Espaces vectoriels

Dans tout ce chapitre, $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{K} = \mathbb{C}$.

I Structure d'espace vectoriel

I.1 Règles de calcul dans un espace vectoriel

Définition 1

Soit E un ensemble muni d'une opération interne (l'addition) notée $+$ et d'une opération externe notée $\cdot$ (la multiplication par les nombres) : $\begin{array}{ccc} \mathbb{K} \times E & \longrightarrow & E \\ (\lambda, \overrightarrow{u}) & \longmapsto & \lambda \cdot \overrightarrow{u} \end{array}$

On dit que $(E, +, \cdot)$ est un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$ ou un $\mathbb{K}$**-e.v.** ssi :

1) $\forall (\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w}) \in E^3$, $(\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}) + \overrightarrow{w} =$ — associativité de l'addition

2) $\exists \overrightarrow{0_E} \in E$; $\forall \overrightarrow{u} \in E$, $\overrightarrow{u} + \overrightarrow{0_E} = \overrightarrow{0_E} + \overrightarrow{u} =$ — élément neutre pour l'addition

3) $\forall \overrightarrow{u} \in E, \exists \overrightarrow{v} \in E$; $\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v} = \overrightarrow{v} + \overrightarrow{u} = \overrightarrow{0_E}$ — opposé pour l'addition
On écrit $\overrightarrow{v} =$

4) $\forall (\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}) \in E^2$, $\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v} =$ — commutativité de l'addition

5) $\forall (\lambda, \mu) \in \mathbb{K}^2, \forall \overrightarrow{u} \in E, \quad (\lambda + \mu) \cdot \overrightarrow{u} =$ — distributivité

6) $\forall \lambda \in \mathbb{K}, \forall (\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}) \in E^2, \quad \lambda \cdot (\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}) =$ — distributivité

7) $\forall (\lambda, \mu) \in \mathbb{K}^2, \forall \overrightarrow{u} \in E, \quad \lambda \cdot (\mu \cdot \overrightarrow{u}) =$ — associativité mixte

8) $\forall \overrightarrow{u} \in E, \; 1 \cdot \overrightarrow{u} =$ — élément neutre pour la multiplication externe

Remarques :

- ▷ On écrit souvent $\lambda \overrightarrow{u}$ à la place de $\lambda \cdot \overrightarrow{u}$.
- ▷ Si E est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, les éléments de E sont appelés **vecteurs** et ceux de $\mathbb{K}$ sont appelés **scalaires**.

Premiers exemples :

- L'ensemble $\mathscr{V}$ des vecteurs géométriques du plan usuel (ou de l'espace usuel) est un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$.
- $(\mathbb{R}, +, \times)$ est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel, mais $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$ et $\mathbb{Q}$ n'en sont pas.
- $(\mathbb{C}, +, \cdot)$ est un $\mathbb{R}$-e.v. lorsque $+$ désigne l'addition usuelle des complexes et $\lambda \cdot z$ le produit «externe» d'un complexe z par un réel λ.

Proposition 1

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.
Pour tout scalaire λ et pour tous vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ de E :

- $\lambda\overrightarrow{u} = \overrightarrow{0_E} \iff$
- $\lambda(-\overrightarrow{u}) = (-\lambda)\overrightarrow{u} =$
- $\lambda(\overrightarrow{u} - \overrightarrow{v}) =$

Preuve : • $0 \cdot \overrightarrow{u} =$

■

I.2 Exemples fondamentaux

I.2.1 L'espace $\mathbb{K}^n$

Soit n un entier supérieur ou égal à 2. On note $\mathbb{K}^n$ l'ensemble des listes ordonnées de n nombres (réels si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou complexes si $\mathbb{K} = \mathbb{C}$). On définit sur $\mathbb{K}^n$ les lois $+$ et $\cdot$ par :

$$(x_1, x_2, \ldots, x_n) + (y_1, y_2, \ldots, y_n) \quad =$$

$$\lambda \cdot (x_1, x_2, \ldots, x_n) \quad =$$

où $x_1, x_2, \ldots, x_n$, $y_1, y_2, \ldots, y_n$, λ sont des éléments quelconques de $\mathbb{K}$.

On peut identifier $\mathbb{K}^n$ à

Théorème 2

$(\mathbb{K}^n\,, +\,, \cdot)$ est un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$.

I.2.2 Espace de matrices

Pour tous entiers naturels non nuls n et p, l'ensemble $\mathfrak{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ des matrices à n lignes et p colonnes, à coefficients dans $\mathbb{K}$, est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel pour l'addition matricielle $+$ et la multiplication externe$\cdot$ d'une matrice par un scalaire.

I.2.3 Espace de polynômes

L'ensemble $\mathbb{K}[X]$ des polynômes à coefficients dans $\mathbb{K}$, muni de

I.2.4 Espace de fonctions

Théorème 3

Soit Ω un ensemble non vide. On note $\mathcal{F}(\Omega\,,\mathbb{K})$ ou encore $\mathbb{K}^{\Omega}$ l'ensemble des applications de Ω à valeurs dans $\mathbb{K}$. On définit sur $\mathcal{F}(\Omega\,,\mathbb{K})$ les lois $+$ et $\cdot$ de la façon suivante : pour toutes applications f et g de $\mathbb{K}^{\Omega}$, pour tout scalaire λ,

$$(f+g)\ :\ \begin{array}{ccc} \Omega & \longrightarrow & \mathbb{K} \\ x & \longmapsto & \end{array} \qquad \text{et} \qquad (\lambda\cdot f)\ :\ \begin{array}{ccc} \Omega & \longrightarrow & \mathbb{K} \\ x & \longmapsto & \end{array}$$

Muni de ces deux lois, $\mathcal{F}(\Omega\,,\mathbb{K})$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel dont le vecteur nul est

Preuve : montrons par exemple, l'axiome n°6 de la définition 1.

■

Conséquences :

- Soit I un intervalle non vide de $\mathbb{R}$. L'ensemble $\mathcal{F}(I,\mathbb{R})=\mathbb{R}^{I}$ des fonctions réelles définies sur I est, pour les opérations usuelles d'addition et de produit par un réel, un $\mathbb{R}$-espace vectoriel.
- L'ensemble $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ des suites réelles, muni de l'addition des suites et du produit par un réel, est un

I.3 Sous-espaces vectoriels

Définition 2

Soit E un $\mathbb{K}-$e.v. et F une partie de E.
On dit que F est un **sous-espace vectoriel** de E ssi

- $\overrightarrow{0_E}\in F$
- pour tous vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ de F ,
- pour tout scalaire λ, pour tout vecteur $\overrightarrow{u}$ de F ,

Exemples :

(i) $\left\{\overrightarrow{0_E}\right\}$ et E sont des sous-espaces vectoriels de E.

(ii) $\left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3\ \mid\ 3x+2y= \qquad\right\}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$.

(iii) Soit n un entier naturel. L'ensemble $\mathbb{K}_n[X]$ des

(iv) Soit I un intervalle non vide de $\mathbb{R}$. L'ensemble $\mathcal{D}(I, \mathbb{R})$ des fonctions dérivables sur I à valeurs dans $\mathbb{R}$ est un s.e.v. de l'espace

Proposition 4

Si F est un sous-espace vectoriel du $\mathbb{K}$-e.v. E,
alors l'ensemble F muni des lois induites $+$ et $\cdot$ est lui-même un

Proposition 5

L'intersection de deux sous-espaces vectoriels de E est un s.e.v. de E.

II Familles libres de vecteurs, familles génératrices

Dans ce paragraphe, E désigne un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$.

II.1 Sous-espace vectoriel engendré par une famille

Définition 3

On appelle **combinaison linéaire** des vecteurs $\overrightarrow{u_1}$, $\overrightarrow{u_2}$, $\overrightarrow{u_3}, \ldots,$ $\overrightarrow{u_p}$ de E tout vecteur $\overrightarrow{V}$ de la forme :

$$\overrightarrow{V} = \alpha_1 \overrightarrow{u_1} + \alpha_2 \overrightarrow{u_2} + \alpha_3 \overrightarrow{u_3} + \cdots + \alpha_p \overrightarrow{u_p} = \sum_{i=1}^{p}$$

où α_1, α_2, $\alpha_3 \ldots \alpha_p$ sont des scalaires quelconques.

Exemple : le vecteur $\overrightarrow{V} = (3\,,\,4)$ est combinaison linéaire des vecteurs $\overrightarrow{u_1} = (1\,,\,0)$ et $\overrightarrow{u_2} = (-1\,,\,1)$.

En effet,

Théorème 6

Soit $\overrightarrow{u_1}$, $\overrightarrow{u_2}$, $\overrightarrow{u_3}, \ldots,$ $\overrightarrow{u_p}$ des vecteurs de E.
L'ensemble de toutes les combinaisons linéaires des $\overrightarrow{u_i}$ est un sous-espace vectoriel de E.
On l'appelle s.e.v. engendré par les vecteurs $\overrightarrow{u_1}$, $\overrightarrow{u_2}$, $\overrightarrow{u_3}, \ldots,$ $\overrightarrow{u_p}$ et on le note

$$\mathrm{Vect}(\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_2}, \overrightarrow{u_3}, \ldots, \overrightarrow{u_p})$$

Exemple : soit $\overrightarrow{u} = (1\,,\,-2)$ un vecteur de $\mathbb{R}^2$.

Alors $\text{Vect}(\overrightarrow{u}) = \{\lambda\,\overrightarrow{u} \;\mid\; \lambda \in \mathbb{R}\} =$

II.2 Famille génératrice

Définition 4

Soit $\mathscr{F} = (\overrightarrow{u_1}\,,\,\overrightarrow{u_2}\,,\,\overrightarrow{u_3}\,,\ldots\,,\,\overrightarrow{u_p})$ une famille finie de p vecteurs de E.
On dit que $\mathscr{F}$ est une **famille génératrice** de E
ssi $\quad \text{Vect}(\overrightarrow{u_1}\,,\,\overrightarrow{u_2}\,,\,\overrightarrow{u_3}\,,\ldots\,,\,\overrightarrow{u_p}) = E$
ssi $\quad$ tout vecteur de E est combinaison linéaire de $\overrightarrow{u_1}\,,\,\overrightarrow{u_2}\,,\,\overrightarrow{u_3}\,,\ldots\,,\,\overrightarrow{u_p}$
ssi

Exemple : montrer que dans $\mathbb{R}^2$, les vecteurs $\overrightarrow{u_1} = (1\,,\,1)$ et $\overrightarrow{u_2} = (2\,,\,3)$ forment une famille génératrice.

II.3 Indépendance linéaire

Définition 5

Soit $\mathscr{F} = (\overrightarrow{u_1}\,,\,\overrightarrow{u_2}\,,\,\overrightarrow{u_3}\,,\ldots\,,\,\overrightarrow{u_p})$ une famille de p vecteurs de E.
- On dit que la famille $\mathscr{F}$ est **liée**
ssi l'un des vecteurs de $\mathscr{F}$ est combinaison linéaire des autres vecteurs de $\mathscr{F}$.
- Une famille de vecteurs qui n'est pas liée est dite …

Exemples : (i) Une famille de deux vecteurs $(\overrightarrow{u}\,,\,\overrightarrow{v})$ du plan usuel est liée ssi $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ sont
(ii) Dans l'espace $\mathbb{R}^3$, les vecteurs $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$ et $\overrightarrow{w}$ forment une famille liée ssi ces trois vecteurs sont

Proposition 7

Une famille $(\overrightarrow{u_1}\,,\ \overrightarrow{u_2}\,,\dots,\ \overrightarrow{u_p})$ de vecteurs de E est libre ssi

$\forall\,(\alpha_1\,,\alpha_2\,,\dots,\ \alpha_p)\in\mathbb{K}^p,\qquad \alpha_1\,\overrightarrow{u_1}+\alpha_2\,\overrightarrow{u_2}+\dots+\alpha_p\,\overrightarrow{u_p}=\overrightarrow{0_E}\Longrightarrow$

Exemple : dans $\mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$, on définit les fonctions f_1, f_2 et f_3 par

$$\forall\,x\in\mathbb{R},\quad f_1(x)=1\ ,\quad f_2(x)=\cos x\ ,\quad f_3(x)=\sin x$$

Montrer que la famille $(f_1\,,f_2\,,f_3)$ est libre dans $\mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$.

II.4 Bases d'un espace vectoriel

Définition 6

On appelle **base de** E toute famille et de E.

Exemples :

(i) Tout vecteur $\overrightarrow{u}=(x_1\,,x_2\,,\dots,x_n)$ de $\mathbb{K}^n$ est combinaison linéaire des vecteurs $\overrightarrow{e_1}\,,\ \overrightarrow{e_2}\,,\ \dots,\ \overrightarrow{e_n}$ définis par :

$$\begin{cases}\overrightarrow{e_1} & = & (1\,,\,0\,,\,0\,,\,\dots\,,0)\\ \overrightarrow{e_2} & = & (0\,,\,1\,,\,0\,,\,\dots\,,0)\\ \ \vdots & & \\ \overrightarrow{e_n} & = & (0\,,\,0\,,\,\dots\,,\,0\,,\,1)\end{cases}$$

$\overrightarrow{u}=x_1\,\overrightarrow{e_1}+$

Définition 7

On dit que $(\overrightarrow{e_1}\,,\ \overrightarrow{e_2}\,,\dots,\ \overrightarrow{e_n})$ est la base canonique de $\mathbb{K}^n$.

(ii) Posons $E = \mathbb{R}^2$, $\overrightarrow{u_1} = (1\,,\,1)$ et $\overrightarrow{u_2} = (2\,,\,3)$. On a vu que $\mathrm{Vect}(\overrightarrow{u_1}\,,\overrightarrow{u_2}) = E$.
Montrons de plus que $(\overrightarrow{u_1}\,,\overrightarrow{u_2})$ est une famille libre.

II.5 Coordonnées d'un vecteur dans une base finie

Proposition 8

Soit $\mathscr{B} = (\overrightarrow{u_1}\,,\ \overrightarrow{u_2}\,,\dots\,,\ \overrightarrow{u_p})$ une famille de vecteurs de E.

La famille de vecteurs $\mathscr{B} = (\overrightarrow{u_1}\,,\ \overrightarrow{u_2}\,,\dots\,,\ \overrightarrow{u_p})$ est une base de E
ssi tout vecteur $\overrightarrow{V}$ de E s'écrit **de manière unique** sous la forme

$$\overrightarrow{V} = \alpha_1\,\overrightarrow{u_1} + \alpha_2\,\overrightarrow{u_2} + \cdots + \alpha_p\,\overrightarrow{u_p}$$

avec $(\alpha_1\,,\alpha_2\,,\dots\,,\ \alpha_p) \in \mathbb{K}^p$

On dit alors que $(\alpha_1\,,\alpha_2\,,\dots\,,\ \alpha_p)$ sont les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{V}$ dans la base $\mathscr{B}$ et on écrit simplement : $\overrightarrow{V}\begin{pmatrix}\alpha_1\\ \alpha_2\\ \vdots\\ \alpha_p\end{pmatrix}$

Preuve : «⇒» On suppose que $\mathscr{B} = (\overrightarrow{u_1}\,,\ \overrightarrow{u_2}\,,\dots\,,\ \overrightarrow{u_p})$ est une base de E.

■

III Somme de deux sous-espaces vectoriels

III.1 Sous-espace engendré par la réunion de deux s.e.v

Définition 8

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel. Soit F et G deux sous-espaces vectoriels de E.
On appelle **somme de** F **et** G le sous-ensemble de E noté $F+G$ défini par

$$F+G=$$

Proposition 9

Si F et G sont des sous-espaces vectoriels de E, alors

(i) $F+G$ est un sous-espace vectoriel de E.

(ii) $F+G$ est le sous-espace vectoriel de E engendré par

Preuve : (i) $F+G\neq\emptyset$ car

■

III.2 Somme directe

Définition 9

Soit F et G deux s.e.v. d'un espace vectoriel E.
On dit que la somme $F+G$ est directe lorsque $F \cap G =$
On la note alors $F \oplus G$.

Proposition 10

$$F+G = F \oplus G \iff \left[\forall \overrightarrow{x} \in F+G,\ \exists!(\overrightarrow{x_1}, \overrightarrow{x_2}) \in F \times G\ ; \qquad \right]$$

Preuve : "$\Rightarrow$" On suppose que F et G sont en somme directe. Alors

■

III.3 Sous-espaces vectoriels supplémentaires

Définition 10

Soit F et G deux s.e.v. d'un espace vectoriel E.
On dit que F et G sont supplémentaires dans E ssi $E = F \oplus G$ c'est-à-dire

$$E = F + G \qquad \text{et} \qquad F \cap G =$$

On déduit de la proposition précédente que

$$E = F \oplus G \iff \left[\forall \overrightarrow{x} \in E,\ \exists!(\overrightarrow{x_1}, \overrightarrow{x_2}) \in F \times G\ ; \qquad \right]$$

IV Espaces vectoriels de dimension finie

IV.1 Existence de bases

Définition 11

On appelle espace vectoriel de dimension finie, tout espace vectoriel admettant au moins une famille ...

Exemples :

Proposition 11 (admise, appelée «théorème de la base incomplète»)

Soit E un $\mathbb{K}-$espace vectoriel de dimension finie, non réduit à $\left\{\overrightarrow{0_E}\right\}$.
Toute famille libre de E peut être complétée en une base.

Tout espace vectoriel de dimension finie non réduit à $\left\{\overrightarrow{0_E}\right\}$ admet au moins une base.

IV.2 Dimension d'un espace vectoriel

Proposition 12 (admise)

Soit E un $\mathbb{K}-$espace vectoriel de dimension finie.
Alors toutes les bases de E comportent le même nombre d'éléments.

Définition 12

Si E est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie non réduit à $\left\{\overrightarrow{0_E}\right\}$, on appelle **dimension** de E le nombre de vecteurs constituant une base de E. Elle est notée $\dim(E)$.
Si $E = \left\{\overrightarrow{0_E}\right\}$, on convient que

Exemples : (i) $\mathbb{R}^n$ est de dimension
(ii) Soit $n \in \mathbb{N}$. Alors l'ensemble $\mathbb{K}_n[X] = \{P \in \mathbb{K}[X] \mid \deg(P) \leqslant n\}$ est un

IV.3 Caractérisation des bases

Théorème 13

Dans un espace vectoriel E de dimension finie n ($n \in \mathbb{N}^*$),

- toute famille libre comporte au plus
- une famille libre comportant n vecteurs est une
- toute famille génératrice de E comporte
- une famille génératrice de E comportant n vecteurs est une

Pour montrer qu'une famille $\mathscr{B}$ de p vecteurs est une base de E (avec $\dim(E) = n$), il **suffit** donc de vérifier que $p = n$ et que $\mathscr{B}$ est

IV.4 Sous-espaces en dimension finie

Théorème 14

Soit E un $\mathbb{K}-$espace vectoriel de dimension finie n et F un sous-espace vectoriel de E. Alors

- F est de dimension finie et $\dim(F)$ $\dim(E)$
- Si de plus $\dim(F) = \dim(E)$ alors

Preuve : Soit F un sous-espace vectoriel de E.

■

Exemples :

(i) Si $\dim(F) = 0$ alors

(ii) Si $\dim(F) = 1$, on dit alors que F est une

(iii) Si $\dim(F) = 2$, on dit alors que F est un

(iv) Si $\dim(F) = \dim(E) - 1$, on dit alors que F est un

Proposition 15 (existence de supplémentaires en dimension finie)

Soit E un $\mathbb{K}-$espace vectoriel de dimension finie n ($n \in \mathbb{N}^*$).
et F un sous espace vectoriel de E. Alors

(i) F possède au moins un supplémentaire dans E
c.à.d

(ii) Dans ce cas, $\dim(E) =$

Théorème 16 (formule de Grassman)

Soit E un $\mathbb{K}-$espace vectoriel de dimension finie. Si F et G sont deux sous-espaces vectoriels de E, alors

$$\dim(F + G) =$$

Preuve : supposons $F \neq \left\{\overrightarrow{0_E}\right\}$.

■

COROLLAIRE : Soit E un $\mathbb{K}-$espace vectoriel de dimension finie.
Soit F et G deux sous-espaces vectoriels de E.
Alors F et G sont supplémentaires dans E :
si et seulement si deux des trois propriétés suivantes sont satisfaites :

(i)

(ii)

(iii)

IV.5 Rang d'une famille finie de vecteurs

Définition 13

Soit E un $\mathbb{K}-$espace vectoriel de dimension finie n ($n \in \mathbb{N}^*$). On appelle rang de la famille $\mathscr{F}$, noté $\mathrm{rg}(\mathscr{F})$, la dimension de l'espace vectoriel engendré par cette famille. Autrement dit

$$\mathrm{rg}(\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_2}, \ldots, \overrightarrow{u_p}) =$$

Exemple :

$$\mathrm{rg}(\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_2}) = \left\{ \begin{array}{l} \\ \\ \\ \end{array} \right.$$

REMARQUE :

$$\mathrm{rg}(\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_2}, \ldots, \overrightarrow{u_p}) = p \quad \text{ssi}$$

Comment calcule-t-on le rang d'une famille de vecteurs ?
On ne modifie pas le rang d'une famille de vecteur lorsque :

- on retire le vecteur nul de la famille si celui-ci y apparaît,
- on permute les vecteurs de la famille,
- on multiplie un vecteur par un scalaire λ non nul,
- on ajoute à un vecteur une combinaison linéaire des autres vecteurs.

V Exercices

Exercice 1 On pose $\overrightarrow{u_1} = (1, -1, 2)$ et $\overrightarrow{u_2} = (1, 1, -1)$.

Parmi les vecteurs suivants, repérer ceux qui sont combinaisons linéaires de $\overrightarrow{u_1}$ et $\overrightarrow{u_2}$ puis expliciter la combinaison linéaire correspondante.

$\overrightarrow{a} = (3, 1, 0)$, $\overrightarrow{b} = (4, 1, 0)$, $\overrightarrow{c} = (10, -4, 11)$
$\overrightarrow{d} = (-1, -3, 4)$, $\overrightarrow{f} = (1, -5, 8)$

Exercice 2 Dans l'espace vectoriel $\mathbb{R}^3$, les sous-ensembles suivants sont-ils des sous-espaces vectoriels ?

1. $\mathscr{A} = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + y - 4z = 0\}$
2. $\mathscr{B} = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x - 2y + z = 1\}$
3. $\mathscr{C} = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid xy - z = 0\}$
4. $\mathscr{D} = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x - 2y = 0 \quad \text{et} \quad z - x = 0\}$
5. $\mathscr{E} = \{(\alpha, \beta, 3\alpha) \mid \alpha \in \mathbb{R} \quad \text{et} \quad \beta \in \mathbb{R}\}$

Déterminer (s'il y a lieu) une base pour chacun de ces sous-espaces vectoriels.

Exercice 3

Les ensembles suivants sont-ils des sous-espaces vectoriels de l'ensemble des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$?
1. l'ensemble des fonctions positives sur $\mathbb{R}$,
2. l'ensemble des fonctions croissantes sur $\mathbb{R}$,
3. l'ensemble des fonctions solutions sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle : $y' = 2\,y$.

Exercice 4

1. L'ensemble des suites réelles convergentes constitue-t-il un $\mathbb{R}$-espace vectoriel ?
2. L'ensemble des suites réelles divergentes constitue-t-il un $\mathbb{R}$-espace vectoriel ?
3. Soit ℓ un nombre réel. L'ensemble des suites réelles convergeant vers ℓ, est-il un $\mathbb{R}$-espace vectoriel ?

Exercice 5 On se place dans l'espace vectoriel $\mathfrak{M}_2(\mathbb{R})$.

On pose $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.
Montrer que $A^2 \in \mathrm{Vect}(I\,,\,A)$.

Exercice 6

On se place dans $\mathbb{R}_2[X]$ l'espace vectoriel des polynômes de degré inférieur ou égal à 2.

1. L'ensemble $A = \{P \in \mathbb{R}_2[X] \mid P(1) = P(2)\}$ est-il un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}_2[X]$?
2. En écrivant P sous la forme $P(X) = a\,X^2 + b\,X + c$, quelle relation liant a et b caractérise les éléments de A ?

Exercice 7

On pose, pour tout réel x, $\begin{cases} f(x) &= \sin x \\ g(x) &= \cos x \\ h(x) &= x \end{cases}$

1. (f, g, h) est-elle une famille libre de $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$?
2. Justifier que la fonction $\varphi : x \longmapsto 2\,x - \cos\left(x - \dfrac{\pi}{3}\right)$ est combinaison linéaire des fonctions f , g et h.
3. Que dire de l'ensemble des solutions sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle $y'' + y = 0$?

Exercice 8

Dans $\mathbb{C}[X]$, on se donne les polynômes : $\left\{\begin{array}{lcl} P & = & 1 \\ Q & = & X+i \\ R & = & (X+i)^2 \end{array}\right.$

1. Montrer que (P, Q, R) est une famille libre de $\mathbb{C}[X]$.
2. Justifier que le polynôme $T = X^2$ est combinaison linéaire de P, Q et R.

Exercice 9 Dans $\mathbb{R}_3[X]$, on considère les sous-espaces vectoriels suivants :

$$F = \{P \in \mathbb{R}_3[X] \ | \ P(0) = 0\} \quad \text{et} \quad G = \text{Vect}\left(1+X\,,\, X+X^2\,,\, X^2+X^3\right)$$

Déterminer les dimensions de F, G, $F \cap G$ et de $F+G$.

Exercice 10

Dans $E = \mathfrak{M}_{4,1}(\mathbb{R})$, on considère les sous-espaces vectoriels $F = \text{Vect}(a, b, c)$ et $G = \text{Vect}(d, e)$ avec :

$$a = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} \quad b = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} \quad c = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} \quad d = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} \quad e = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

1. Déterminer les dimensions de F, G, $F+G$ et $F \cap G$.
2. Donner une base de $F \cap G$.

Exercice 11

Soit (Σ) le système d'équations linéaires :

$$\left\{\begin{array}{l} x + 3y + 2z = 0 \\ x + y + z + t = 0 \\ x - t = 0 \end{array}\right.$$

Montrer que l'ensemble des solutions de (Σ) forme un sous-espace vectoriel F de $\mathbb{R}^4$. Déterminer la dimension et une base de F.

Exercice 12

On considère les matrices de $\mathfrak{M}_3(\mathbb{R})$:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Soit E l'ensemble des matrices M de $\mathfrak{M}_3(\mathbb{R})$ telles que $AM = MA$.

1. (a) Vérifier que B appartient à E.
   (b) Soit n un entier naturel, montrer que A^n appartient à E.
2. Déterminer tous les réels x, y, z tels que $xI_3 + yA + zB = 0_3$.
3. (a) Montrer que E est l'ensemble des matrices de la forme $\begin{pmatrix} a & b & c \\ b & a+c & b \\ c & b & a \end{pmatrix}$ avec a, b, c réels.
   (b) En déduire que toute matrice de E est combinaison linéaire des matrices I_3, A et B puis que E est un sous-espace vectoriel de $\mathfrak{M}_3(\mathbb{R})$.
4. À l'aide des résultats précédents, montrer que $\mathscr{B} = (I_3, A, B)$ est une base de E.

Exercice 13

1. On considère les vecteurs de $\mathbb{R}^4$: $\overrightarrow{u} = (1, 2, -1, -1)$ et $\overrightarrow{v} = (2, 3, 0, -1)$. Calculer le rang de la famille de vecteurs $(\overrightarrow{u}\,,\,\overrightarrow{v})$.
2. On se donne $\overrightarrow{u} = (-2, 1, 1, 1)$; $\overrightarrow{v} = (0, 3, 1, -1)$; $\overrightarrow{w} = (-6, 9, 5, 1)$
   Calculer le rang de la famille de vecteurs $(\overrightarrow{u}\,,\,\overrightarrow{v}\,,\,\overrightarrow{w})$.

Exercice 14

Soit $E = \{(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \mid (u_n)_n \text{ converge }\}$.

Montrer que l'ensemble des suites constantes et l'ensemble des suites convergeant vers 0 sont des sous-espaces supplémentaires de E.