Nombres complexes

Il existe un ensemble noté $\mathbb{C}$ de nombres dits «complexes» vérifiant :

- $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$
- $\mathbb{C}$ contient le nombre i défini par :
- tout nombre complexe z s'écrit de manière unique sous la forme $z = x + i\,y$ (avec x et y réels). Cette écriture est appelée la *forme algébrique* de z.

Définition 1

Soit $z = x + i\,y$ un nombre complexe (x, y réels)
On dit que x est la **partie réelle** de z , on écrit $x = \Re\mathrm{e}(z)$
On dit que y est la **partie imaginaire** de z , on écrit $y = \Im\mathrm{m}(z)$
Lorsque $\Re\mathrm{e}(z) = 0$, on dit que z est un

On note $\mathbb{C}^*$ l'ensemble des ...

I Conjugué et module d'un nombre complexe

I.1 Conjugaison dans $\mathbb{C}$

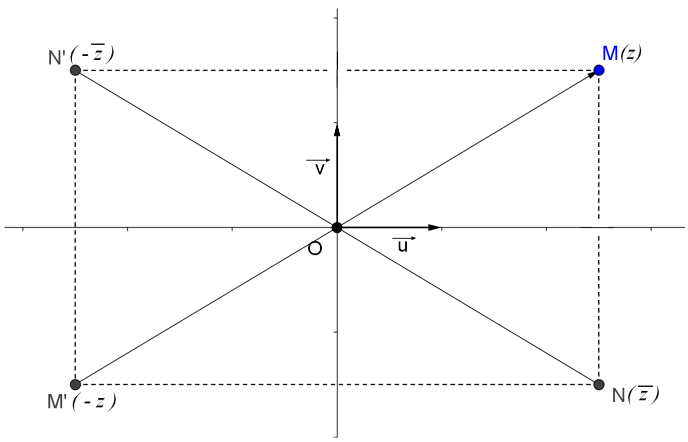
Définition 2

Soit $z = x + i\,y$ un nombre complexe (x, y réels)

On appelle **conjugué** de z le nombre complexe noté $\overline{z}$ (lire «z barre») défini par

$$\overline{z} =$$

Dans le plan complexe, les points M et N d'affixes respectives z et $\overline{z}$ sont ......



Proposition 1

Pour tous complexes z et z',

- $z \in \mathbb{R} \iff z = \overline{z}$
- z est imaginaire pur ssi
- $\overline{z + z'} = \overline{z} + \overline{z'}$ et $\overline{z\,z'} = \overline{z} \times \overline{z'}$
- Si $z' \neq 0$ alors $\overline{\left(\dfrac{1}{z'}\right)} = \dfrac{1}{\overline{z'}}$ et $\overline{\left(\dfrac{z}{z'}\right)} =$
- Si $z \neq 0$ alors $\forall\, n \in \mathbb{Z},\ \overline{z^n} =$

Preuve : soit

■

I.2 Module

Définition 3

Soit $z = x + i\,y$ un nombre complexe ($x,\ y$ réels).
On appelle **module** de z le nombre réel positif noté $|z|$ défini par :

Remarque : si $z = x + i\,y$ avec x et y réels alors $\boxed{|z|^2 = \qquad\qquad =\qquad\qquad}$

Dans le plan complexe, si z est l'affixe d'un point M alors $|z| =$

I.3 Propriétés du module

Théorème 2

Soit A et B deux points du plan complexe d'affixes respectives z_A et z_B.

Alors $AB =$

Proposition 3

Pour tous complexes z et z',

- $|z| = 0 \iff z =$
- $|\overline{z}| =$
- $|z\,z'| =$
- $\forall\, n \in \mathbb{N},\ |z^n| =$
- Si $z' \neq 0$ alors $\left|\dfrac{1}{z'}\right| = \dfrac{1}{|z'|}$ et $\left|\dfrac{z}{z'}\right| =$
- Inégalité triangulaire :

$$|z + z'| \leqslant$$

Preuve : •

■

II Suites complexes

Définition 4

Soit $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de nombres complexes et $\ell \in \mathbb{C}$.
On dit que $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers ℓ si, et seulement si, tout disque ouvert centré en ℓ contient tous les termes z_n à partir d'un certain rang.

Exemple : soit q un nombre complexe tel que $|q| < 1$. Alors la suite $(q^n)_{n\in\mathbb{N}}$

Proposition 4

Soit $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite complexe et $\ell = a + i\,b$ un nombre complexe avec a et b réels.
Alors (z_n) converge vers ℓ si, et seulement si,

Preuve : on vérifie d'abord que pour tout nombre complexe Z, $\quad |\Re\mathrm{e}(Z)| \leqslant |Z| \leqslant |\Re\mathrm{e}(Z)| + |\Im\mathrm{m}(Z)|$

■

III Complexes de module 1

Dans tout ce paragraphe, le plan complexe est muni d'un repère orthonormal direct $(O\,;\overrightarrow{u}\,,\overrightarrow{v})$.

On note $\mathbb{U}$ l'ensemble des complexes de module 1.

$$\mathbb{U} = \{$$

L'ensemble des points d'affixe dans $\mathbb{U}$ correspond géométriquement au

III.1 Notation exponentielle

Proposition 5

Pour tout complexe z de module 1, il existe un réel θ (non unique) tel que $\boxed{z = \cos\theta + i\,\sin\theta}$

Définition 5

Pour tout réel θ, on pose

$$\mathrm{e}^{i\,\theta} =$$

Exemples : $\quad 1 = \mathrm{e}^{i\cdots} \quad ; \quad i = \mathrm{e}^{i\cdots} \quad ; \quad -i = \mathrm{e}^{i\cdots} \quad ; \quad 1 + \mathrm{e}^{i\,\pi} =$

$\mathrm{e}^{i\,\frac{\pi}{3}} =$

Proposition 6

Pour tous réels θ et θ',

- $\left|e^{i\theta}\right| =$ d'où $e^{i\theta} \in$
- $\overline{e^{i\theta}} =$
- $e^{i\theta} \times e^{i\theta'} =$
- $\dfrac{e^{i\theta}}{e^{i\theta'}} =$

- *Formule de Moivre* :

  pour tout entier relatif n,

  $\left(e^{i\theta}\right)^n =$

Preuve : soit θ et θ' deux nombres réels.

■

Théorème 7 (formules d'Euler)

Pour tout réel θ, $\cos\theta =$ et $\sin\theta =$

III.2 Arguments d'un complexe non nul

Définition 6

Soit z un nombre complexe non nul.
On appelle **argument** de z et on note $\arg(z)$, tout nombre réel θ tel que $\dfrac{z}{|z|} = e^{i\theta}$

Exemple : posons $z = 1 - i$. Alors $|z| =$

Remarque : si θ est un argument de z ($z \in \mathbb{C}^*$), alors tout autre argument de z est de la forme

Proposition 8 (propriétés des arguments)

Pour tous complexes z et z' non nuls,

- $\arg(z\,z') =$
- $\forall\, n \in \mathbb{N}, \quad \arg\left(z^n\right) =$
- $\arg\left(\dfrac{1}{z'}\right) =$ et $\arg\left(\dfrac{z}{z'}\right) =$

Proposition 9 (Interprétation géométrique d'un argument)

• Soit z un complexe non nul et M le point d'affixe z. Alors

$$\arg(z) = \left(\widehat{\overrightarrow{u}\,,\overrightarrow{OM}}\right)$$

• Soit A, B, C et D quatre points d'affixes respectives z_A, z_B, z_C et z_D tels que $A \neq B$ et $C \neq D$. Alors

$$\arg(z_B - z_A) = \ \ldots\ldots\ldots\ldots \qquad \text{et} \qquad \arg\left(\frac{z_A - z_B}{z_C - z_D}\right) = \ \ldots\ldots\ldots\ldots$$

Preuve : $\arg(z_B - z_A) =$

■

CONSÉQUENCES :

i. Tout réel strictement négatif a un argument égal à

ii. Étant donnés deux complexes **non nuls** z et z', $\quad z = z' \iff \Bigg\{$

iii. Si $z \in \mathbb{C}^*$ alors $\quad \arg(\overline{z}) = \qquad$ et $\quad \arg(-z) =$

III.3 Forme trigonométrique d'un complexe non nul

Proposition 10

Soit $z \in \mathbb{C}^*$. Posons $r = |z|$ et $\theta = \arg(z)$
Alors

$$z =$$

Cette écriture est appelée la *forme trigonométrique* de z.

Exemple : écrire sous forme trigonométrique le complexe $z = i - \sqrt{3}$.

IV Résolution d'équations

IV.1 Racines carrées d'un complexe non nul

Proposition 11

Si $a \in \mathbb{C}^*$, alors l'équation $z^2 = a$ admet exactement deux solutions distinctes dans $\mathbb{C}$.

Exemple : : résoudre $z^2 = 3 - 4i$.

IV.2 Racines d'un trinôme du second degré

Proposition 12

Soit a, b et c trois complexes avec $a \neq 0$. On veut résoudre l'équation (E) : $a\,z^2+b\,z+c=0$
On définit
$$\Delta = b^2 - 4ac \qquad \text{le discriminant de } P(z) =$$
• Si $\Delta \neq 0$ alors (E) admet exactement deux solutions complexes distinctes
$$z_1 = \qquad\qquad \text{et} \quad z_2 =$$
où δ vérifie $\delta^2 = \Delta$.
• Si $\Delta = 0$, alors (E) admet une seule solution complexe (dite double)
$$z_0 =$$

Exemple : résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $z^2 - 3i\,z - 3 + i = 0$.

IV.3 Racines n-ièmes de l'unité

Dans cette partie, n désigne un entier naturel non nul.

Définition 7

On appelle racine n-ième de l'unité tout complexe z vérifiant $z^n = 1$.
On note $\mathbb{U}_n$ l'ensemble des racines n-ièmes de l'unité.

Exemples : $\mathbb{U}_1 =$ et $\mathbb{U}_2 =$

Théorème 13

Les racines n-ièmes de l'unité sont les n nombres complexes deux à deux distincts :
$$\omega_k =$$
avec $k \in \{0\,,\,1\,,\,2\,,\ldots,\,n-1\}$

Ainsi $\mathbb{U}_n$ est un ensemble à n éléments que l'on peut écrire sous la forme

Preuve : Une solution de l'équation $z^n = 1$ est non nulle et admet pour module ...

■

Interprétation géométrique :
Dans le plan complexe, pour $n \geqslant 3$, on note $M_0,\ M_1,\ M_2, \ldots,\ M_{n-1}$ les images respectives des complexes $\omega_0,\ \omega_1,\ \omega_2, \ldots,\ \omega_{n-1}$. Alors ces n points sont sur le cercle de centre ... et de rayon .... De plus,

$$\left(\widehat{\overrightarrow{OM_0}\ ,\ \overrightarrow{OM_1}}\right) = \left(\widehat{\overrightarrow{OM_1}\ ,\ \overrightarrow{OM_2}}\right) = \left(\widehat{\overrightarrow{OM_2}\ ,\ \overrightarrow{OM_3}}\right) = \ldots =$$

$$\text{D'où} \quad M_0M_1 = M_1M_2 = M_2M_3 = \ldots =$$

Par conséquent le n-gone $M_0M_1M_2 \ldots M_{n-1}$ est un ...

Exemple : les racines cubiques de l'unité sont

Proposition 14 (conséquence du théorème 13)

Soit a un nombre complexe non nul.
Alors l'équation $z^n = a$ admet dans $\mathbb{C}$, exactement n solutions deux à deux distinctes.

Preuve : Posons $\theta = \arg(a)$ et $z_0 = |a|^{\frac{1}{n}} \, \mathrm{e}^{i\,\frac{\theta}{n}}$ alors $z_0 \neq 0$ et $z_0^n =$

■

V Exponentielle d'un nombre complexe

V.1 Définition

Définition 8

Soit $z = x + i\,y$ un complexe (x et y étant réels).
On appelle **exponentielle de** z le nombre complexe noté $\exp(z)$ défini par :

$$\exp(z) =$$

Exemple :
$\exp\left(\ln 2 - i\,\dfrac{\pi}{6}\right) =$

Remarques :

- Si $z = x$ est un réel, alors $\exp(z) =$
  L'exponentielle complexe prolonge l'exponentielle réelle connue.
- Si $z = i\,\theta$ est un imaginaire pur, alors $\exp(z) =$
  L'exponentielle complexe prolonge aussi l'exponentielle imaginaire.
- On note souvent e^z au lieu de $\exp(z)$.

V.2 Propriétés

Proposition 15

Soit z et z' deux nombres complexes. Alors

- $|\exp(z)| =$
- $\arg(\mathrm{e}^z) =$
- $\exp(z+z') =$
- $\exp(z) \neq 0 \quad$ et $\quad \dfrac{1}{\exp(z)} =$

Preuve : si $z = x + i\,y$ avec x et y réels, alors

$\blacksquare$

Théorème 16

Soit z et z' deux nombres complexes.

$$\exp(z) = \exp(z') \iff$$