Calcul matriciel

Dans tout ce chapitre, $\mathbb{K}$ désigne soit l'ensemble $\mathbb{R}$ des nombres réels, soit l'ensemble $\mathbb{C}$ des nombres complexes. On appelle «scalaire» un nombre réel lorsque $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou complexe lorsque $\mathbb{K} = \mathbb{C}$.

I Systèmes linéaires

I.1 Reconnaître un système linéaire

Définition 1

On appelle **système linéaire de n équations à p inconnues** $x_1, x_2, \ldots, x_p$ tout système d'équations de la forme :

$$\left\{\begin{array}{rcl} a_{1,1}\,x_1 + a_{1,2}\,x_2 + \cdots + a_{1,p}\,x_p & = & b_1 \\ a_{2,1}\,x_1 + a_{2,2}\,x_2 + \cdots + a_{2,p}\,x_p & = & b_2 \\ & \vdots & \\ a_{n,1}\,x_1 + a_{n,2}\,x_2 + \cdots + a_{n,p}x_p & = & b_n \end{array}\right.$$

Les scalaires $a_{i,j}$ sont les
Les scalaires $b_1,\ b_2,\ \ldots,\ b_n$ forment le second membre du système.
Lorsque tous les b_i sont nuls, on dit que le système est **homogène**.

Un p-uplet $(x_1, x_2, \ldots, x_p)$ qui vérifie le système précédent est appelé une **solution** du système.
L'ensemble des solutions d'un système d'équation à p inconnues est un ensemble de p-uplets.

Exemples :

- Un système linéaire de deux équations à deux inconnues :

$$\left\{\begin{array}{rcr} 2x + y & = & 4 \\ x - y & = & -3 \end{array}\right.$$

- Un système linéaire de deux équations à trois inconnues :

$$\left\{\begin{array}{rcr} x + y - z & = & 7 \\ 3x - y + 4z & = & -3 \end{array}\right.$$

- Un système linéaire de trois équations à deux inconnues :

$$\left\{\begin{array}{rcr} x + 5y & = & -2 \\ 3x + y & = & 0 \\ -x + 2y & = & 1 \end{array}\right.$$

Définition 2

Deux systèmes linéaires sont dits **équivalents** lorsqu'ils ont les mêmes inconnues et le même ensemble des solutions.

I.2 Systèmes linéaires échelonnés

Définition 3

Un système linéaire est dit **échelonné** si le nombre de coefficients nuls débutant chaque ligne, augmente strictement d'une ligne à la suivante (pour éventuellement finir sur des lignes dont tous les coefficients sont nuls). Sur chaque ligne, la première inconnue figurant avec un coefficient non nul est appelée une **inconnue principale** du système.
Les inconnues non principales sont dites **auxiliaires**.

La résolution d'un système échelonné est simple : on exprime les inconnues principales en fonction des inconnues auxiliaires (s'il y en a), en partant de la dernière équation du système et en remontant par substitution.

Exemple : le système suivant est échelonné : $\left\{\begin{array}{ccccccccc} x & + & y & + & z & -t & = & 1 \\ & & 2y & + & 2z & & = & 1 \\ & & & & 4z & +2t & = & 1 \end{array}\right.$

Les inconnues principales sont x, y et z. On va les exprimer en fonction de l'inconnue auxiliaire t, en partant de la dernière équation.

I.3 Résolution pratique par la méthode du pivot de Gauss

Nous noterons toujours L_i la i-ème équation d'un système linéaire :

Théorème 1 (les trois opérations élémentaires)

Partant d'un système linéaire quelconque (S), on obtient un système linéaire équivalent en lui appliquant l'une des opérations suivantes :

- Permutation de deux lignes L_i et L_j. Opération codée par $L_i \leftrightarrow L_j$
- Multiplication d'une ligne L_i par un scalaire a non nul.
  Opération codée par $L_i \leftarrow a\,L_i$
- Addition à une ligne L_i d'un multiple $b\,L_j$ d'une autre ligne ($j \neq i$).
  Opération codée par $L_i \leftarrow$

Par une succession d'opérations élémentaires sur les lignes, on ramène la résolution du système initial à celle d'un système échelonné. Tout système linéaire est équivalent à un système échelonné.

Proposition 2

Un système linéaire admet, soit une solution unique, soit aucune solution, soit une infinité de solutions.

Exemple : résoudre le système linéaire suivant : (S) $\left\{\begin{array}{rcrcrcr} x & + & 2y & + & 2z & = & 10 \\ 3x & + & 2y & - & z & = & -3 \\ 2x & - & 4y & + & 3z & = & 19 \end{array}\right.$

II Matrices rectangulaires

II.1 L'ensemble $\mathfrak{M}_{n,p}(\mathbb{K})$

Définition 4

• Soit n et p deux entiers naturels non nuls. Une matrice à n lignes et p colonnes (appelée aussi matrice de taille $n \times p$) est un un tableau de nombres réels ou complexes comportant n lignes et p colonnes que l'on note

$$A = (a_{i,j})_{\substack{1 \leqslant i \leqslant n \\ 1 \leqslant j \leqslant p}} = \begin{pmatrix} a_{1,1} & \cdots & a_{1,j} & \cdots & a_{1,p} \\ \vdots & \ddots & \vdots & & \vdots \\ a_{i,1} & \cdots & a_{i,j} & \cdots & a_{i,p} \\ \vdots & & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n,1} & \cdots & a_{n,j} & \cdots & a_{n,p} \end{pmatrix}$$

Le coefficient situé à l'intersection de la i-ème ligne et de la j-ème colonne est noté $a_{i,j}$.
• L'ensemble des matrices à n lignes et p colonnes est noté $\mathfrak{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ et la notation $n \times p$ est appelée la **taille** de la matrice.

Exemple : : $A = \begin{pmatrix} -4 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

• Un élément de $\mathfrak{M}_{1,p}(\mathbb{K})$ s'appelle une **matrice ligne** $L = \begin{pmatrix} \ell_1 & , & \ell_2 & , & \cdots & , & \ell_p \end{pmatrix}$.

• Un élément de $\mathfrak{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ s'appelle une **matrice colonne** $C = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix}$.

• La **matrice nulle** de $\mathfrak{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ que l'on note $\mathbb{O}_{n,p}$ est la matrice de taille $n \times p$, dont tous les coefficients sont nuls.

II.2 Opérations sur les matrices

• *Addition de deux matrices.*

Définition 5

Soit $A = (a_{i,j})_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\1\leqslant j\leqslant p}}$ et $B = (b_{i,j})_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\1\leqslant j\leqslant p}}$ deux matrices de $\mathfrak{M}_{n,p}(\mathbb{K})$.
On appelle somme de A et B la matrice de $\mathfrak{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ notée $A+B$ définie par $A+B = (c_{i,j})_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\1\leqslant j\leqslant p}}$ où

$$\forall i \in [\![1,n]\!]\ ,\ \forall j \in [\![1,p]\!], \qquad c_{i,j} =$$

Autrement dit, on fait la somme coefficient par coefficient.

Propriétés : pour toutes matrices A, B et C de $\mathfrak{M}_{n,p}(\mathbb{K})$,

- $A+B = B+A$
- $(A+B)+C =$
- $A + \mathbb{O}_{n,p} = \mathbb{O}_{n,p} + A =$
- En notant $-A$ la matrice de coefficient général $\qquad A+(-A) = (-A)+A =$

• *Multiplication d'une matrice par un scalaire.*

Définition 6

Soit $A = (a_{i,j})_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\1\leqslant j\leqslant p}}$ une matrice de $\mathfrak{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ et λ un scalaire.
On appelle produit de A par λ la matrice de $\mathfrak{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ notée $\lambda\cdot A$ (ou simplement $\lambda\, A$) définie par $\lambda \cdot A = (c_{i,j})_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\1\leqslant j\leqslant p}}$ où

$$\forall i \in [\![1,n]\!]\ ,\ \forall j \in [\![1,p]\!], \qquad c_{i,j} =$$

Autrement dit, la matrice $\lambda\cdot A$ est obtenue à partir de A en multipliant chacun de ses coefficients par λ.

Propriétés : pour toutes matrices A et B de $\mathfrak{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, pour tous scalaires λ et μ ,

- $1\cdot A =$
- $(\lambda+\mu)\cdot A =$
- $\lambda\cdot(\mu\cdot A) = (\lambda\,\mu)\cdot A$
- $\lambda\cdot(A+B) =$

• *Produit de deux matrices.*
Pour pouvoir définir le produit AB de la matrice A par la matrice B, le nombre de colonnes de A doit être égal au nombre de lignes de B.

Exemple : posons $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

$$\text{Alors} \quad AB = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} & & & & \end{pmatrix}$$

Définition 7

Soit $A = (a_{i,j})_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\ 1\leqslant j\leqslant p}}$ une matrice de $\mathfrak{M}_{n,p}(\mathbb{K})$
et $B = (b_{i,j})_{\substack{1\leqslant i\leqslant p\\ 1\leqslant j\leqslant q}}$ une matrice de $\mathfrak{M}_{p,q}(\mathbb{K})$.
On appelle produit de A par B la matrice de $\mathfrak{M}_{n,q}(\mathbb{K})$ notée AB définie par
$AB = (c_{i,j})_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\ 1\leqslant j\leqslant q}}$ où $\forall i \in [\![1,n]\!]$, $\forall j \in [\![1,p]\!]$,

$$\boxed{c_{i,j} = \sum_{\mathbf{k}=1}^{p} \qquad\qquad = a_{i,1}\, b_{1,j} + a_{i,2}\, b_{2,j} + \cdots + a_{i,p}\, b_{p,j}}$$

Le terme $c_{i,j}$ est le résultat du «produit scalaire» de la i-ème ligne de A par la j-ème colonne de B. Il faut faire très attention à ce que les tailles des matrices soient compatibles pour que le produit existe !

PROPRIÉTÉS : soit $A \in \mathfrak{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, $B \in \mathfrak{M}_{p,q}(\mathbb{K})$ et $C \in \mathfrak{M}_{q,r}(\mathbb{K})$. Soit $\lambda \in \mathbb{K}$.

- Si $B' \in \mathfrak{M}_{p,q}(\mathbb{K})$ alors $A(B + B') =$
- Si $A' \in \mathfrak{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ alors $(A + A')B = AB + A'B$
- $A\, \mathbb{O}_{p,q} =$ et $\mathbb{O}_{n,p}\, B =$
- $\lambda(AB) = (\lambda\, A)B = A(\lambda B) = \lambda\, AB$
- $A(BC) = (AB)C = ABC$

REMARQUES

(i) L'odre du produit est important car si le produit AB existe, BA peut ne pas exister et même si BA existe, on a en général $AB \neq BA$.
(ii) Contrairement à ce qui se passe pour les nombres réels, $AB = \mathbb{O}_{n,q}$ n'implique pas $A = \mathbb{O}_{n,p}$ ou $B = \mathbb{O}_{p,q}$. On ne peut donc pas simplifier un produit de matrices : on peut avoir $AB = AC$ avec $B \neq C$.
(iii) Parler de division de matrice n'a en général pas de sens.

II.3 Transposée d'une matrice

Définition 8

Soit $A = (a_{i,j})_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\ 1\leqslant j\leqslant p}}$ une matrice de $\mathfrak{M}_{n,p}(\mathbb{K})$.
On appelle transposée de A la matrice de $\mathfrak{M}_{p,n}(\mathbb{K})$ notée ${}^{t}A$ définie par ${}^{t}A = (b_{i,j})_{\substack{1\leqslant i\leqslant p\\ 1\leqslant j\leqslant n}}$
où $b_{i,j} = a_{j,i}$. Autrement dit, ${}^{t}A$ est la matrice obtenue à partir de A «par symétrie», en échangeant les lignes et les colonnes de A.

Exemple : si $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$ alors ${}^{t}A =$

Propriétés : soit A et B deux matrices de $\mathfrak{M}_{n,p}(\mathbb{K})$. Soit λ un scalaire. Alors

- ${}^{t}(A+B) = {}^{t}A + {}^{t}B$
- ${}^{t}(\lambda A) =$
- ${}^{t}({}^{t}A) =$
- Si $D \in \mathfrak{M}_{p,q}(\mathbb{K})$ alors $\boxed{{}^{t}(AD) = \quad\quad\quad}$

III Matrices carrées

III.1 Matrices carrées particulières

Définition 9

(i) Une matrice **carrée d'ordre** n est une matrice à n lignes et n colonnes : l'ensemble de ces matrices est noté $\mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$. La matrice nulle de $\mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$ se note $\mathbb{O}_n$.

(ii) Une matrice **diagonale** d'ordre n est une matrice de la forme

$$\begin{pmatrix} a_{1,1} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_{2,2} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & a_{n,n} \end{pmatrix}$$

(iii) La **matrice identité** dans $\mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$ est la matrice $I_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

(iv) Une matrice carrée est dite **triangulaire supérieure** si les coefficients «strictement en-dessous» de la diagonale sont nuls, c'est-à-dire $i > j \Rightarrow a_{i,j} = 0$, ou encore

$$A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \dots & a_{1,n} \\ 0 & a_{2,2} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & a_{n,n} \end{pmatrix}$$

On définit de même les matrices triangulaires inférieures.

(v) Une matrice $A \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$ est dite **symétrique** ssi $A = {}^{t}A$
c'est-à-dire $\forall i \in \{1, 2, \dots, n\}$, $\forall j \in \{1, 2, \dots, n\}$ $\quad a_{i,j} = a_{j,i}$.

Proposition 3

Le produit de deux matrices carrées est une matrice ...
Pour toute matrice $A \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$, $\quad I_n\, A = A\, I_n = \ldots$.
Le produit de deux matrices diagonales est une matrice diagonale.
Le produit de deux matrices triangulaires supérieures est une matrice triangulaire supérieure.

Exemple : $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 0 & 6 & 3 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$; $B = \begin{pmatrix} 1 & -5 & 2 \\ 0 & 3 & -3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$; $A \times B = \begin{pmatrix} & & \\ & & \\ & & \end{pmatrix}$

On remarque au passage que les termes diagonaux de AB sont obtenus comme le produit de ceux de A par ceux de B.

III.2 Puissances d'une matrice carrée

Définition 10

Soit $A \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$. On définit les puissances de A de la façon suivante :

$$A^0 = I_n \quad \text{et} \quad \forall\, k \in \mathbb{N}^*,\ A^k = \underbrace{A \times A \times \cdots \times A}_{k \text{ fois}} = A \times A^{k-1}$$

Proposition 4

Pour tous entiers naturels k et m,

$$A^{k+m} = \qquad\qquad \text{et} \quad (A^k)^m =$$

Pour tout scalaire λ, $\quad (\lambda A)^k =$

En général, $(AB)^k \neq A^k B^k$, sauf dans le cas particulier où les deux matrices A et B commutent. En conséquence, les identités remarquables sont fausses sur les matrices, donc attention quand on développe !

Exemples :

- matrice diagonale : si $D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \ldots & 0 & \lambda_n \end{pmatrix}$ alors $D^k =$
- matrice nilpotente : $N = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$; $N^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $\forall k \geqslant 3, \quad N^k =$

Théorème 5 (formule du binôme)

Si A et B sont deux matrices carrées d'ordre n qui commutent (c.à.d. $AB = BA$), alors pour tout entier naturel non nul m,

$$(A+B)^m = \sum_{k=0}^{m}$$

où $\quad \binom{m}{k} =$

III.3 Matrices inversibles

Définition 11 (et proposition)

Une matrice carrée A de $\mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$ est dite inversible ssi il existe une matrice $B \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$ telle que

$$AB = I_n \quad \text{et} \quad BA = \dots$$

Dans ce cas, B est unique, on l'appelle «inverse de A» et on la note A^{-1}.
L'ensemble des matrices inversibles de $\mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$ est noté $GL_n(\mathbb{K})$.

Exemples :
- La matrice identité I_n est inversible et $I_n^{-1} =$

- La matrice diagonale $M = \begin{pmatrix} x & 0 & 0 \\ 0 & y & 0 \\ 0 & 0 & z \end{pmatrix}$ est inversible ssi

Dans ce cas, $\quad M^{-1} = \begin{pmatrix} & & \\ & & \\ & & \end{pmatrix}$

Proposition 6

Soit A et B deux matrices de $\mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$.

- Si A est inversible alors A^{-1} est inversible et $(A^{-1})^{-1} =$
- Si A et B sont inversibles alors le produit AB est inversible et $\boxed{(AB)^{-1} = \qquad\qquad}$
- Si M est une matrice inversible et si $MA = B$ alors $A =$

Théorème 7

Soit $A \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$. Les trois assertions suivantes sont équivalentes :

(i) $A \in GL_n(\mathbb{K})$

(ii) $\exists\, B \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{K})\ ;\ AB =$

(iii) $\exists\, B \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{K})\ ;$

IV Systèmes linéaires et matrices

IV.1 Écriture matricielle d'un système linéaire

Considérons le système linéaire (S) suivant de n équations à p inconnues x_1 , x_2 … x_p :

$$(S)\ :\ \left\{\begin{array}{lcll} a_{1,1}\,x_1 + a_{1,2}\,x_2 + \cdots + a_{1,p}\,x_p & = & b_1 & (L_1) \\ a_{2,1}\,x_1 + a_{2,2}\,x_2 + \cdots + a_{2,p}\,x_p & = & b_2 & (L_2) \\ & \vdots & & \\ a_{n,1}\,x_1 + a_{n,2}\,x_2 + \cdots + a_{n,p}\,x_p & = & b_n & (L_n) \end{array}\right.$$

Soit A la matrice de $\mathfrak{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ définie par $A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,p} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \cdots & a_{2,p} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \cdots & a_{n,p} \end{pmatrix} = (a_{i,j})_{\substack{1\leqslant i\leqslant n \\ 1\leqslant j\leqslant p}}$

On pose $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_p \end{pmatrix}$ et $Y = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$

Une vérification simple montre que le système linéaire (S) est équivalent à l'équation matricielle $A\,X = Y$ dont l'inconnue est la matrice colonne X.

Définition 12

On dit que A est la matrice du système linéaire (S).

Exemple : la matrice du système $\left\{\begin{array}{lcl} 2x + y & = & 4 \\ x - y & = & -3 \end{array}\right.$ est $A =$

IV.2 Calcul pratique de l'inverse d'une matrice

Proposition 8

- Soit $A \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$ et $Y \in \mathfrak{M}_{n,1}(\mathbb{K})$. Si le système linéaire d'inconnue X : $A\,X = Y$ admet une unique solution, alors la matrice A est inversible.
- Soit $A \in GL_n(\mathbb{K})$ et $Y \in \mathfrak{M}_{n,1}(\mathbb{K})$. Alors le système linéaire d'écriture matricielle $A\,X = Y$ admet une unique solution donnée par la matrice colonne $X = A^{-1}\,Y$.

Théorème 9

Une matrice triangulaire est inversible si, et seulement si, tous les coefficients de sa diagonale sont ......

• En général, on détermine l'inverse d'une matrice carrée $A \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$ en résolvant le système linéaire correspondant $AX = Y$ d'inconnue X avec un second membre Y *arbitraire* : $Y = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$

Exemple : montrer que la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ est inversible et donner A^{-1}.

• Par des opérations élémentaires sur les lignes

Soit $A \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$.

- On peut trouver un nombre fini d'opérations élémentaires sur les lignes qui transforme A en une matrice T triangulaire (supérieure ou inférieure). De plus

$$A \in GL_n(\mathbb{R}) \quad \text{ssi} \quad T \in GL_n(\mathbb{R})$$

- Supposons A inversible. Alors on peut trouver un nombre fini d'opérations élémentaires sur les lignes qui transforme A en I_n. En appliquant ces mêmes transformations élémentaires dans le même ordre à la matrice I_n, on obtient la matrice A^{-1}.

Exemple : déterminer l'inverse de $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

V Exercices

Exercice 1

L'espace est muni d'un repère $(O\,;\vec{i}\,,\vec{j}\,,\vec{k})$.
On considère les trois plans suivants

$$\begin{aligned} \mathcal{P} &: \quad x+y-2z=3 \\ \mathcal{Q} &: \quad x+2y+2z=5 \\ \mathcal{R} &: \quad x+3y+6z=7 \end{aligned}$$

Déterminer l'intersection des plans $\mathcal{P}$, $\mathcal{Q}$ et $\mathcal{R}$.

Exercice 2

En fonction du paramètre réel m, préciser l'ensemble des solutions du système linéaire suivant :

$$(S)\left\{\begin{array}{ccccccc} x & + & my & + & 2z & = & 1 \\ mx & + & y & + & mz & = & 1 \\ x & + & 2y & + & z & = & 2 \end{array}\right.$$

On donnera systématiquement la nature géométrique de l'ensemble $\mathcal{S}$ des solutions, en précisant, le cas échéant, un point, vecteur(s) directeur(s) de cet ensemble.

Exercice 3 Pour quelles valeurs du paramètre réel m, le système linéaire suivant admet-il une seule solution ?

$$\left\{\begin{array}{rcl} -mx+y+m^2z &=& 0 \\ -m^2x+my+mz &=& 0 \\ x+my-m^3z &=& 1 \end{array}\right.$$

Exercice 4 On considère la matrice $A=\begin{pmatrix}1&0&-2\\0&1&2\\0&0&(1/3)\end{pmatrix}\in\mathfrak{M}_3(\mathbb{R})$

1. Calculer A^2.

2. On admet que $\forall\, n\in\mathbb{N}^*$, $\exists\,!a_n\in\mathbb{R}\,;\ A^n=\begin{pmatrix}1&0&-a_n\\0&1&a_n\\0&0&\dfrac{1}{3^n}\end{pmatrix}$

   En calculant $A^{n+1}=A^n\times A$, exprimer a_{n+1} en fonction de a_n.

3. En déduire la formule explicite de a_n en fonction de n.

4. Donner $\displaystyle\lim_{n\longrightarrow+\infty} a_n$.

Exercice 5

On pose $A=\begin{pmatrix}3&1&-2\\0&2&0\\1&1&0\end{pmatrix}$

1. Calculer A^2.

2. Exprimer A^2 comme combinaison linéaire des matrices A et I_3 (c.à.d. sous la forme $A^2=a\,A+b\,I_3$ avec a et b réels).

3. En déduire que A est inversible et donner son inverse A^{-1}.

4. Exprimer A^3 comme combinaison linéaire de A et de I_3.

Exercice 6

Montrer que la matrice $\begin{pmatrix}k&2&0\\1&0&1\\-1&k&0\end{pmatrix}$ est inversible pour tout nombre réel k.