Dérivation

Dans tout ce chapitre, I désigne un intervalle de $\mathbb{R}$ non vide et non réduit à un point.

I Dérivabilité en un point

Proposition 1

Soient f une fonction définie sur I et a un point de I. Soit $\ell \in \mathbb{R}$.
Les trois énoncés suivants sont équivalents :

(i) La fonction $x \longmapsto \dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}$ admet une limite finie ℓ en a.

(ii) La fonction $h \longmapsto \dfrac{f(a+h)-f(a)}{h}$ admet une limite finie ... en zéro.

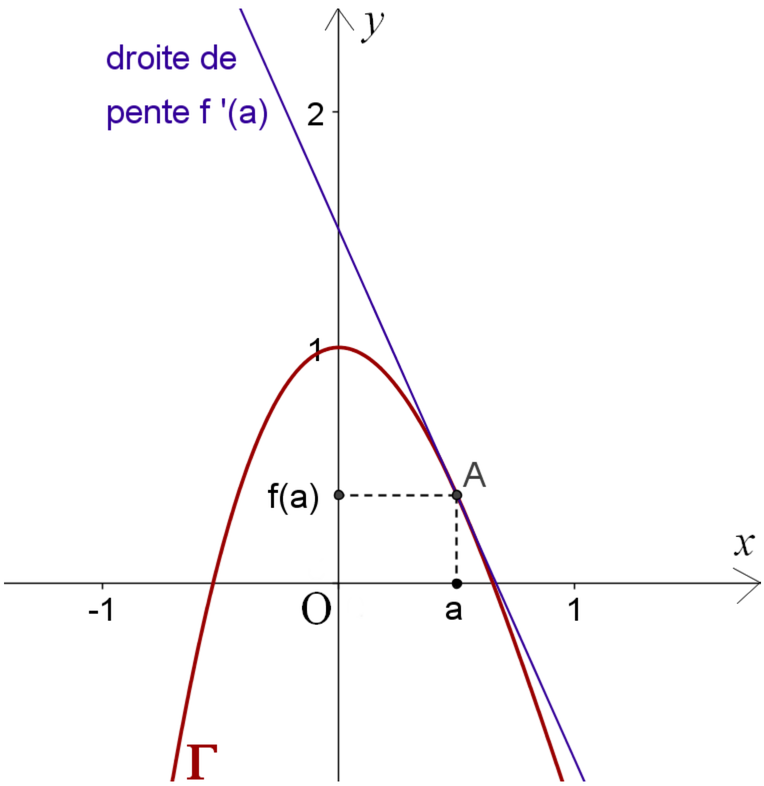
(iii) Il existe une fonction ε telle que pour tout réel h voisin de zéro,

$f(a+h) =$ avec $\lim\limits_{h \longrightarrow 0} \varepsilon(h) = 0$

Définition 1

Lorsque l'une des 3 conditions précédentes est réalisée, on dit que f est dérivable en a.
Le réel ℓ est appelé nombre dérivé de f en a, on le note $f'(a)$.

Si f est dérivable en a, alors $f'(a) = \lim\limits_{x \longrightarrow a} \dfrac{f(x)-f(a)}{x-a} = \lim\limits_{h \longrightarrow 0} \dfrac{\cdots\cdots\cdots}{\cdots\cdots}$



Interprétation graphique : Soit f une fonction dérivable en un réel a de I et Γ son graphe. La tangente à Γ au point $A(a, f(a))$ est la droite passant par A, de coefficient directeur $f'(a)$. L'équation réduite de cette tangente est :

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Proposition 2

Si f est dérivable en a alors f est

ATTENTION : la réciproque est fausse. Proposer deux contre-exemples.

Définition 2

Soit $a \in I$.
Une fonction $f : I \longmapsto \mathbb{R}$ est dite **dérivable à droite** en a lorsque sa restriction à $I \cap [a, +\infty[$ est dérivable en a. On note alors $f'_d(a)$ ce nombre dérivé.

Une fonction $f : I \longmapsto \mathbb{R}$ est dite **dérivable à gauche** en a lorsque

Proposition 3

Soit a un point intérieur à I.
f est dérivable en a si et seulement si f est dérivable à gauche et à droite en a avec $f'_d(a) = f'_g(a)$.

II Fonction dérivée

Définition 3

On dit qu'une fonction f est dérivable sur I si et seulement si f est dérivable en tout point de I. On définit alors la **fonction dérivée** de f sur I par $x \longmapsto f'(x)$.

II.1 Dérivées des fonctions usuelles

fonction f	dérivable sur I	dérivée f'
$f(x)=k$; k constante	$I=$	$f'(x)=$
$f(x)=x^n$; $n\in\mathbb{N}^*$	$I=\mathbb{R}$	$f'(x)=$
$f(x)=\dfrac{1}{x}$	$I=]0,+\infty[$ $I=]-\infty,0[$	$f'(x)=$
$f(x)=\sqrt{x}$	$I=$	$f'(x)=$
$f(x)=\dfrac{1}{x^n}$; $n\in\mathbb{N}^*$	$I=]0,+\infty[$ $I=]-\infty,0[$	$f'(x)=$
$f(x)=\exp x$	$I=$	$f'(x)=$
$f(x)=\ln x$	$I=$	$f'(x)=$
$f(x)=\sin x$	$I=\mathbb{R}$	$f'(x)=$
$f(x)=\cos x$	$I=\mathbb{R}$	$f'(x)=$
$f(x)=\tan x$	$I=\left]-\dfrac{\pi}{2}+k\pi,\dfrac{\pi}{2}+k\pi\right[$ avec $k\in\mathbb{Z}$	$f'(x)=$ $=\dfrac{1}{\cos^2 x}$

II.2 Opérations sur les fonctions dérivables

Théorème 4

Soient u et v deux fonctions dérivables sur I.

Hypothèse supplémentaire	Conclusions	
	Dérivabilité	Fonction dérivée
	la fonction $u+v$ est dérivable sur I	$(u+v)'=$
$\lambda\in\mathbb{R}$	la fonction $\lambda\,u$ est dérivable sur I	$(\lambda\,u)'=$
	la fonction $u.v$ est dérivable sur I	$(u.v)'=$
$\forall\,x\in I,\ v(x)\neq 0$	la fonction $\dfrac{1}{v}$ est dérivable sur I	$\left(\dfrac{1}{v}\right)'=$ ――――
$\forall\,x\in I,\ v(x)\neq 0$	la fonction $\dfrac{u}{v}$ est dérivable sur I	$\left(\dfrac{u}{v}\right)'=$ ――――

Preuve : on suppose que u et v sont deux fonctions dérivables en un point a de I.

■

Théorème 5

Soient u et v deux fonctions définies respectivement sur I et J.
Si u est dérivable sur I, si v est dérivable sur J et si $\forall\, x \in I,\ u(x) \in J$
Alors $v \circ u$ est dérivable sur I et

$$\forall\, x \in I, \quad (v \circ u)'(x) =$$

Preuve : on suppose que u est dérivable en $a \in I$ et que v est dérivable en $b = u(a)$.

■

COROLLAIRE : soit u une fonction dérivable sur I.

- Si $n \in \mathbb{N}^*$ alors la fonction u^n est dérivable sur I et $(u^n)' =$
- Si $n \in \mathbb{N}^*$ et si $\forall\, x \in I,\ u(x) \neq 0$ alors la fonction $\dfrac{1}{u^n}$ est dérivable sur I et $\left(\dfrac{1}{u^n}\right)' =$
- Si $\forall\, x \in I,\ u(x) > 0$ alors la fonction $\sqrt{u}$ est dérivable sur I et $\left(\sqrt{u}\right)' =$
- La fonction $\exp \circ u$ est dérivable sur I et $(\exp \circ u)' =$
- Si $\forall\, x \in I,\ u(x) > 0$ alors la fonction $\ln \circ u$ est dérivable sur I et $(\ln \circ u)' =$

Exemple : on définit la fonction f sur $I = \mathbb{R}^{+*}$ par $f(x) = x^{\frac{1}{x}} =$

II.3 Dérivabilité de la réciproque d'une bijection

Rappelons que si $f : I \longrightarrow J$ est une bijection, sa bijection réciproque $f^{-1} : J \longrightarrow I$ vérifie

$$\forall\, x \in I,\ f^{-1}(f(x)) = \qquad \text{et} \qquad \forall\, y \in J,\ f(f^{-1}(y)) =$$

Théorème 6 (fonction réciproque)

Soit f une fonction continue et strictement monotone sur un intervalle I.
Si f est dérivable en un point a de I et si $f'(a) \neq 0$,
alors la bijection réciproque f^{-1} est dérivable en $b = f(a)$ et

$$(f^{-1})'(b) =$$

Preuve : posons $J = f(I)$. Montrons que f^{-1} est dérivable en b.

■

Exemple : considérons la restriction f de la fonction tangente à l'intervalle ouvert $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$.

III Théorèmes de Rolle et des accroissements finis

III.1 Extremums locaux d'une fonction dérivable

Définition 4

Soient f une fonction définie sur un intervalle I et a un réel appartenant à I, a n'étant pas une extrémité de I.

- On dit que f admet un **maximum global** en a ssi pour tout réel x de I,

$$f(x)\ \ldots\ f(a)$$

- On dit que f admet un **minimum global** en a ssi pour tout réel x de I,

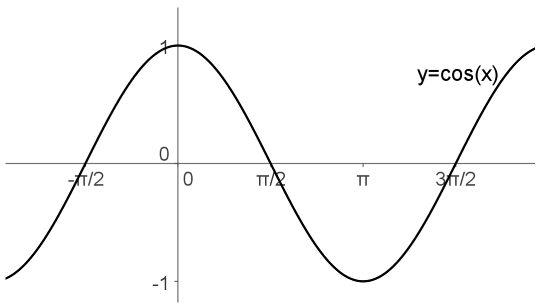
$$f(x)\ \ldots\ f(a)$$

- On dit que f admet un **maximum local** en a s'il existe un intervalle ouvert J contenant a tel que

$$J \subset I \quad \text{et} \quad \forall x \in J,\ f(x) \leqslant f(a)$$

Exemple :

la fonction cos (cosinus) présente un maximum absolu en zéro sur $[-\pi, \pi]$. Ce maximum est $\cos(0) = 1$.



Proposition 7

Soit f une fonction définie sur un intervalle I.
Soit a un réel de I qui n'est pas une extrémité de I.
Si f présente un extremum local en a et si f est dérivable en a, alors $f'(a) =$

Preuve : on suppose que f est dérivable en a et que $f(a)$ est un minimum local de f.

■

III.2 Accroissements finis

Théorème 8 (théorème de Rolle)

Soit $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue sur le segment $[a, b]$ et dérivable sur $]a, b[$ avec $a < b$.

Si $f(a) = f(b)$ alors il

Preuve : si f est constante sur $[a, b]$,

$\blacksquare$

Théorème 9 (des accroissement finis)

Soit $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue sur le segment $[a, b]$ et dérivable sur $]a, b[$ avec $a < b$.

Alors il existe $c \in]a, b[$ tel que

Preuve : soit g la fonction définie sur $[a, b]$ par $g(x) =$

$\blacksquare$

COROLLAIRE : **inégalité des accroissements finis**
Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I.
Si $\exists\, M \in \mathbb{R}^+ \,;\, \forall\, t \in I \,,\, |f'(t)| \leqslant M$

Alors pour tous réels a et b de I, $|f(b) - f(a)| \leqslant$

III.3 Application aux variations d'une fonction

Définition 5

Soit f une fonction définie sur un intervalle I.

- On dit que f est **décroissante sur** I si, et seulement si, pour tous réels a et b éléments de I,
$$a < b \quad \Longrightarrow \quad f(a) \;\ldots\; f(b)$$
- On dit que f est **strictement décroissante sur** I si, et seulement si,

Exemple : la fonction inverse $x \longmapsto \dfrac{1}{x}$ est sur

Théorème 10

Soit f une fonction dérivable sur un *intervalle* I.

- f est constante sur I ssi
- Si la dérivée f' est positive sur I, alors f est
- Si la dérivée f' est strictement négative sur I (sauf éventuellement en un nombre fini de points où f' s'annule), alors f est strictement décroissante sur I.

Preuve : on suppose que la fonction f est dérivable sur I et que

■

IV Fonctions de classe $\mathcal{C}^n$

IV.1 Dérivées successives

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction dérivable sur I. Si sa fonction dérivée f' est encore dérivable sur I, on dit que f est 2 fois dérivable sur I et on note f'' ou $f^{(2)}$ la fonction dérivée de f' appelée dérivée seconde de f (ou dérivée d'ordre 2).

Définition 6

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On dit qu'une fonction $f : I \to \mathbb{R}$ est n fois dérivable sur I si f est $n-1$ fois dérivable sur I et si sa dérivée $(n-1)$-ième, notée $f^{(n-1)}$ est elle-même dérivable sur I. On note alors

$$f^{(n)} = (f^{(n-1)})'$$

On convient que $f^{(0)} = f$.

Exemple : dérivée n-ième de la fonction sinus.

$$\sin' = \qquad ; \quad \sin'' = \qquad ; \quad \sin^{(3)} = \qquad ; \quad \sin^{(4)} = \qquad ; \quad \sin^{(5)} =$$

On pourrait montrer par récurrence sur $n \in \mathbb{N}^*$ que

$$\forall\, x \in \mathbb{R},\ \sin^{(n)}(x) =$$

Définition 7

Soit f une fonction définie sur un intervalle I.

On dit que f est de classe $\mathcal{C}^n$ sur I ssi f est n fois dérivable sur I et sa dérivée $f^{(n)}$ d'ordre n est continue sur I.

On dit que f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur I ssi f est de classe $\mathcal{C}^n$ sur I pour tout entier naturel n.

Une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ est une

Exemples : les fonctions polynômes, les fonctions rationnelles, les fonctions sin, cos, tan, exp et ln sont de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur leurs ensembles de définition respectifs.

IV.2 Opérations sur les fonctions de classe $\mathcal{C}^n$

Proposition 11 (admise)

- ▷ Si u et v sont deux fonctions de classe $\mathcal{C}^n$ sur I, alors les fonctions $f+g$ et $f \cdot g$ sont de classe

- ▷ Si u est de classe $\mathcal{C}^n$ sur I, si v est de classe $\mathcal{C}^n$ sur J et si $u(I) \subset J$, alors la fonction composée $v \circ u$ est

IV.3 Théorème du prolongement $\mathcal{C}^1$

Théorème 12

Soient $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue sur I et a un élément de I.
Si f est dérivable sur $I \setminus \{a\}$ et si f' admet une limite finie ℓ en a,

alors f est

Remarque : cette condition de dérivabilité est suffisante, mais n'est pas nécessaire.