Intégration

I Sommes de Riemann

I.1 Aire sous une courbe

Définition 1

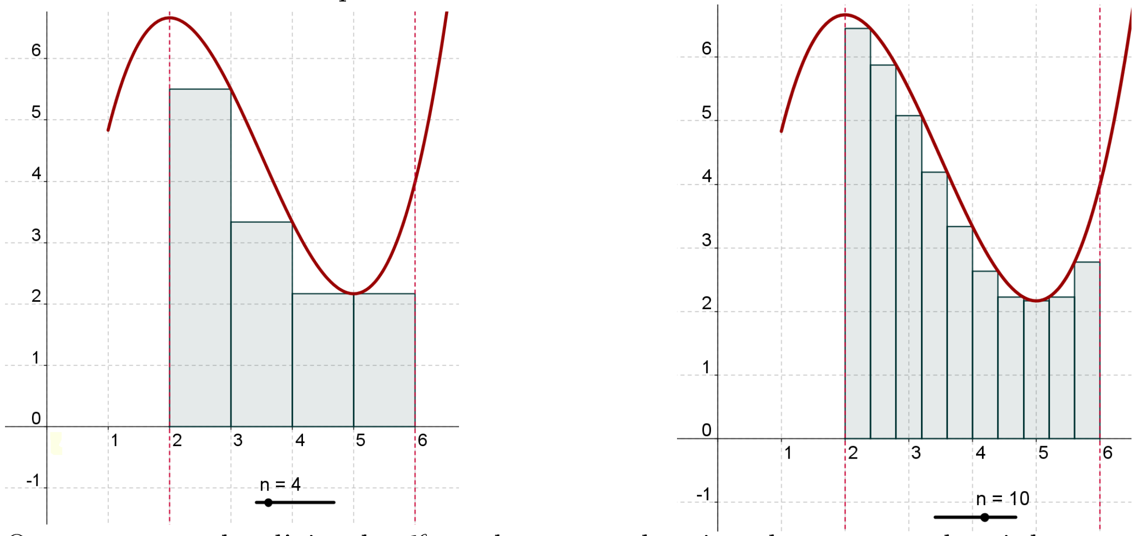
On appelle **subdivision à pas constant** $h > 0$ d'un intervalle $[a,b]$ (où $a < b$) toute famille finie de $n+1$ nombres réels $(x_0, x_1, \dots, x_n)$ telle que :

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_{n-1} < x_n = b$$

$$\text{avec } \forall\, k \in [\![1\,,\,n]\!], \quad x_k - x_{k-1} =$$

Une subdivision à pas constant est donc un découpage, ou une partition de l'intervalle $[a\,,b]$ en sous-intervalles de même amplitude.

Soit f une fonction continue et positive sur un intervalle non trivial I. Soit a et b deux réels appartenant à I tels que $a < b$. On note $\mathscr{C}$ la courbe représentative de f dans un repère orthogonal du plan. On note $\mathscr{S}$ la surface située sous la courbe $\mathscr{C}$, au dessus de l'axe des abscisses et entre les droites verticales d'équations $x = a$ et $x = b$.



On peut approcher l'aire de $\mathscr{S}$ par la somme des aires des n rectangles ci-dessus, à savoir :

Au lieu de choisir les «rectangles inférieurs», on peut choisir comme hauteur du $k^{\text{ième}}$ rectangle la valeur de f en n'importe quel point x_k^* du $k^{\text{ième}}$ sous-intervalle $[x_{k-1}\,,x_k]$.

Proposition 1 (admise)

Soit f une fonction continue sur un intervalle I contenant deux réels a et b tels que $a < b$.
Soit $(x_0, x_1, x_2, \ldots, x_n)$ une subdivision à pas constant $h > 0$ du segment $[a\,, b]$.
En choisissant arbitrairement un point x_k^* dans chaque sous-intervalle $[x_{k-1}\,, x_k]$, la suite de terme général $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} f(x_k^*)\,h$ est convergente.

Définition 2

Soit f une fonction continue et positive sur $[a\,, b]$ avec $a < b$.
L'aire de la surface $\mathscr{S}$ ou «aire sous la courbe», est la limite quand n tend vers $+\infty$, de la somme des aires des n rectangles d'approximation :

$$\text{aire}(\mathscr{S}) = \lim_{n \longrightarrow +\infty}$$

I.2 Intégrale d'une fonction continue sur un segment

Définition 3

Soit f une fonction continue sur un intervalle I contenant deux réels a et b.

(i) Si $a < b$, on appelle intégrale de f sur le segment $[a\,, b]$ le nombre réel noté $\displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ défini par :

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x =$$

(ii) $$\int_a^a f(x)\,\mathrm{d}x =$$

(iii) Si $a > b$, on pose

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x =$$

Remarques :

▷ Dans l'expression $\displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$, x est une variable *muette*. On peut la remplacer par n'importe quelle autre lettre et écrire par exemple :

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$$

- Les sommes de Riemann fournissent une approximation d'autant meilleure de l'intégrale de f sur $[a, b]$ que le pas de la subdivision est petit.

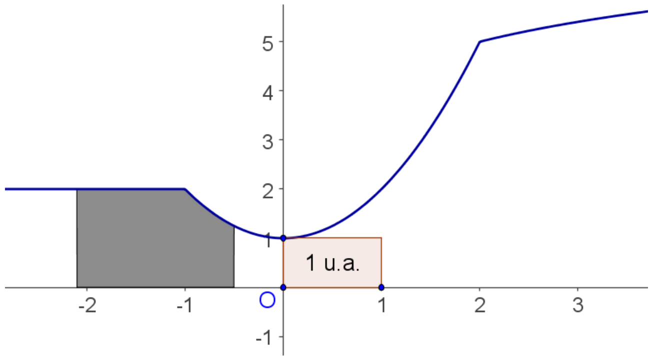
- Les n valeurs $f(x_k^*)$ sont le plus souvent des valeurs à l'une des deux bornes de chaque sous-intervalle de la subdivision. Les sommes de Riemann se présentent donc le plus souvent sous la forme suivante :

$$S_n(f) = \frac{b-a}{n} \sum_{k=1}^{n} f\left(a + \frac{k(b-a)}{n}\right)$$

Leur limite est l'intégrale de la fonction f de a à b.

I.3 Interprétation graphique de l'intégrale par une aire

Soit f une fonction continue et positive sur un intervalle I. Soit a et b deux réels appartenant à I tels que $a \leqslant b$. On note $\mathscr{C}$ la courbe représentative de f dans un repère orthogonal du plan.



Proposition 2

L'aire de la surface située sous la courbe $\mathscr{C}$, au dessus de l'axe des abscisses et entre les droites verticales d'équations $x = a$ et $x = b$ (cette aire étant exprimée en unités d'aire, symbole u.a.) est égale à

I.4 Intégrale d'une fonction continue par morceaux

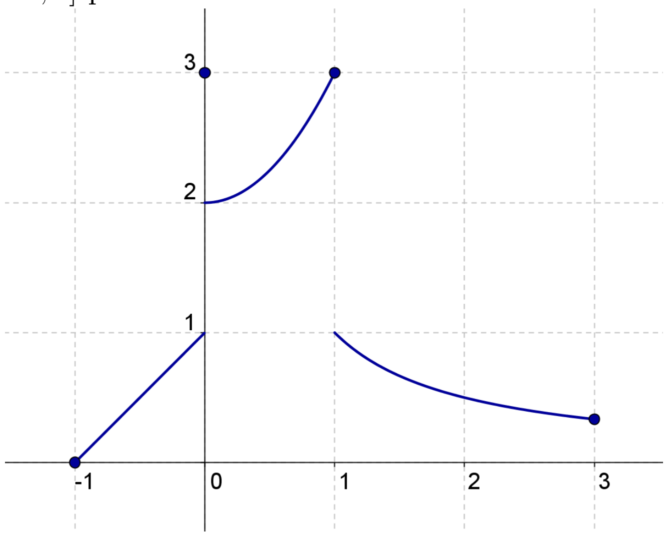
Définition 4

Soit $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction.
On dit que f est **continue par morceaux** sur le segment $[a\,, b]$ si f est continue en tout point de $[a, b]$ sauf éventuellement en un nombre fini de points en chacun desquels f admet une limite finie à gauche et à droite.

En particulier une fonction continue est continue par morceaux.

Exemple : la fonction f est définie sur $[-1\,,3]$ par

$$f(x) = \begin{cases} x+1 & \text{si } x \in [-1\,,0[\\ 3 & \text{si } x = 0 \\ 2+x^2 & \text{si } x \in]0;1] \\ 1/x & \text{si } x \in]1\,,3] \end{cases}$$



Définition 5

Soit f une fonction continue par morceaux sur le segment $[a,b]$ (avec $a < b$).
On note $(x_0, x_1, x_2, \dots, x_{n-1}, x_n)$ la subdivision de $[a\,,b]$ où les x_k sont les points de discontinuité de f.

Pour tout $k \in [\![1\,,\,n]\!]$, on note f_k la restriction de f à $]x_{k-1}\,,x_k[$ et $\tilde{f}_k$ le prolongement par continuité de f_k à $[x_{k-1}\,,x_k]$.
On définit l'intégrale de f de a à b comme étant le nombre réel :

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \sum_{k=1}^{n}$$

Exemple : avec la fonction f de l'exemple précédent :

$$\int_{-1}^{3} f(x)\,\mathrm{d}x =$$

II Propriétés de l'intégrale

II.1 Linéarité de l'intégrale

Proposition 3

Soit f et g deux fonctions continues par morceaux sur un intervalle I.
Alors pour tous réels a et b de I,

$$\int_a^b (f(x)+g(x))\,\mathrm{d}x = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x +$$

$$\text{et pour tout réel } \lambda \qquad \int_a^b \lambda f(x)\,\mathrm{d}x =$$

Preuve : on suppose que $a < b$ et que f et g sont continues sur le segment $[a\,,b]$.
Soit $(x_0, x_1, \ldots, x_n)$ une subdivision à pas constant $h > 0$ de l'intervalle $[a\,,b]$. En choisissant un point quelconque x_k^* dans chaque sous-intervalle $[x_{k-1}\,,x_k]$, on a
$\int_a^b (f(x)+g(x))\,\mathrm{d}x =$

■

II.2 Positivité et ordre

Proposition 4 (positivité de l'intégrale)

Soit f une fonction continue par morceaux sur $[a\,,b]$ avec $a \leqslant b$.

$$\text{Si } \forall x \in [a\,,b],\ f(x) \geqslant 0, \text{ alors } \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$$

Corollaire : «intégration d'une inégalité»

Soit f et g deux fonctions continues par morceaux sur un segment $[a\,,b]$ avec $a \leqslant b$ telles que $\forall t \in [a\,,b],\ f(t) \leqslant g(t)$

Alors $\qquad \int_a^b f(t)\mathrm{d}t \quad \ldots \quad \int_a^b g(t)\mathrm{d}t$

COROLLAIRE : Soit f une fonction continue par morceaux sur un segment $[a\,,b]$ avec $a \leqslant b$. Alors :

$$\left|\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\right| \leqslant \int_a^b |f(x)|\mathrm{d}x$$

Théorème 5 (positivité stricte)

Soit f une fonction **continue** et positive sur $[a,b]$ **avec** $a<b$.

Si $\displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = 0$ alors $\forall x \in [a,b]$

Preuve : par contraposée

■

II.3 Relation de Chasles

Proposition 6 (admise)

Soit f une fonction continue par morceaux sur un intervalle I.
Alors pour tous réels a, b et c de I,

$$\int_a^c f(x)\,\mathrm{d}x + \int_c^b f(x)\,\mathrm{d}x =$$

III Primitives d'une fonction sur un intervalle

III.1 Ensemble des primitives d'une fonction

Définition 6

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction définie sur un **intervalle** I.
On appelle primitive de f sur I toute fonction F dérivable sur I telle que ….

Exemple : trouver une primitive de la fonction $x \longmapsto 1 + x + x^2$ sur $\mathbb{R}$.

Proposition 7

Si F et G sont deux primitives d'une même fonction f sur un intervalle I, alors il existe une constante réelle k telle que

$$\forall\, x \in I,$$

Autrement dit, deux primitives d'une même fonction f diffèrent d'une constante.

Ainsi, il suffit de trouver une primitive de f sur I pour les trouver toutes.

Exemple : trouver toutes les primitives de la fonction $x \longmapsto \dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{1+x^2}$ sur l'intervalle $]-\infty\,;0[$.

COROLLAIRE : soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction admettant des primitives sur un intervalle I.
Soit a et b deux réels donnés tels que $a \in I$.
Alors il existe une **unique** primitive F de f sur I telle que …

III.2 Intégrale fonction de sa borne supérieure

Théorème 8

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction continue sur un intervalle I et a un point de I.
Alors la fonction F définie sur I par

$$F(x) = \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$$

est l'unique primitive de f sur I, qui s'annule en a.

Autrement dit

-
-
-

Preuve : on se donne un réel x_0 de I tel que x_0 n'est pas une borne de I.

■

Exemple : la fonction définie sur $]0\,;+\infty[$ par $x \longmapsto \displaystyle\int_1^x \frac{1}{t}\,\mathrm{d}t$ est ...

Théorème 9 (existence des primitives)

Toute fonction continue sur un intervalle admet des primitives sur cet intervalle.

III.3 Primitives des fonctions usuelles

Fonction	Sur l'intervalle	Une primitive
$x \mapsto 1$	$\mathbb{R}$	$x \mapsto x$
$x \mapsto x$	$\mathbb{R}$	$x \mapsto$
$x \mapsto \dfrac{1}{x^2}$		$x \mapsto$
$x \mapsto \dfrac{1}{x}$		$x \mapsto$
$x \mapsto \mathrm{e}^x$	$\mathbb{R}$	$x \mapsto$
$x \mapsto x^n$ où $n \in \mathbb{Z}$, $n \neq -1$	sur si $n \geqslant 0$ sur si $n \leqslant -2$	$x \mapsto \dfrac{x^{n+1}}{n+1}$
$x \mapsto x^\alpha$ où $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$		$x \mapsto$
$x \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{x}}$	$]0\,;+\infty[$	$x \mapsto$
$x \mapsto \sin x$		$x \mapsto$
$x \mapsto \cos x$		$x \mapsto$
$x \mapsto 1 + \tan^2 x$		$x \mapsto$
$x \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$		$x \mapsto$
$x \mapsto \dfrac{1}{1+x^2}$		$x \mapsto$

On sait que si u est une fonction dérivable et strictement positive sur un intervalle I, alors la fonction $\ln \circ u$ est dérivable sur I et sa dérivée est

Soit u une fonction dérivable sur un intervalle I.

Fonction	une primitive	remarques
$\dfrac{u'}{u}$	$\ln \circ u$	on suppose que u est à valeurs strictement positives
$u'\,\mathrm{e}^u$		
$u'\,u^n$ avec $n \in \mathbb{Z}$, $n \neq -1$	$\dfrac{1}{n+1}u^{n+1}$	on suppose que u ne s'annule pas sur I lorsque $n \leqslant -2$

IV Comment calculer une intégrale ?

IV.1 À l'aide d'une primitive

Théorème 10 (le théorème fondamental du calcul intégral)

Soit f une fonction continue sur un intervalle I. Soit F une primitive de f sur I.
Alors pour tous réels a et b de I,

$$\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t =$$

Exemple : calculer l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 \frac{4}{1+t^2}\,\mathrm{d}t$

IV.2 Par une intégration par parties

Théorème 11

Soit u et v deux fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ sur un intervalle I.
Alors pour tous réels a et b de I,

$$\int_a^b u(t)\,v'(t)\,\mathrm{d}t = [u(t)v(t)]_a^b - \int_a^b$$

Preuve : la fonction produit uv est dérivable sur I et

■

Exemple : soit x un réel fixé. Calculer $\displaystyle\int_0^x \arctan(t)\,\mathrm{d}t$

IV.3 Par un changement de variable

Théorème 12

Soit I et J deux intervalles de $\mathbb{R}$.
Soit $\varphi : I \longrightarrow J$ une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur I, à valeurs dans J.
Soit $f : J \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue sur J.
Alors pour tous réels a et b de I,

$$\int_a^b f(\varphi(t))\,\varphi'(t)\,\mathrm{d}t =$$

Preuve : soit F une primitive de f sur J.

■

Exemple : pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$, calculer l'intégrale $I_n = \displaystyle\int_1^2 \frac{1}{t(1+t^n)}\,\mathrm{d}t$

V Une formule de Taylor

Théorème 13 (formule de Taylor avec reste intégral)

Soit $n \in \mathbb{N}$. Soit $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^{n+1}$ sur un intervalle I et $a \in I$.
Alors pour tout réel $x \in I$,

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \cdots +$$

Preuve : la démonstration se fait par récurrence sur n au moyen d'une intégration par parties.
Soit a et x deux réels fixés appartenant à I.

(i) Lorsque $n = 0$, comme f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur I, f' est continue sur I et

$$f(x) - f(a) = \int_a^x f'(t)\,\mathrm{d}t = \int_a^x \frac{(x-t)^0}{0!} f^{(0+1)}(t)\,\mathrm{d}t$$

(ii) Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons l'assertion vérifiée au rang n. Soit f une fonction de classe $\mathcal{C}^{n+2}$ sur I.

■

Exemple : soit x un réel positif.
(a) Écrire la formule de Taylor avec reste intégral pour la fonction $f : t \mapsto \ln(1+t)$ sur $[0\,, x]$ en prenant $n = 1$.
(b) En déduire que $x - \dfrac{x^2}{2} \leqslant \ln(1+x) \leqslant x$

VI Exercices

Exercice 1 Représenter graphiquement la fonction f dans un repère orthonormal du plan. En déduire, par un calcul d'aire, l'intégrale : $\displaystyle\int_{-1}^{1} f(x)\,\mathrm{d}x$

(1) $f(x) = \dfrac{1-x}{2}$ (2) $f(x) = |1-2x|$ (3) $f(x) = x - 2\lfloor x \rfloor$

(4) $f(x) = \sqrt{1-x^2}$ (5) $\star$ $f(x) = \sqrt{7+6x-x^2}$

Exercice 2 Calculer $\displaystyle\int_0^1 \sqrt{x(1-x)}\,\mathrm{d}x$

Exercice 3 Calculer les intégrales suivantes :

$$a = \int_0^{\pi} (\cos 2t + \sin t)\,\mathrm{d}t\,\mathrm{d}x \quad ; \quad b = \int_1^{\mathrm{e}} \frac{\ln x}{x}\,\mathrm{d}x$$
$$c = \int_1^2 \frac{u^3+2u^2-5u+1}{u}\,\mathrm{d}u \quad ; \quad d = \int_0^{\sqrt{3}} \frac{1}{1+x^2}\,\mathrm{d}x$$
$$\ell = \int_0^{1/2} \frac{t+1}{\sqrt{1-t^2}}\,\mathrm{d}t \; ; \quad m = \int_{-\frac{\pi}{4}}^{0} \tan^2 x\,\mathrm{d}x \; ; \quad p = \int_0^{\pi/12} \cos t\,\sin t\,\mathrm{d}t$$

Exercice 4

$$I = \int_0^{\pi/4} \frac{\cos x}{\sin x + \cos x}\,\mathrm{d}x \quad \text{et} \quad J = \int_0^{\pi/4} \frac{\sin x}{\sin x + \cos x}\,\mathrm{d}x$$

Calculer $I+J$ puis $I-J$. En déduire I et J.

Exercice 5

Déterminer les limites (lorsque $n \longrightarrow +\infty$) des sommes suivantes en les faisant apparaître comme des sommes de Riemann :

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n+k} \quad ; \quad T_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{k}{n^2+k^2} \quad ; \quad U_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{\sin(\frac{k\pi}{n})}{n}$$

$V_n = \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \sqrt{\frac{k}{n}}$. En déduire un équivalent simple de $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \sqrt{k}$ lorsque $n \to +\infty$.

Exercice 6

On définit la fonction f sur l'intervalle ouvert $I =]-1\,,+\infty[$ par

$$f(x) = x\int_0^x \frac{\mathrm{e}^t}{1+t}\,\mathrm{d}t$$

1. Justifier que f est dérivable sur I et calculer $f'(x)$.
2. Étudier les variations de f sur I.
3. Après avoir minoré $f(x)$ pour $x \in]-1\,,0]$, déterminer la limite de $f(x)$ lorsque x tend vers -1 par valeurs supérieures.
4. Étudier la branche infinie au voisinage de $+\infty$ de la courbe représentant f.

Exercice 7

On définit la suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par : $\quad I_n = \displaystyle\int_0^1 \frac{1}{1+t+t^n}\,\mathrm{d}t$

1. Calculer I_0 et I_1 .
2. Soit $n \in \mathbb{N}$ et $t \in [0\,,1]$. Comparer $\dfrac{1}{1+t+t^n}$ et $\dfrac{1}{1+t+t^{n+1}}$
   En déduire la monotonie de la suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
3. Montrer que la suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est majorée par $\ln 2$.
4. En remarquant que $\ln 2 = \displaystyle\int_0^1 \frac{1}{1+t}\,\mathrm{d}t$, montrer que

   $\forall\, n \in \mathbb{N}, \quad 0 \leqslant \ln(2) - I_n \leqslant \displaystyle\int_0^1 t^n\,\mathrm{d}t.$ En déduire $\displaystyle\lim_{n\longrightarrow+\infty} I_n$

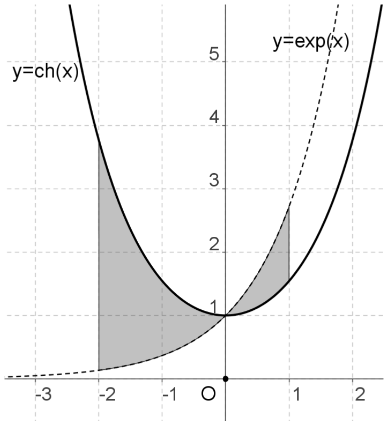
Exercice 8 Calculer, en intégrant par parties.

$$a = \int_0^{\frac{\pi}{2}} t\,\sin t\,\mathrm{d}t \quad ; \quad b = \int_0^1 x\sqrt{x+1}\,\mathrm{d}x \quad ; \quad c = \int_1^{\mathrm{e}} \frac{\ln x}{x^2}\,\mathrm{d}x$$

$$d = \int_1^{\mathrm{e}} x\,\ln x\,\mathrm{d}x \quad ; \quad y = \int_0^{\pi} \mathrm{e}^x\,\cos(2x)\,\mathrm{d}x$$

$$z = \int_0^{\frac{1}{2}} \arcsin x\,\mathrm{d}x \quad ; \quad \text{pour } x > 0,\ f(x) = \int_1^x \ln t\,\mathrm{d}t$$

Exercice 9 On pose $\forall x \in \mathbb{R}, \quad \mathrm{ch}(x) = \dfrac{\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x}}{2}$



On a représenté ci-contre les fonctions exp et ch dans le même repère orthonormal.

Calculer l'aire de la surface grisée, comprise entre les deux courbes et entre les droites d'équations $x = -2$ et $x = 1$.

Exercice 10 On pose $\qquad F(x) = \displaystyle\int_x^{x^2} \frac{1}{\ln t}\,\mathrm{d}t$

1. Donner l'ensemble de définition $\mathscr{D}$ de la fonction F.
2. (a) Pour $x \in \mathscr{D}$, calculer $\displaystyle\int_x^{x^2} \frac{1}{t\,\ln t}\,\mathrm{d}t$.
   (b) Montrer que $\forall x > 1, \quad x\,\ln 2 \leqslant F(x) \leqslant x^2\,\ln 2$.
   (c) Encadrer $F(x)$ par deux polynômes pour $x \in]0\,,\,1[$. En déduire la limite de F en 1.
3. Prouver que F est dérivable sur $[0\,,\,+\infty[$ et calculer $F'(x)$.
4. Dresser le tableau des variations de la fonction F.

Exercice 11 Calculer chacune des intégrales suivantes en effectuant le changement de variable proposé.

1. Pour $a > 0$ et $-a < x < a$, $\displaystyle\int_0^x \frac{1}{\sqrt{a^2 - t^2}}\,\mathrm{d}t$. On posera $u = \dfrac{t}{a}$
2. Pour $x \in \mathbb{R}$, $\displaystyle\int_0^x \frac{t}{1+t^4}\,\mathrm{d}t$. On posera $u = t^2$
3. $\displaystyle\int_1^2 \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{t} + 2t}$. On posera $u = \sqrt{t}$
4. $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\mathrm{d}x}{1 + \cos^2 x}$. On posera $u = \tan x$
5. $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \frac{\sin(2x)}{1 + \sin^2(x)}\,\mathrm{d}x$. On posera $u = \sin x$
6. $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{1 + x + x^2}\,\mathrm{d}x$. On posera $u = \dfrac{2x+1}{\sqrt{3}}$
7. Pour $x \in \mathbb{R}$, $\displaystyle\int_0^x \frac{\cos t\,\sin t}{2 - \sin^2 t}\,\mathrm{d}t$. On posera $u = \cos t$
8. $\displaystyle\int_{\sqrt{2}}^2 \frac{\mathrm{d}t}{t\sqrt{t^2 - 1}}$. On posera $u = \sqrt{t^2 - 1}$

Exercice 12 Soient $n \in \mathbb{N}$ et $x \in \mathbb{R}^+$.

1. En appliquant la formule de Taylor avec reste intégral à la fonction exp sur $[0, x]$, montrer que

$$\left| \mathrm{e}^x - \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} \right| \leqslant \frac{x^{n+1}}{(n+1)!}\mathrm{e}^x$$

2. En déduire $\qquad \displaystyle\lim_{n \to +\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!}$.