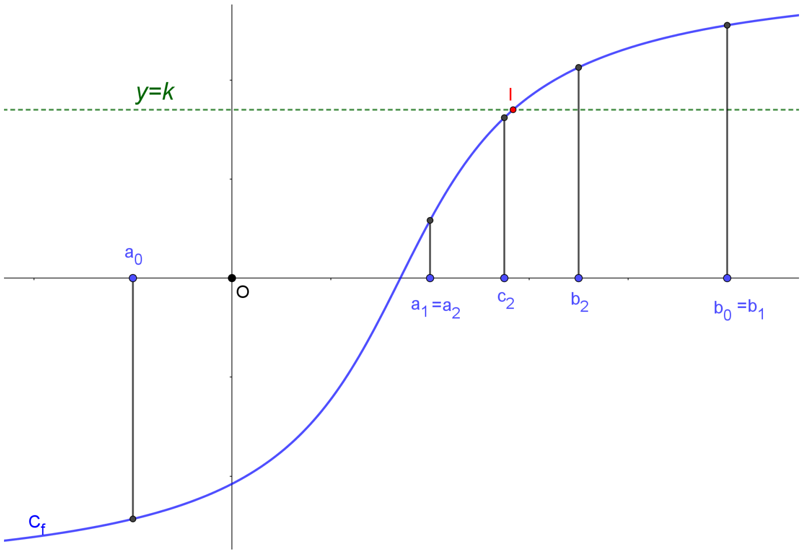
Théorème 12

Soit $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue sur un intervalle I. Soit a et b deux réels de I.
Alors pour tout réel k compris entre $f(a)$ et $f(b)$,
il existe au moins un réel c compris entre a et b, tel que

$$f(c) = k$$

Preuve : on se donne une fonction f continue sur un intervalle I, deux réels a et b de I tels que $a < b$ et k un réel compris entre $f(a)$ et $f(b)$.

On suppose que $f(a) \leqslant f(b)$ de sorte que $k \in [f(a)\,,\,f(b)]$.



■

Reformulation : l'image d'un intervalle par une fonction continue est ...

V.4 Fonctions continues et strictement monotones

Théorème 13 («théorème de la bijection»)

Soit f une fonction **continue** et **strictement** monotone sur un **intervalle** I. Alors

(i) $f(I)$ est un intervalle dont les bornes sont

(ii) f est une bijection de I sur

(iii) la bijection réciproque f^{-1} est continue et strictement monotone sur $f(I)$, de

Exemple : la fonction «cube»

V.5 Image continue d'un segment

Théorème 14 (admis)

- Toute fonction continue sur un segment est
- Si f est une fonction continue sur le segment $[a\,,\,b]$ avec $a < b$ alors