Développements limités

Dans tout ce chapitre, I désigne un intervalle de $\mathbb{R}$ non vide et non réduit à un point.

I Notion de développement limité

Dans tout ce paragraphe, a désigne un nombre réel qui est un élément de I (ou une extrémité de I).

I.1 Unicité d'un développement limité

Définition 1

Soit $n \in \mathbb{N}$.
On dit que la fonction $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ admet un **développement limité** à l'ordre n au voisinage de a (en abrégé, un $\mathrm{DL}_n(a)$) s'il existe un polynôme P de degré au plus n et une fonction ε définie sur I tels que, pour tout réel x voisin de a,

$$f(x) = P(x-a) + (x-a)^n \varepsilon(x) \quad \text{avec } \lim_{x \longrightarrow a} \varepsilon(x) = \ldots$$

- Le polynôme $P(X)$ est appelé la **partie régulière** du développement limité de f en a.
- $(x-a)^n \varepsilon(x)$ est appelé **reste** d'ordre n du développement limité de f en a.

Autrement dit, la fonction f admet un $\mathrm{DL}_n(a)$ s'il existe des nombres réels $b_0,\ b_1, \ldots, b_n$ et une fonction ε définie sur $J = \{h \in \mathbb{R} \mid a+h \in I\}$ tels que, pour tout réel h voisin de 0,

$$\boxed{f(a+h) = b_0 + b_1 h + b_2 h^2 + \cdots + b_n h^n + h^n \varepsilon(h)} \quad \text{avec} \quad \lim_{h \to 0} \varepsilon(h) = 0$$

Remarques :

- $b_0 = f(\quad)$
- On admettra que si un tel développement limité existe, alors sa partie régulière est unique.
- f admet un $\mathrm{DL}_n(a)$ ssi la fonction $\quad g : h \longmapsto$
- Le fait que $\lim_{h \to 0} \varepsilon(h) = 0$ signifie que, pour tout nombre strictement positif d fixé, aussi proche de 0 que l'on veut, il existe un intervalle ouvert centré en 0 sur lequel $|\varepsilon(h)| < d$.
- Si la fonction f admet pour $\mathrm{DL}_n(a)$: $\quad f(x) = \sum_{k=0}^{n} b_k (x-a)^k + o\big((x-a)^n\big)$
  et si p est le plus petit entier naturel tel que $b_p \neq 0$, alors

$$f(x) \underset{(x \longrightarrow a)}{\sim}$$

Proposition 1

On suppose que l'intervalle I contient le réel a.

(i) f admet un $\mathrm{DL}_0(a)$ ssi f est ...

(ii) f admet un $\mathrm{DL}_1(a)$ ssi f est ...

Exemple : soit f la fonction définie sur $I =]-1;1[$ par $f(x) = \dfrac{1}{1-x}$
Donner le développement limité à l'odre n ($n \in \mathbb{N}$) au voisinage de zéro de f.

Proposition 2

Si la fonction f admet un $\mathrm{DL}_n(0)$ et si f est **paire** (resp. impaire),
alors la partie régulière du développement limité de f en 0 est

I.2 Condition suffisante d'existence

La formule de Taylor-Young, qu'on va maintenant énoncer, donne une information sur le comportement local de f au voisinage d'un point a.

Théorème 3 (Formule de Taylor-Young, admise)

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et f une fonction de classe $\mathscr{C}^n$ sur un intervalle I. Si a est un point de I,
alors f admet un $\mathrm{DL}_n(a)$ donné par :

$$f(x) = f(a) +$$

avec $\lim\limits_{x \to a} \varepsilon(x) = 0$

I.3 Développements limités usuels au voisinage de 0

Proposition 4

Au voisinage de zéro

- $e^x =$
- $\sin x =$
- $\cos x =$
- Pour α réel,
  $(1+x)^\alpha =$

Exemple : donner le $DL_3(0)$ de la fonction $x \longmapsto \dfrac{1}{\sqrt{1+x}}$

II Opérations sur les développements limités

II.1 Développement limité d'une somme et d'un produit

Proposition 5

Soit f et g deux fonctions définies sur un intervalle I et admettant les développements limités à l'ordre n ($n \in \mathbb{N}^*$) au vosinage de 0 :

$$f(x) = P_n(x) + x^n \varepsilon_1(x) \quad \text{et} \quad g(x) = Q_n(x) + x^n \varepsilon_2(x)$$

où P_n et Q_n sont des polynômes de degré au plus n.
Alors les fonctions $f+g$ et fg admettent des développements limités à l'ordre n en 0 donnés par :

$$\begin{aligned} (f+g)(x) &= \\ (fg)(x) &= R_n(x) + x^n \varepsilon_4(x) \end{aligned}$$

où $R_n(x)$ est le polynôme égal au produit $P_n(x)Q_n(x)$ auquel on a retiré tous les termes de degrés strictement supérieurs à n.

Exemple : déterminer le développement limité à l'ordre 3 au voisinage de zéro de la fonction φ définie par $\varphi(x) = \dfrac{\sin x}{\sqrt{1-x}}$

II.2 Intégration terme à terme d'un développement limité

Théorème 6

Soit $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction dérivable sur un intervalle I. Soit $a \in I$.
Si la dérivée f' admet un $\mathrm{DL}_n(a)$ de la forme :

$$f'(x) = b_0 + b_1(x-a) + b_2(x-a)^2 + \cdots + b_n(x-a)^n + (x-a)^n \varepsilon_1(x) \quad \text{avec} \quad \lim_{x \to a} \varepsilon_1(x) = 0$$

Alors f admet un $\mathrm{DL}_{n+1}(a)$ donné par :

$$f(x) =$$

avec $\lim\limits_{x \longrightarrow a}$

Preuve : on pose pour tout réel $x \in I$,

$$\varphi(x) = f(x) - \left[f(a) + b_0(x-a) + b_1 \frac{(x-a)^2}{2} + \cdots + b_n \frac{(x-a)^{n+1}}{n+1} \right]$$

■

Exemple : soit f la fonction définie sur l'intervalle $I =]-1, +\infty[$ par

$$f(x) = \ln(1+x)$$

Déterminer le développement limité à l'ordre n ($n \in \mathbb{N}^*$) de la fonction f au voisinage de zéro.

II.3 Développement limité d'une fonction composée

Proposition 7 (composition)

Soit f et g deux fonctions admettant des $\mathrm{DL}_n(0)$ de parties régulières respectives $P_n(x)$ et $Q_n(x)$.
Si $f(0) = 0$ alors la fonction $g \circ f$ admet un $\mathrm{DL}_n(0)$ dont la partie régulière est obtenue en ne conservant dans le polynôme $Q_n(P_n(x))$ que les monômes de degré p où $p \leqslant n$

En pratique, on détermine les $\mathrm{DL}_n(0)$ de g et f :

$$f(x) = P_n(x) + x^n \varepsilon_1(x) \quad \text{et} \quad g(u) = Q_n(u) + u^n \varepsilon_2(u)$$

On remplace ensuite le u de $g(u)$ par $P_n(x)$. On calcule de proche en proche les $u^k = P_n(x)^k$ pour $1 \leqslant k \leqslant n$, en ne gardant à chaque étape que les termes en x^p avec $p \leqslant n$.

Exemple : déterminer le $\mathrm{DL}_5(0)$ de la fonction h définie sur $\mathbb{R}$ par $h(x) = \cos(\sin x)$

III Applications des développements limités

III.1 Calcul de limite, recherche d'équivalent

Exemple : donner un équivalent simple en 0 de la fonction $f : x \longmapsto \dfrac{1}{\sin x} - \dfrac{1}{\tan x}$

III.2 Étude locale d'une fonction au voisinage d'un point, tangente

Si une fonction f, définie en a, admet un $\mathrm{DL}_n(a)$ à 3 termes :

$$f(x) = b_0 + b_1(x-a) + b_n(x-a)^n + (x-a)^n\varepsilon(x)$$

> **Exemple** : calculer le développement limité à l'ordre 2 au voisinage de 0 de la fonction $f : x \longmapsto (2x+3)\mathrm{e}^{-x}$. En déduire l'équation réduite de la tangente (T) à la courbe $\mathscr{C}_f$ au point $A(0;3)$ et la position de (T) par rapport à $\mathscr{C}_f$.

III.3 Recherche d'asymptote oblique en $\pm\infty$

Pour obtenir l'équation réduite d'une éventuelle asymptote oblique au graphe $\mathscr{C}_f$ d'une fonction f en $\pm\infty$ et sa position par rapport à $\mathscr{C}_f$:

> **Exemple** : déterminer l'asymptote oblique à la courbe $\mathscr{C}$ représentant la fonction
>
> $$f : x \longmapsto x\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}$$

IV Exercices

Exercice 1

1. Calculer le développement limité à l'ordre 3 au voisinage de 0 de la fonction $f : x \longmapsto 2\sin x \cos x$
2. Déterminer le développement limité à l'ordre 2 au voisinage de 0 de la fonction $g : x \longmapsto \sqrt{1-x}\cos x$
3. Calculer le développement limité à l'ordre 3 au voisinage de 0 de la fonction $h : x \longmapsto \sqrt{1+\sin x}$

Exercice 2

On définit la fonction φ sur $\mathbb{R}$ par $\varphi(x) = \dfrac{\sin x}{1+x^4}$. Calculer $\varphi^{(5)}(0)$

Exercice 3

1. Justifier que la dérivée de la fonction tan admet un développement limité à l'ordre 4 au voisinage de 0 donné par
$$\tan'(x) = a + bx^2 + cx^4 + x^4\varepsilon_1(x)$$
2. En déduire en fonction de a, b et c le $\mathrm{DL}_5(0)$ de la fonction tan.
3. Sachant que $\tan'(x) = 1 + \tan^2 x$, calculer a, b et c.

Exercice 4

Soit f la fonction définie sur $\left]-\dfrac{1}{2}, +\infty\right[$ par : $f(x) = \dfrac{1-x}{\sqrt{1+2x}}$

On note $\mathscr{C}$ la courbe représentative de la fonction f dans un repère $\left(O; \vec{i}, \vec{j}\right)$ du plan.

1. Donner la limite de f en $+\infty$.
2. Rappeler le développement limité à l'ordre 2 en 0 de la fonction $t \longmapsto (1+t)^{-1/2}$.
3. (a) Calculer le développement limité, à l'ordre 2, au voisinage de 0, de la fonction f.
   (b) En déduire une équation de la tangente (T) à la courbe $\mathscr{C}$ au point d'abscisse 0.
   (c) Étudier la position de (T) par rapport à $\mathscr{C}$ au voisinage de ce point.

Exercice 5

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \displaystyle\int_x^{x^2} \sqrt{1+t^2}\,\mathrm{d}t$

1. (a) Rappeler le $\mathrm{DL}_2(0)$ de la fonction $u \longmapsto \sqrt{1+u}$.
   (b) En déduire le $\mathrm{DL}_4(0)$ de la fonction $t \longmapsto \sqrt{1+t^2}$.
   (c) Déterminer le $\mathrm{DL}_5(0)$ de la fonction f.
2. Que peut-on en déduire pour le graphe de f au point d'abscisse 0 ? (équation de la tangente, position de la courbe par rapport à la tangente)

Exercice 6

Soit f la fonction définie sur $]0, +\infty[$ par $f(x) = x^2 \ln\left(\dfrac{x+1}{x}\right)$

1. Rappeler le $\mathrm{DL}_3(0)$ de la fonction $u \longmapsto \ln(1+u)$
2. En déduire que la courbe $\mathscr{C}_f$ représentant f admet une asymptote oblique au voisinage de $+\infty$. On donnera l'équation réduite de cette asymptote et on précisera la position de cette asymptote par rapport à $\mathscr{C}_f$.

Exercice 7

Étudier la fonction f définie par $f(x) = \sqrt{x(x+2)}\,\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}$.