Polynômes

Dans tout ce chapitre, $\mathbb{K}$ désigne soit l'ensemble $\mathbb{R}$ des nombres réels, soit l'ensemble $\mathbb{C}$ des nombres complexes.

I L'ensemble $\mathbb{K}[X]$ des polynômes à coefficients dans $\mathbb{K}$

I.1 Fonction polynôme

Définition 1

Soit P une application de $\mathbb{K}$ dans $\mathbb{K}$. On dit que P est une fonction polynomiale ou plus simplement un **polynôme**, s'il existe un entier naturel n et $n+1$ nombres $a_0,\ a_1,\ a_2, \dots,\ a_n$ appartenant à $\mathbb{K}$, tels que

$$\forall\, x \in \mathbb{K}, \quad P(x) = a_0 + a_1\, x + a_2\, x^2 + \cdots + a_n\, x^n = \sum_{k=0}^{n}$$

On écrit alors $P = \sum_{k=0}^{n} a_k\, X^k$ et X s'appelle l'**indéterminée**.

Les nombres $a_0\,,\ a_1\,,\ a_2\,,\ \dots\,,\ a_n$ sont appelés les **coefficients** du polynôme P.
On note $\mathbb{K}[X]$ l'ensemble des polynômes à coefficients dans $\mathbb{K}$.

Exemple :

Proposition 1 (cours d'analyse)

Une fonction polynomiale est nulle ssi tous ses coefficients sont ...

Définition 2

Le polynôme constant Q égal à zéro est appelé le **polynôme nul** et on note $Q = 0$.

Deux polynômes $P = \sum_{k=0}^{n} a_k\, X^k$ et $Q = \sum_{k=0}^{n} b_k\, X^k$ sont égaux ssi

I.2 Opérations dans $\mathbb{K}[X]$

Soit $P = \sum_{k=0}^{n} a_k\, X^k$ et $Q = \sum_{k=0}^{m} b_k\, X^k$ deux polynômes de $\mathbb{K}[X]$ et $\lambda \in \mathbb{K}$ un scalaire.

On pose $\forall\, k > n,\ a_k = 0$ et $\forall\, k > m,\ b_k = 0$

On définit les opérations suivantes dans $\mathbb{K}[X]$:

(i) l'addition

$$P + Q = \sum$$

alors l'addition est commutative, associative et admet pour élément neutre . . .

(ii) la multiplication de deux polynômes

$$\boxed{P \times Q = \sum_{k=0}^{n+m} c_k\, X^k \quad \text{avec} \quad c_k = \qquad\qquad\qquad\qquad}$$

(iii) la multiplication externe par un scalaire λ

$$\lambda \cdot P =$$

Exemple : posons $P = X^3 + 3X^2 + 1$ et $Q = \ X^2 + X$ alors

$P + Q =$ $\qquad\qquad\qquad\qquad$ $P\,Q =$

et

$$6 \cdot P =$$

I.3 Degré d'un polynôme

Définition 3

Soit $P = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} a_k\, X^k$ un polynôme de $\mathbb{K}[X]$.

(i) Si $P \neq 0$, on appelle **degré** de P et on note $\deg(P)$,

On convient que $\quad \deg(0) =$

(ii) Si $P \neq 0$, on appelle **coefficient dominant** de P le coefficient a_n où $n = \deg(P)$. Il s'agit donc du coefficient du terme

(iii) Un polynôme non nul est dit **unitaire** ssi son . . .

Exemple : le polynôme $(2X^2-3)^3$ est de degré

Proposition 2

Soit P et Q sont deux polynômes non nuls de $\mathbb{K}[X]$.

(i) PQ est non nul

(ii) $\deg(PQ) =$

(iii) Si $\deg(P) \neq \deg(Q)$ alors $\deg(P+Q) =$

Si $\deg(P) = \deg(Q)$ alors $\deg(P+Q) \leqslant$

Preuve : (ii) Posons $n = \deg(P)$ et $m = \deg(Q)$.

$\blacksquare$

COROLLAIRE
Soit P un polynôme non nul. Si Q et R sont deux polynômes tels que $PQ = PR$ alors

II Divisibilité dans $\mathbb{K}[X]$

II.1 Multiples et diviseurs

Définition 4

Soit P et Q deux polynômes de $\mathbb{K}[X]$. On dit que «P divise Q» ou que «P est un diviseur de Q» ou que «Q est un multiple de P» et on note $P|\,Q$ ssi

Exemple : $X^3 - 1$ est divisible par ...

REMARQUES :

- P divise P.
- Si P divise Q et si $Q \neq 0$ alors $\deg(P)$ ...
- Si P divise Q et si Q divise P alors

Définition 5

P et Q sont dit associés si et seulement si $P|Q$ et $Q|P$.
Il s'ensuit qu'il existe un scalaire λ non nul tel que

II.2 Division euclidienne

Théorème 3

Soit A et B deux polynômes de $\mathbb{K}[X]$ avec $B \neq 0$.
Alors il existe un unique couple $(Q, R) \in \mathbb{K}[X]^2$ tel que

Q s'appelle le **quotient** et R le **reste** de la division euclidienne de A par B.
La deuxième condition sur le degré du reste est capitale.

Preuve : de l'unicité.

■

DISPOSITION PRATIQUE : effectuer la division euclidienne de $A = X^4 + 3X^2 - X + 3$ par $B = X^2 + X + 1$.

II.3 Polynômes irréductibles

Définition 6

On dit qu'un polynôme P est **irréductible** dans $\mathbb{K}[X]$ ssi $\deg(P) \geqslant 1$ et les seuls diviseurs de P dans $\mathbb{K}[X]$ sont les polynômes constants et les λP où $\lambda \in \mathbb{K}^*$.

Exemples :

- Tout polynôme de degré 1 est
- $X^2 + 1$ est irréductible dans $\mathbb{R}[X]$.
- $X^2 + 1$ n'est pas irréductible dans $\mathbb{C}[X]$ car

III Dérivation formelle dans $\mathbb{K}[X]$

III.1 Polynôme dérivé

Définition 7

Soit $P = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k$ un polynôme de $\mathbb{K}[X]$. On appelle **polynôme dérivé** de P, le polynôme noté P', défini par $P' = 0$ si P est un polynôme constant et

$$P' =$$

Exemple : le polynôme dérivé de $3X^2 - X + 2$ est

REMARQUE : lorsque $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, on retrouve la dérivation vue en analyse.

Proposition 4

Soit P et Q deux polynômes de $\mathbb{K}[X]$ et λ un scalaire appartenant à $\mathbb{K}$. Alors

$$(P+Q)' = \qquad ; \quad (\lambda P)' = \qquad ; \quad (PQ)' =$$

III.2 Dérivées successives

Définition 8

Soit $k \in \mathbb{N}^*$. En convenant que $P^{(0)} = P$, on définit par récurrence $P^{(k)}$ le k-ième polynôme dérivé de P comme étant le polynôme dérivé de

Exemple : si $P = X^5 - 1$ alors

$$P' = \qquad ; \quad P'' = \qquad ; \quad P^{(3)} = \qquad ; \quad P^{(4)} =$$

$$P^{(5)} = \qquad \text{et}$$

REMARQUE : si P est un polynôme de degré n, alors pour tout entier k tel que $k > n$,

$$P^{(k)} =$$

IV Racines d'un polynôme

IV.1 Généralités

Définition 9

Soit $P \in \mathbb{K}[X]$ et $a \in \mathbb{K}$. On dit que a est une **racine** (ou un zéro) de P ssi

Proposition 5

Soit $P \in \mathbb{K}[X]$ et $a \in \mathbb{K}$.

(i) a est une racine de P ssi $X - a$ divise $\quad \ldots$

(ii) Si $\deg(P) \leqslant n$ avec $n \in \mathbb{N}$ et si P admet au moins $n+1$ racines deux à deux distinctes, alors

Un polynôme de degré n admet au plus n racines.
Si un polynôme P est irréductible dans $\mathbb{K}[X]$ et si $\deg(P) \geqslant 2$ alors P n'a pas de racine dans $\mathbb{K}$.

Preuve : (i) par division euclidienne de P par $X - a$,

■

IV.2 Ordre de multiplicité d'une racine

Définition 10

Soit $P \in \mathbb{K}[X]$, $a \in \mathbb{K}$, $h \in \mathbb{N}^*$. On dit que a est une **racine d'ordre** h de P ssi

$$(X-a)^h \text{ divise } P \qquad \text{et} \qquad (X-a)^{h+1} \quad \dots$$

Exemple : posons $P = (X^4 - 1)(3X - 3)$. Alors $P =$

Proposition 6

Soit $P \in \mathbb{K}[X]$, $a \in \mathbb{K}$, $h \in \mathbb{N}^*$.
a est une racine d'ordre h de P ssi il existe un polynôme $Q \in \mathbb{K}[X]$ tel que

$$P = (X-a)^h Q \quad \text{avec} \quad Q(a) \neq 0$$

Preuve : « $\Longrightarrow$ » On suppose que a est une racine d'ordre h de P.

∎

Théorème 7 (admis)

Soit $P \in \mathbb{K}[X],\ P \neq 0$. Soit $a \in \mathbb{K}$ et $h \in \mathbb{N}^*$. Alors a est une racine d'ordre h de P ssi

$$P(a) = P'(a) = P''(a) = \ldots = P^{(h-1)}(a) = 0 \qquad \text{et} \qquad P^{(h)}(a) \neq 0$$

V Factorisation des polynômes

V.1 Polynôme scindé sur $\mathbb{K}$

Définition 11

On dit qu'un polynôme P est **scindé sur** $\mathbb{K}$ s'il peut s'écrire sous la forme

$$P = \lambda\,(X - a_1)^{h_1}\,(X - a_2)^{h_2} \ldots (X - a_r)^{h_r}$$

avec $\lambda \in \mathbb{K}^*$ et $\forall\, i \in \{1, 2, \ldots, r\}\,,\ (a_i,\, h_i) \in \mathbb{K} \times \mathbb{N}^*$.

Exemple : $X^2 + 1$ est ...

V.2 Somme et produit des racines d'un polynôme scindé

UN CAS PARTICULIER : si x_1 et x_2 sont les racines du trinôme $a\,X^2 + b\,X + c$ alors

Exemple : factoriser $7X^2 + 11X + 4$

Proposition 8

Soit $P = a_n X^n + a_{n-1} X^{n-1} + \cdots + a_1 X + a_0$ un polynôme scindé de degré $n \geqslant 2$ qui s'écrit sous forme factorisée :

$$P = a_n (X - \alpha_1)(X - \alpha_2) \ldots (X - \alpha_n)$$

Alors

Preuve : dans le cas où $n = 3$. Posons $P = a\,X^3 + b\,X^2 + c\,X + d$ où $(a, b, c, d) \in \mathbb{K}^4$ avec $a \neq 0$.

■

V.3 Décomposition d'un polynôme en produit de facteurs irréductibles

Proposition 9

Tout polynôme P non constant se décompose en produit de polynômes unitaires irréductibles sous la forme :

$$P =$$

Cette décomposition est unique à l'ordre près des facteurs.

Cette proposition est l'analogue pour les polynômes au théorème de décomposition en facteurs premiers d'un entier naturel supérieur à 2.

V.3.1 dans $\mathbb{C}[X]$

Théorème 10 (théorème de D'Alembert-Gauss)

Tout polynôme non constant $P \in \mathbb{C}[X]$ admet au moins une racine dans $\mathbb{C}$.

Conséquences :

- tout polynôme non constant de $\mathbb{C}[X]$ est

- les polynômes irréductibles de $\mathbb{C}[X]$ sont

Exemple : factoriser dans $\mathbb{C}[X]$ le polynôme $P = X^5 - 1$.

V.3.2 dans $\mathbb{R}[X]$

Proposition 11

Les polynômes irréductibles de $\mathbb{R}[X]$ sont :

- les polynômes de

- les polynômes de degré 2, $a\,X^2 + b\,X + c$ dont le

Exemple : factoriser dans $\mathbb{R}[X]$ le polynôme $P = X^5 - 1$.