Applications linéaires

Dans tout ce chapitre, $\mathbb{K}=\mathbb{R}$ ou $\mathbb{K}=\mathbb{C}$.

I Généralités sur les applications linéaires

I.1 Définition et premières propriétés

Définition 1

Soit E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels.
Soit $f : E \longrightarrow F$ une application de E dans F. On dit que f est une **application linéaire** de E dans F ssi :

(i) $\forall (x\,,y) \in E^2, \qquad f(x+y) =$

(ii) $\forall x \in E,\ \ \forall \lambda \in \mathbb{K}, \quad f(\lambda x) =$

Vocabulaire et notation :

- On note $\mathscr{L}(E,F)$ l'ensemble de toutes les applications linéaires de E dans F.
- Une application linéaire de E dans lui-même est appelé un
- L'ensemble des endomorphismes de E est noté $\mathscr{L}(E)$.
- L'application qui, à tout vecteur x de E, associe le vecteur nul $\overrightarrow{0_F}$ est une application linéaire. On l'appelle l'**application nulle** et on la note $\mathbb{O}_{E,F}$.
- L'**application identité** $\mathrm{id}_E : x \longmapsto x$ est une application linéaire de E dans E.

$f \in \mathscr{L}(E,F)$ signifie donc «f est une application linéaire du $\mathbb{K}$-e.v. E dans le $\mathbb{K}$-e.v. F».

Exemples :

- Soit λ_0 un scalaire fixé de $\mathbb{K}$.

  L'application $\begin{array}{rccl} f : & E & \longrightarrow & E \\ & x & \longmapsto & \lambda_0 \cdot x \end{array}$ est linéaire.

- On considère l'application qui, à tout polynôme $P \in \mathbb{R}[X]$, associe son polynôme dérivé P' :

$$\begin{array}{rccl} f : & \mathbb{R}[X] & \longrightarrow & \mathbb{R}[X] \\ & P & \longmapsto & P' \end{array}$$

Les vecteurs sont ici des polynômes. Pour vérifier que f est une application linéaire, il faut vérifier les deux points de la définition :

En conclusion, f est un endomorphisme de $\mathbb{R}[X]$.

Proposition 1

Si f est une application linéaire de E dans F, alors :

- $f(0_E) =$
- $\forall\, x \in E,\ f(-x) =$
- $\forall\,(x,y) \in E^2,\ \forall\,(\lambda\,,\mu) \in \mathbb{K}^2, \quad f(\lambda\, x + \mu\, y) =$
- $\forall\,(x_1\,, x_2\,, \ldots\,, x_p) \in E^p, \quad \forall\,(\lambda_1, \ldots, \lambda_p) \in \mathbb{K}^p, \quad f\left(\sum_{i=1}^{p} \lambda_i \cdot x_i\right) =$

I.2 Opérations sur les applications linéaires

Proposition 2

Soit E, F et G trois espaces vectoriels sur $\mathbb{K}$.
Si $f \in \mathscr{L}(E,F)$ et $g \in \mathscr{L}(F,G)$. Alors la composée $g \circ f$ est
Autrement dit, la composée de deux applications linéaires est

Preuve : supposons $f \in \mathscr{L}(E,F)$ et $g \in \mathscr{L}(F,G)$.

■

Théorème 3

Soit E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels.
Alors l'ensemble $\mathscr{L}(E,F)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{F}(E,F)$.

Ce théorème regroupe plusieurs informations : la somme de deux applications linéaires est encore une application linéaire et le produit d'une application linéaire par un scalaire est encore une application linéaire.

II Applications injectives, surjectives et bijectives

II.1 Définitions

Définition 2

Soit E et F deux ensembles quelconques. Soit $f : E \longrightarrow F$ une application.

- On dit que f est **injective** ssi $\forall (x, x') \in E^2, \quad [\,(x \neq x') \Rightarrow (\qquad\qquad)\,]$
- On dit que f est **surjective** ssi $\forall y \in F\,,\ \exists x \in E\ ;$
- On dit que f est **bijective** ssi elle est à la fois

Exemples :

(i) l'application $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} \setminus \{1\} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \dfrac{x}{x-1} \end{array}$ est ...

(ii) L'application $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & [-1\,,1] \\ x & \longmapsto & \cos x \end{array}$ est ...

(iii) L'application $f : \begin{array}{ccc} \left[-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right] & \longrightarrow & [-1\,,1] \\ x & \longmapsto & \sin x \end{array}$ est bijective.

Une bijection de E dans lui-même est parfois appelée **permutation** de E.

Définitions équivalentes

- f est une injection de E dans F ssi

$$\forall (x, x') \in E^2, \quad [\ f(x) = f(x') \implies \qquad\qquad]$$

- f est une surjection de E sur F ssi $f(E) =$
- f est une bijection de E sur F ssi $\forall y \in F,\ \exists!\, x \in E\ ;$

II.2 Composition

Proposition 4

La composée de deux applications injectives (resp. surjectives, bijectives) est injective (resp. surjective, bijective).

Proposition 5

Soient $f : E \longrightarrow F$ et $g : F \longrightarrow G$ deux applications.

1. Si $g \circ f$ est injective alors f est injective.
2. Si $g \circ f$ est surjective alors g est surjective.

Preuve : 1) Supposons $g \circ f$ injective et soit $x \in E$ et $x' \in E$ tels que $x \neq x'$. Par hypothèse, on a $g \circ f(x) \neq g \circ f(x')$, i.e. $g[f(x)] \neq g[f(x')]$ ce qui implique $f(x) \neq f(x')$ et ainsi f est injective.
2) Supposons $g \circ f$ surjective et soit $z \in G$. Par hypothèse, il existe $x \in E$ tel que $z = g \circ f(x)$.
Par conséquent, il existe un y $(= f(x))$ dans F tel que $z = g(y)$, ce qui prouve que g est surjective. ■

III Image et noyau d'une application linéaire

III.1 Image d'une application linéaire

Définition 3

Soit E et F deux $\mathbb{K}-$espaces vectoriels et $f \in \mathscr{L}(E, F)$.
On appelle **image de** f l'ensemble, noté $\operatorname{Im} f$, des vecteurs de F qui sont les images par f des vecteurs de E. Autrement dit,

$$\operatorname{Im} f = \{ \ f(x) \in F \ \mid$$

$$y \in \operatorname{Im} f \iff \exists$$

Quelques exemples simples :

- $\operatorname{Im}(\mathrm{id}_E) =$
- $\operatorname{Im}(\mathbb{O}_{E,F}) =$

Proposition 6

Soit f une application linéaire de E dans F. Alors

i) $\operatorname{Im} f$ est un

ii) f est surjective ssi

Preuve : Soit $f \in \mathscr{L}(E,F)$.

■

III.2 Image réciproque d'un ensemble par une application

Soit E et F deux ensembles quelconques. Soit f une application de E vers F.

Définition 4

Pour toute partie D de F, on appelle **image réciproque** de D par f le sous-ensemble de E noté $f^{-1}(D)$, défini par :

$$f^{-1}(D) = \{x \in E \mid f(x) \in D\}$$

Autrement dit $\quad x \in f^{-1}(D) \iff$

Remarques : on a toujours $f^{-1}(\emptyset) =$
et pour tout élément b de F, $\quad f^{-1}(\{b\}) =$

Exemple : on considère l'application $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{C} & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ z & \longmapsto & -z^2 \end{array}$

Déterminer $f^{-1}(\{1\})$.

Proposition 7

Soit E et F deux $\mathbb{K}-$espaces vectoriels et $f \in \mathscr{L}(E,F)$ une application linéaire de E dans F.
Si D est un sous-espace vectoriel de F, alors l'image réciproque par f de D,

Preuve : soit D un s.e.v. de F et $G = f^{-1}(D) \subset E$.

- Puisque $f(0_E) = 0_F \in D$, on a
- Soit x et y deux vecteurs de G et $\lambda \in \mathbb{K}$.

■

III.3 Noyau d'une application linéaire

Définition 5

Soit E et F deux $\mathbb{K}-$espaces vectoriels et $f \in \mathscr{L}(E, F)$.
On appelle **noyau de** f l'ensemble, noté $\operatorname{Ker} f$, des vecteurs de E dont l'image par f est le vecteur nul de F. Autrement dit,

$$\operatorname{Ker} f = \{ \ x \in E \ \ | $$

$$x \in \operatorname{Ker} f \iff$$

Quelques exemples simples :

- $\operatorname{Ker}(\mathrm{id}_E) =$
- $\operatorname{Ker}(\mathbb{O}_{E,F}) =$

Proposition 8

Soit f une application linéaire de E dans F. Alors

i) $\operatorname{Ker} f$ est un

ii) f est injective ssi

Preuve : ii) Supposons f injective c.à.d.

■

III.4 Isomorphismes

Proposition 9

Soit $f : E \longrightarrow F$ une application linéaire et bijective.
Alors sa bijection réciproque $f^{-1} : F :\longrightarrow E$ est

Preuve : on suppose que $f \in \mathscr{L}(E, F)$ et que

■

Définition 6

Soit E et F deux $\mathbb{K}-$espaces vectoriels.

- Une application linéaire et bijective de E dans F est appelée

- On note $GL(E)$ l'ensemble des isomorphismes de E dans lui-même.
- Lorsqu'il existe un isomorphisme entre deux espaces E et F,
on dit que ces deux espaces sont **isomorphes**.

Théorème 10

Soit E un $\mathbb{K}-$espace vectoriel de dimension finie n ($n \geqslant 1$), et $(e_1, e_2, \ldots, e_n)$ une base de E.
Soit F un $\mathbb{K}-$espace vectoriel quelconque et $\mathscr{F} = (f_1, f_2, \ldots, f_n)$ une famille de vecteurs de F. Alors

i) il existe une **unique** application linéaire g de E dans F, telle que

ii) $\mathscr{F}$ est une famille libre de F ssi

iii) $\mathscr{F}$ est une famille génératrice de F ssi

Remarque :
cette propriété signifie que pour connaître entièrement une application linéaire f sur un espace E de dimension finie, il suffit de connaître les images par f des vecteurs d'une base de E.

Exemple : on considère $\mathbb{R}^3$ muni de sa base canonique (e_1, e_2, e_3).
On définit l'application linéaire $f \in \mathscr{L}(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^2)$ par :

$$f(e_1) = (1, 0) \ ; \ f(e_2) = (2, -1) \ ; \ f(e_3) = (-3, 1)$$

Calculer $f(x, y, z)$ pour tout $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$.

Corollaire :
Soit $(e_1, e_2, \cdots, e_n)$ une base d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E, soit f une application linéaire de E dans un $\mathbb{K}$-espace vectoriel F.
L'application f est un isomorphisme si, et seulement si, la famille $\mathscr{F} = (f(e_1), f(e_2), \cdots, f(e_n))$ est ...

Comme la composée de deux isomorphismes est un isomorphisme et que la bijection réciproque d'un isomorphisme est un isomorphisme, on obtient la proposition suivante :

Proposition 11

Tout $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension $n \geqslant 1$ est isomorphe à

Deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels de dimension finie sont isomorphes si, et seulement si, ils sont

Si un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E est isomorphe à un $\mathbb{K}$-espace vectoriel F de dimension finie, alors E est de dimension finie et $\dim E =$

IV Applications linéaires et dimension finie

IV.1 Rang d'une application linéaire

Si E est un $\mathbb{K}-$espace vectoriel de dimension finie et si f est une application linéaire de E dans F, alors $\operatorname{Im} f$ est

Définition 7

Soit E et F deux $\mathbb{K}-$espaces vectoriels tels que E est de dimension finie.
On appelle **rang d'une application linéaire** $f \in \mathscr{L}(E, F)$, et on note $\operatorname{rg}(f)$, la dimension de

Exemple : déterminer le rang de l'application linéaire

$$f: \begin{array}{rcl} \mathbb{R}_2[X] & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ P & \longmapsto & (P(1), P'(1), P(0)) \end{array}$$

Déterminer le rang d'une application linéaire revient à déterminer la dimension de son image. On peut donc commencer par trouver une base de Im(f).

- *Soit* $(\mathbb{1}, X, X^2)$ *la base canonique de* $\mathbb{R}_2[X]$.

On a $f(\mathbb{1}) =$, $f(X) =$ *et* $f(X^2) =$

Donc $\big((1,0,1)\,,\,(1,1,0)\,,\,(1,2,0)\big)$ *est une famille génératrice de Im(f).*

- *Regardons maintenant si cette famille est libre.*

Remarque : si E est un $\mathbb{K}-$espace vectoriel de dimension finie $n \geqslant 0$, admettant pour base $(e_1, e_2, \ldots, e_n)$ et si $f \in \mathscr{L}(E, F)$

Alors

IV.2 Théorème du rang

Théorème 12 (formule du rang)

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel **de dimension finie**, F un $\mathbb{K}$-espace vectoriel **quelconque** et f une application linéaire de E dans F. Alors

$$\dim E =$$

Preuve : considérons un supplémentaire S du noyau de $\ker f$ dans E. On sait que dans un espace de dimension finie, de tels supplémentaires existent et que :

$$\dim E = \dim(\ker f) + \dim S$$

- Montrons que S est isomorphe à $\mathrm{Im}(f)$.

■

IV.3 Application à la caractérisation des isomorphismes

Théorème 13

Soient E et F deux $\mathbb{K}-$espaces vectoriels de **même** dimension finie $n \geqslant 1$. Soit f une application linéaire de E dans F. Alors les quatre assertions suivantes sont équivalentes :

i) f est bijective

ii) f est injective

iii) f est surjective

iv) $\mathrm{rg}(f) =$

V Exercices

Exercice 1 On considère l'application

$$f : \begin{array}{ccc} \mathfrak{M}_{3,1}(\mathbb{R}) & \longrightarrow & \mathfrak{M}_{3,1}(\mathbb{R}) \\ X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} & \longmapsto & \begin{pmatrix} 3x-2y+3z \\ x+2z \\ 2z \end{pmatrix} \end{array}$$

1. Donner une matrice A carrée d'ordre 3, telle que $\forall X \in \mathfrak{M}_{3,1}(\mathbb{R}),\ f(X) = AX$
2. En déduire que f est un endomorphisme.
3. f est-elle bijective ?

Exercice 2 Les applications suivantes sont-elles des applications linéaires ?

1. $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{C}^3 & \to & \mathbb{C}^2 \\ (x,y,z) & \mapsto & (x+y+z\,,\,x+z) \end{array}$
2. $g : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}\times\mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x,y) & \longmapsto & xy \end{array}$
3. $h : \begin{array}{ccc} \mathfrak{M}_n(\mathbb{R}) & \longrightarrow & \mathfrak{M}_n(\mathbb{R}) \\ M & \longmapsto & AM-MA \end{array}$ pour $n \in \mathbb{N}^*$ et $A \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$ fixés.

Exercice 3 Soit $f : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{R}^+$ l'application définie par $\forall z \in \mathbb{C},\ f(z) = |z|$.

1. L'application f est-elle injective ? Est-elle surjective ?
2. Déterminer et représenter dans le plan complexe l'image réciproque par f de l'intervalle $[1\,;\,2]$.

Exercice 4 On considère la fonction f, restriction de la fonction sin à l'intervalle $]-\pi\,,\pi]$. Donner l'image réciproque par f de $[0\,,\,1/2]$.

Exercice 5 Soit $E = \mathbb{R}_1[X]$ et l'application $f : \begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ P & \mapsto & \big(P(0)\,,\,P(1)\big) \end{array}$

Vérifier que f est linéaire. Déterminer son noyau.

Exercice 6 Soit f une application linéaire injective d'un $\mathbb{R}-$espace vectoriel E dans un $\mathbb{R}-$espace vectoriel F. Si $\left(\overrightarrow{e_1}\,,\overrightarrow{e_2}\,,\dots,\overrightarrow{e_n}\right)$ est une famille libre de E. Montrer que $\left(f(\overrightarrow{e_1})\,,\,f(\overrightarrow{e_2})\,,\dots,\,f(\overrightarrow{e_n})\right)$ est une famille libre de F. S'agit-il d'une base de F ?

Exercice 7

On note E le $\mathbb{R}-$espace vectoriel des fonctions de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$, à valeurs dans $\mathbb{R}$. On écrit $E = \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R},\mathbb{R})$. On définit l'application $\Phi\ :\ E \longrightarrow E$ par $\forall f \in E,\ \Phi(f) = f - f'$.
1. Montrer que Φ est un endomorphisme de E.
2. Déterminer le noyau de Φ. Φ est-elle une bijection ?
3. Déterminer $\mathrm{Im}(\Phi)$.

Exercice 8 Soit E un $\mathbb{R}-$espace vectoriel de dimension 3.

Soit (e_1,e_2,e_3) une base de E, et λ un paramètre réel.
$\left\{\begin{array}{rcl} \varphi(e_1) & = & e_1+e_2 \\ \varphi(e_2) & = & e_1-e_2 \\ \varphi(e_3) & = & e_1+\lambda e_3 \end{array}\right.$ définit une application linéaire φ de E dans E.
Écrire le transformé du vecteur $x = \alpha_1\,e_1+\alpha_2\,e_2+\alpha_3\,e_3$.
Comment choisir λ pour que φ soit injective ? surjective ?

Exercice 9 Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

Soit $\varphi : \mathbb{K}_{n+1}[X] \longrightarrow \mathbb{K}_n[X]$ définie par $\varphi(P) = (n+1)P - X\,P'$.
1. Justifier que φ est bien définie puis que φ est une application linéaire.
2. Déterminer le noyau de φ.
3. En déduire, par le théorème du rang, que φ est surjective.

Exercice 10 Soit E et F deux $\mathbb{K}-$espaces vectoriels de dimension finie n, $n \in \mathbb{N}^*$. Soit $f \in \mathscr{L}(E,F)$ telle que $\exists\, g \in \mathscr{L}(F,E)\ ;\ g\circ f = \mathrm{id}_E$.
1. Montrer que f est injective.
2. Conclure.