Fonctions de deux variables

I Topologie de $\mathbb{R}^2$

On note $\mathbb{R}^2$ l'ensemble des couples de nombres réels. On assimile $\mathbb{R}^2$ au plan usuel muni d'un repère, en confondant un point géométrique a avec ses coordonnées $(x_0\,, y_0)$ et on écrit $a = (x_0\,, y_0)$.

I.1 Norme sur $\mathbb{R}^2$

Définition 1

Pour tout point $u = (x\,, y)$ de $\mathbb{R}^2$, on appelle **norme** de u le réel positif noté $\|u\|$ défini par :

$$\|u\| = \sqrt{\qquad\qquad\qquad}$$

Propriétés : pour tous points u et v de $\mathbb{R}^2$,

- $\|u\| = 0 \iff$
- $\forall\, \lambda \in \mathbb{R}, \qquad \|\lambda\, u\| =$
- $\|u + v\| \quad \ldots \quad \|u\| + \|v\|$

Remarques :

- On peut définir d'autres types de normes. La norme que l'on vient de définir s'appelle la **norme** ...
- En repère orthonormal, si on confond couple de réels et point du plan, la norme $\|A - B\|$ correspond à la longueur du segment géométrique $[AB]$.

I.2 Parties ouvertes, parties fermées

Définition 2

Soit a un point de $\mathbb{R}^2$ et r un réel strictement positif.
On appelle **boule ouverte** de centre a et de rayon r l'ensemble des points u de $\mathbb{R}^2$ tels que $\|u - a\| < r$.
On note $\mathcal{B}(a\,, r)$ cet ensemble.

Définition 3

- Soit U une partie de $\mathbb{R}^2$.
  On dit que U est un **ouvert** de $\mathbb{R}^2$ ssi pour tout point $a \in U$, il existe une boule ouverte de centre a, incluse dans U.

- Une partie F de $\mathbb{R}^2$ est dite **fermée** ssi son complémentaire $\overline{F}$ est une partie ouverte.

- Une partie Ω de $\mathbb{R}^2$ est dite **bornée** ssi il existe $r > 0$ tel que pour tout point $u \in \Omega$,

Exemples :

- ▷ $\mathbb{R}^2$ est un ouvert.
- ▷ Une boule ouverte est un ouvert.
- ▷ Un demi-plan ouvert (droite frontière non comprise) est un ouvert.
- ▷ Si I et J sont deux intervalles ouverts de $\mathbb{R}$, alors $I \times J = \{ \qquad \}$ est une partie ouverte de $\mathbb{R}^2$.

II Généralités sur les fonctions de deux variables

II.1 Représentation graphique

Définition 4

Soit $\mathcal{D}$ une partie de $\mathbb{R}^2$ (c'est-à-dire un ensemble de couples de réels). Définir une fonction f de deux variables sur $\mathcal{D}$ consiste à associer à chaque couple (x, y) de $\mathcal{D}$ un unique nombre réel noté $f(x, y)$ et appelé image du couple (x , y) par la fonction f.
L'ensemble $\mathcal{D}$ est appelé **ensemble de définition** de f.

On écrit :

$$f: \begin{array}{rcl} \mathcal{D} \subset \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x, y) & \longmapsto & f(x, y) \end{array}$$

On peut se figurer f comme définissant une «altitude» en tout point de $\mathcal{D}$.

Exemple : la fonction $f : (x, y) \longmapsto \ln(1 - x - y)$

La représentation graphique $\mathscr{S}$ de f est l'ensemble des points M dont les coordonnées (x, y, z) vérifient la relation $z = f(x, y)$ lorsque (x, y) décrit $\mathcal{D}$.

En général, $\mathscr{S}$ est une surface. On dit que $\mathscr{S}$ admet pour équation cartésienne $z = f(x, y)$ dans le repère $(O; \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k})$.

Exemple : on considère la fonction f de deux variables définie par $f(x, y) = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$.

(i) Quel est l'ensemble de définition de f ?

(ii) Quelle est la nature géométrique de la surface représentative de f ?

Définition 5 (ligne de niveau)

Soit f une fonction de deux variables définie sur une partie $\mathcal{D}$ de $\mathbb{R}^2$. Soit $\mathscr{S}$ la surface d'équation $z = f(x, y)$ et k un réel. On appelle **ligne de niveau** k **de** f le projeté orthogonal sur le plan (Oxy) de la section de $\mathscr{S}$ par le plan d'équation $z = k$.

Une «ligne de niveau» n'est pas forcément une courbe, mais peut être une partie quelconque du plan (Oxy).

Exemple : posons $f(x, y) = \ln(1 - x - y)$

II.2 Fonctions de référence

II.2.1 Fonctions affines

Les fonctions de deux variables les plus simples sont les fonctions affines f définies sur $\mathbb{R}^2$ par

$$f(x, y) = ax + by + c$$

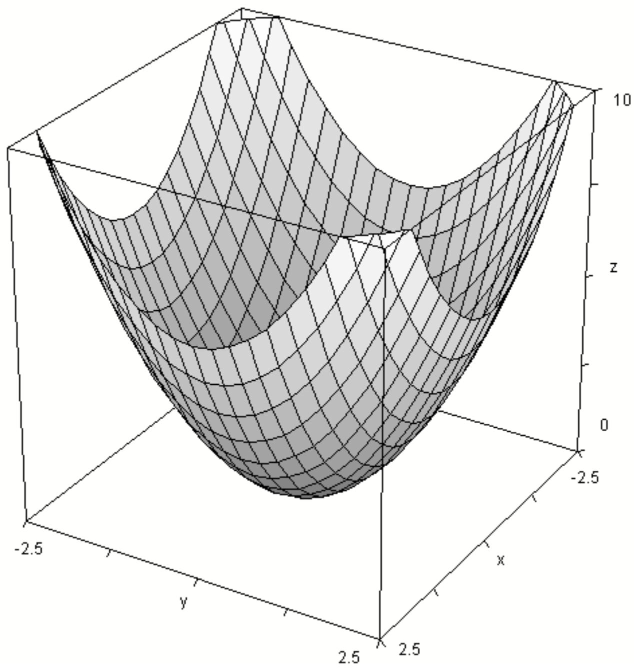
où a, b et c sont trois réels fixés.
La surface représentative d'une fonction affine de deux variables est ...

II.2.2 $g : (x, y) \longmapsto x^2 + y^2$

g est définie sur $\mathbb{R}^2$. . On note $\mathscr{S}$ sa surface représentative.

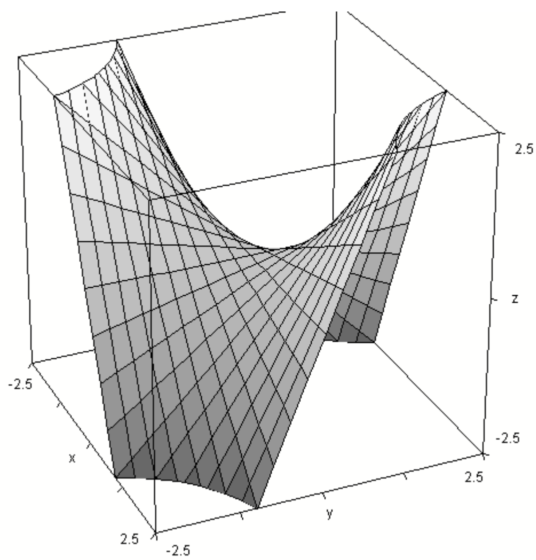
Soit a un réel.

- La section de $\mathscr{S}$ par le plan d'équation $z = a$ est :
  -
  -
  -
- La section de $\mathscr{S}$ par le plan d'équation $y = a$ est une



Paraboloïde circulaire de révolution

II.2.3 $h : (x, y) \longmapsto xy$



Paraboloïde hyperbolique

III Limites et continuité

III.1 Limite en un point

Définition 6

Soit $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction définie sur une partie non vide D de $\mathbb{R}^2$, $a = (x_0, y_0)$ un point de D et $\ell \in \mathbb{R}$.
On dit que f admet pour limite ℓ en a ou que $f(x, y)$ tend vers ℓ quand (x, y) tend vers (x_0, y_0) ssi

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \delta > 0\ ;$$

On écrit alors $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x, y) = \ell$

Les propriétés concernant les opérations algébriques (somme, produit, quotient) sur les limites des fonctions de deux variables, sont analogues à celles des fonctions d'une seule variable.

III.2 Fonctions continues

Définition 7

Soit f une fonction définie sur un ouvert non vide U de $\mathbb{R}^2$ et soit $a = (x_0, y_0)$ un point de U.

▷ On dit que f **est continue en** a ssi

▷ On dit que f **est continue sur** U ssi f est continue en tout point de U.

Proposition 1 (Somme, produit, quotient)

Soit f et g deux fonctions continues sur un ouvert U de $\mathbb{R}^2$.
Alors la somme $f+g$ et le produit $f \times g$ sont continus sur U.
Si de plus $\forall (x,y) \in U,\ g(x,y) \neq 0$, alors le quotient $\dfrac{f}{g}$ est continu sur U.

Proposition 2 (Composée)

Soit $f : U \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue sur un ouvert U de $\mathbb{R}^2$.
Soit $\varphi : I \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue sur une partie I de $\mathbb{R}$ telle que $f(U) \subset I$.
Alors la composée $\varphi \circ f$ est continue sur ...

Exemples :

- Les fonctions constantes sont
- Les fonctions $(x,y) \mapsto x$ et $(x,y) \mapsto y$ sont continues sur $\mathbb{R}^2$.
  On peut en déduire que les fonctions $(x,y) \mapsto x^i y^j$ sont continues sur $\mathbb{R}^2$ et donc
- Si φ est une fonction continue sur un intervalle I de $\mathbb{R}$, alors $(x,y) \mapsto \varphi(x)$ est continue sur $I \times \mathbb{R}$ et $(x,y) \mapsto \varphi(y)$ est continue sur $\mathbb{R} \times I$.
- $(x,y) \mapsto (1+y^2)\ln(x)$ est continue sur $]0;+\infty[\times\mathbb{R}$ comme produit des fonctions $(x,y) \mapsto \ln(x)$ et $(x,y) \mapsto y^2+1$ continues sur ce même ensemble.

Proposition 3

Soit f une fonction continue en (x_0,y_0). Alors les applications partielles $f_1 : t \to f(t,y_0)$ et $f_2 : t \to f(x_0,t)$ sont continues respectivement en x_0 et y_0.

Attention la réciproque à cette propriété est fausse.

Considérons la fonction f définie sur $\mathbb{R}^2$ par $f(x,y) = \dfrac{xy}{x^2+y^2}$ si $(x,y) \neq (0,0)$ et $f(0,0)=0$.
On remarque que, en $(0,0)$, les applications partielles sont $f_1 : t \longmapsto f(t,0) = 0$ et $f_2 : t \longmapsto f(0,t) = 0$ et ce sont donc des fonctions continues sur $\mathbb{R}$.
Mais $f(x,x) = \dfrac{1}{2}$ pour tout $x \neq 0$ donc $\lim\limits_{(x,y)\longrightarrow(0,0)} f(x,y) \neq f(0,0)$
et donc f n'est pas continue en $(0,0)$.

Théorème 4 (admis)

Soit f une fonction continue sur une partie F fermée et bornée de $\mathbb{R}^2$.
Alors f admet un maximum et un minimum.

IV Dérivées partielles d'ordre 1

IV.1 Dérivabilité des applications partielles

Dans toute cette partie, les fonctions considérées seront définies sur un ouvert U de $\mathbb{R}^2$ et $a = (x_0\,, y_0)$ désigne un point de U. Si f est une fonction définie sur U, on notera $f_1 : t \longmapsto f(t, y_0)$ et $f_2 : t \longmapsto f(x_0, t)$ les applications partielles de f en a.

Définition 8

• On dit que la fonction f admet au point a une dérivée partielle par rapport à la $1^{\text{ère}}$ variable ssi l'application partielle $f_1 : t \longmapsto f(t, y_0)$ est dérivable en x_0,
ce qui revient à dire que le taux d'accroissement

$$h \longmapsto \frac{f(x_0 + h\,, y_0) - f(x_0, y_0)}{h} \quad \text{admet une limite finie lorsque } h \text{ tend vers } 0.$$

Dans ce cas, cette dérivée partielle se note

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0\,, y_0) =$$

• On dit que la fonction f admet au point a une dérivée partielle par rapport à la $2^{\text{ième}}$ variable ssi l'application partielle

Exemple : on définit la fonction f sur l'ouvert $U = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ / \qquad \}$ par

$$f(x,y) = x^3 \ln y$$

Soit $a = (x_0, y_0)$ un point quelconque de U. Alors

REMARQUES :

• La lettre «x» dans le symbole $\dfrac{\partial}{\partial x}$ signifie que l'on dérive suivant la première variable, souvent notée x.
• $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x_0\,,y_0)$ est un nombre.
• $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ désigne la fonction de deux variables, qui à tout couple $(x_0\,,y_0)$ associe le réel $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x_0\,,y_0)$.
• Contrairement à ce qui se passe pour les fonctions d'une variable où la dérivabilité implique la continuité, l'existence des dérivées partielles en un point n'entraîne pas la continuité en ce point.

IV.2 Vecteur gradient

Définition 9

Soit $f : U \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction définie sur un ouvert U de $\mathbb{R}^2$ et a un point de U.

Si f admet des dérivées partielles en a, on appelle **gradient** de f au point a, le vecteur de $\mathbb{R}^2$ noté $\overrightarrow{\text{grad}}\, f\,(a)$ défini par :

$$\overrightarrow{\text{grad}}\, f\,(a) =$$

Définition 10

Soit $f : U \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction définie sur un ouvert U de $\mathbb{R}^2$. Si f admet en tout point a de U des dérivées partielles par rapport à ses deux variables et si les applications $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ et $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ sont continues sur U, on dit que la fonction f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur U.

Proposition 5 (admise)

Si f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur U et si le gradient de f au point $a \in U$ n'est pas le vecteur nul, alors $\overrightarrow{\text{grad}}\, f\,(a)$ est normal à la ligne de niveau $k = f(x_0, y_0)$ de f,
c'est-à-dire orthogonal à la tangente à la ligne de niveau $k = f(x_0, y_0)$ de f au point $H(x_0\,,y_0)$ du plan (Oxy).

IV.3 Plan tangent

Soit $f : U \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur un ouvert U de $\mathbb{R}^2$ et $a = (x_0\,, y_0)$ un point de U. On note $\mathscr{S}$ la surface représentative de f dans l'espace muni d'un repère orthonormal $\left(O\,; \overrightarrow{i}\,, \overrightarrow{j}\,, \overrightarrow{k}\right)$ et A le point de $\mathscr{S}$ ayant pour coordonnées cartésiennes $(x_0\,, y_0\,, f(a))$.

- Le plan $\mathscr{P}_1$ d'équation $y = y_0$ coupe la surface $\mathscr{S}$ suivant une courbe $\mathscr{C}_1$ passant par A et incluse dans $\mathscr{P}_1$. La courbe $\mathscr{C}_1$ est le graphe de la 1ère application partielle de f en a. La droite tangente à $\mathcal{C}_1$ en A admet pour vecteur directeur :

$$\overrightarrow{u_1}\begin{pmatrix} \\ \\ \\ \end{pmatrix}$$

- Le plan $\mathscr{P}_2$ d'équation $x = x_0$ coupe la surface $\mathscr{S}$ suivant une courbe $\mathscr{C}_2$ passant par A et incluse dans $\mathscr{P}_2$. La droite tangente à $\mathscr{C}_2$ en A admet pour vecteur directeur :

$$\overrightarrow{u_2}\begin{pmatrix} \\ \\ \\ \end{pmatrix}$$

La surface représentative $\mathscr{S}$ de f admet au point $A(x_0\,, y_0\,, f(x_0, y_0)\,)$ un **plan tangent** d'équation

$$z =$$

IV.4 Dérivée d'une composée

Proposition 6

Soit $f : U \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur un ouvert U de $\mathbb{R}^2$.
Soit $\varphi : \begin{array}{ccc} I & \longrightarrow & U \\ t & \longmapsto & \big(u(t)\,,\,v(t)\big) \end{array}$ une fonction vectorielle de classe $\mathcal{C}^1$ sur un intervalle I de $\mathbb{R}$, à valeurs dans U.

Alors la fonction composée $f \circ \varphi$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur I et

$$\forall\, t \in I, \quad (f \circ \varphi)'(t) =$$

Exemple : on pose $f(x, y) = x^2 + xy + \mathrm{e}^{x-y}$ et $g(t) = f(e^t\,, t^2)$. Calculer $g'(0)$.

IV.5 Développement limité à l'ordre 1

Théorème 7 (admis)

Soit $a = (x_0\,, y_0)$ un point de U. Si f est une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur U, alors il existe une fonction ε définie au voisinage de $(0,0)$ et continue en $(0,0)$ telle que pour tout $\overrightarrow{h} = (k, \ell)$ de norme suffisamment proche de 0,

$$f\,(x_0 + k\,, y_0 + \ell) = f\,(x_0\,, y_0) + \frac{\partial f}{\partial x}(x_0\,, y_0) \cdot k + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0\,, y_0) \cdot \ell + \sqrt{k^2 + \ell^2} \times \varepsilon\,(k\,, \ell)$$

avec

Cette égalité s'appelle le développement limité d'ordre 1 de f en a.

Exemple : on définit la fonction f sur l'ouvert $U =$ par

$$f(x, y) = x^3 \ln y$$

On pose $a = (2, 3) \in U$.

Théorème 7 bis : sous les hypothèses du théorème 7,
il existe une fonction ε définie au voisinage de $(0,0)$ et continue en $(0,0)$ telle que pour tout $\overrightarrow{h}$ de norme suffisamment proche de 0,

V Dérivées partielles d'ordre 2

V.1 Définition

Lorsque f admet deux dérivées partielles d'ordre 1 : $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ et $\dfrac{\partial f}{\partial y}$, ces deux fonctions sont des fonctions de deux variables et peuvent donc admettre elles-mêmes des dérivées partielles d'ordre 1. On appelle ces dérivées les dérivées partielles d'ordre 2 de f. Il peut en exister 4 que l'on note de la façon suivante :

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)$$
$$\frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial y\,\partial x} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)$$

Exemple : calculer les dérivées partielles secondes de la fonction f définie par $f(x, y) = x^3 \ln y$

Définition 11

Si $f : U \longrightarrow \mathbb{R}$ est une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur un ouvert U de $\mathbb{R}^2$ et si toutes ses dérivées partielles d'ordre 2 sont définies et continues sur U, alors on dit que f **est de classe $\mathcal{C}^2$ sur U.**

Exemple : les fonctions polynomiales de deux variables sont de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}^2$.

Théorème 8 (admis, théorème de Schwarz)

Si f est une fonction de classe $\mathcal{C}^2$ sur l'ouvert U de $\mathbb{R}^2$ alors

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y} =$$

On a donc seulement 3 dérivées partielles d'ordre 2 à calculer.

V.2 Développement limité d'ordre 2

Théorème 9 (admis)

Soit $a = (x_0\,,y_0)$ un point de U. Si f est une fonction de classe $\mathcal{C}^2$ sur U, alors il existe une fonction ε définie au voisinage de $(0,0)$ et continue en $(0,0)$ telle que pour tout $\overrightarrow{h} = (k,\ell)$ de norme suffisamment proche de 0,

$f(a+\overrightarrow{h}) =$

avec

Cette égalité s'appelle le **développement limité d'ordre 2 de f en** (x_0, y_0)**.**

Exemple : on définit la fonction f sur l'ouvert $U =$ par $f(x,y) = x^3\,\ln y$. On pose $a = (2,3) \in U$.

Définition 12

Soit $f : U \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^2$ sur un ouvert U de $\mathbb{R}^2$ et a un point de U. On appelle **matrice hessienne** de f en a, la matrice carrée d'ordre 2 notée $H(f)_a$ définie par :

$$H(f)_a = \begin{pmatrix} & \\ & \end{pmatrix}$$

<u>Théorème</u> 9 bis : sous les hypothèses du théorème 9,
il existe une fonction ε définie au voisinage de $(0,0)$ et continue en $(0,0)$ telle que pour tout $\overrightarrow{h}$ de norme suffisamment proche de 0,

V.3 Extremum local sur un ouvert

Définition 13

Soit f une fonction définie sur un ouvert U de $\mathbb{R}^2$, à valeurs dans $\mathbb{R}$.
Soit $a = (x_0, y_0)$ un point de U.
▷ On dit que f présente un **minimum local en** a ssi

$$\exists r > 0 \ ; \ \forall (x,y) \in \mathcal{B}(a,r) \cap U, \quad f(x,y) \geqslant f(x_0,y_0)$$

▷ On dit que f présente un **maximum local en** a ssi

▷ On dit que f présente **un extremum local en un point** a de U lorsque f admet soit un minimum, soit un maximum local en ce point.

V.3.1 Point critique

Définition 14

Soit f une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur un ouvert U de $\mathbb{R}^2$. On dit qu'un élément (x_0, y_0) de U est **un point critique de** f ssi

Un point critique est un point en lequel le plan tangent à la surface représentative de f est horizontal.

Théorème 10 (condition nécessaire du premier ordre)

Soit $f : U \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur un **ouvert** U de $\mathbb{R}^2$.
Si f présente un extremum local en (x_0, y_0) alors (x_0, y_0) est un point critique de f.

Preuve : on suppose que f admet un minimum local en $a \in U$ où $a = (x_0, y_0)$.

■

Attention : la réciproque à ce théorème est en générale fausse. Il peut exister des points critiques de f qui ne correspondent pas à des extremums locaux.

En pratique :
Lorsqu'on cherche les extremums d'une fonction, on commence par chercher ses points critiques car on sait que les extremums sont à chercher parmi ces points.
Il nous faut ensuite pour chaque point critique vérifier que c'est bien un extremum.

> **Exemple** : on définit la fonction f sur $\mathbb{R}^2$ par $f(x,y) = x^2 + 3y^2 + 2xy - 4y$.
> Déterminer le(s) éventuel(s) point(s) critique(s) de f.

V.3.2 Fonctions de classe $\mathcal{C}^2$

Mise en place :
On suppose maintenant que f est une fonction de classe $\mathcal{C}^2$ sur un ouvert U de $\mathbb{R}^2$ et que $a = (x_0, y_0)$ est un point critique de f.
On introduit les **notations de Monge** :

$$r = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0, y_0) \qquad s = \frac{\partial^2 f}{\partial x\, \partial y}(x_0, y_0) \qquad t = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x_0, y_0)$$

Le développement limité d'ordre 2 de f en $a = (x_0, y_0)$ s'écrit donc :

$f(x_0 + k, y_0 + \ell) - f(x_0, y_0) =$

En posant $\overrightarrow{h} = (k, \ell)$, on voit intuitivement qu'au voisinage de a, la différence $f(a + \overrightarrow{h}) - f(a)$ est du signe de $r\,k^2 + 2s\,k\,\ell + t\,\ell^2$.

Or $\quad r\,k^2 + 2s\,k\,\ell + t\,\ell^2 = \ell^2 \left(r \left(\frac{k}{\ell}\right)^2 + 2s\frac{k}{\ell} + t \right) \qquad$ On pose $X = \dfrac{k}{\ell}$

Pour que f admette en a par exemple un *minimum local*, il suffit que le polynôme $rX^2 + 2sX + t$ soit de signe constant positif. Donc il suffit que :

$$s^2 - rt < 0 \qquad \text{avec} \qquad r > 0$$

Théorème 11 (condition suffisante du second ordre)

Soit $f : U \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^2$ sur un **ouvert** U de $\mathbb{R}^2$.
Soit a un point critique de f. Avec les notations précédentes, :

- ▷ Si $rt - s^2 > 0$ et $r > 0$ alors f admet un minimum local en a.
- ▷ Si $rt - s^2 > 0$ et $r < 0$ alors f admet un maximum local en a.
- ▷ Si $rt - s^2 < 0$ alors
- ▷ Si $rt - s^2 = 0$, on ne peut rien dire.

Exemple : Soit $f : (x,y) \longmapsto 3xy - x^3 - y^3$. On cherche à déterminer les extremums locaux de f.

▷ *Recherche des points critiques :*
On a $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 3y - 3x^2$ et $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 3x - 3y^2$.
On doit donc résoudre :

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 0 \\ \dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3y - 3x^2 = 0 \\ 3x - 3y^2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = x^2 \\ x - x^4 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = x^2 \\ x(1-x^3) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = x^2 \\ x = 0 \text{ ou } x = 1 \end{cases}$$

Donc f admet deux points critiques $a = (0,0)$ et $b = (1,1)$.

▷ *Utilisation des notations de Monge :*
comme f est une fonction de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}^2$, pour déterminer les extremums locaux, on peut utiliser les notations de Monge. Pour cela on doit tout d'abord calculer les dérivées partielles secondes :

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) = -6x \quad , \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y}(x,y) = 3 \quad \text{et} \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) = -6y$$

- Au point $a = (0,0)$: $r = 0$, $t = 0$ et $s = 3$. Donc $rt - s^2 = -9 < 0$ et f n'admet donc par d'extremum local en a.
- Au point $b = (1,1)$: $r =$, $t =$ et $s =$. Donc $rt - s^2 =$

VI Exercices

Exercice 1

Dessiner les parties suivantes de $\mathbb{R}^2$. Sont-elles bornées ? ouvertes ? fermées ?

$$E_1 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ / \ xy > 0\} \quad E_2 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ / \ x^2+y^2 < 4\}$$

$$E_3 = \mathbb{R}^2 \setminus (\mathbb{R} \times \{0\}) \quad E_4 = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} \quad E_5 = [-2\,,\,3] \times [0\,,\,4]$$

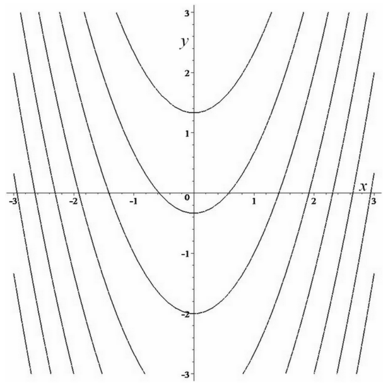
$$E_6 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ / \ 1 < |x-4| < 3\} \quad E_7 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ / \ |x|+|y| < 2\}$$

Exercice 2 On définit les fonctions f, g et h par :

$$f(x,y) = 3x+7y-2 \quad ; \quad g(x,y) = \sqrt{4-x^2-y^2} \quad ; \quad h(x,y) = \sqrt{x^2+y^2}$$

1. Donner l'ensemble de définition de chacune de ces fonctions.
2. Décrire géométriquement les surfaces représentatives des fonctions précédentes.

Exercice 3 On donne ci-dessous les lignes de niveau d'une fonction de deux variables.



Une seule des quatre fonctions suivantes peut convenir. Laquelle ?

$f_1(x,y) = \mathrm{e}^{x-y}$; $f_2(x,y) = x-y^2$

$f_3(x,y) = \ln(x^2+y^2)$; $f_4(x,y) = x^2-y$

Exercice 4

Soit f la fonction de deux variables définie par :

$$f(x,y) = \frac{1}{\sqrt{x-y}}$$

1. Déterminer l'ensemble de définition de la fonction f et représenter graphiquement cet ensemble dans le plan (Oxy).
2. Calculer $f(1,0)$ et $f(\cosh\theta, \sinh\theta)$ pour $\theta \in \mathbb{R}$.
3. Déterminer les antécédents de 1 par f.
4. Représenter graphiquement la ligne de niveau 1 de f dans le plan (Oxy).
5. Étudier la section de la surface représentant f par le plan $\mathscr{P}$ d'équation $x=2$.
   Représenter cette section dans le plan $\mathscr{P}$ rapporté au repère $(A\,;\,\overrightarrow{j}\,,\,\overrightarrow{k})$ où $A(2,0,0)$.

Exercice 5

On définit $f:\ \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ par $f(x,y) = \dfrac{x^2+2xy+y^2}{x^2+y^2}$ si $(x,y) \neq (0,0)$ et $f(0,0)=1$.
Etudier les limites, pour $t \to 0$ de $f(0,t)$ et $f(t,-t)$. Conclusion ?

Exercice 6

Déterminer la limite éventuelle en $(0\,,0)$ de la fonction f définie par $f(x,y) = \ldots$

(a) $\dfrac{x^2+y^2}{x^2-y^2}$ (b) $\dfrac{2x^2y}{x^4+y^2}$ (c) $\dfrac{1-\cos\sqrt{xy}}{y}$

Exercice 7

Soit f définie par $f(x,y) = y\dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$ pour $(x,y) \neq (0,0)$ et $f(0,0)=0$.
Montrer que f est continue sur $\mathbb{R}^2$.

Exercice 8

Calculer les dérivées partielles premières des fonctions suivantes :

(a) $f_1(x,y) = x^2y + y^3$ (b) $f_2(x,y) = \sqrt{x+2y}$
(c) $f_3(x,y) = 3xy + \mathrm{e}^y$ (d) $f_4(x,y) = y\sin(2xy+1)$
(e) $f_5(x,y) = \ln(x^2y^2)$ (f) $f_6(x,y) = \arcsin(1-xy)$

Exercice 9 Soit f la fonction définie par

$$f(0,0)=0 \qquad \text{et} \qquad f(x,y) = \frac{xy}{x^2+y^2} \quad \text{si} \quad (x,y)\neq(0,0)$$

1. Montrer que les applications partielles de f en $(0,0)$, sont continues en 0.
2. Examiner $f(x,x)$ et montrer que f n'est pas continue en $(0,0)$.
3. Prouver l'existence de dérivées partielles premières de f sur $\mathbb{R}^2$.
4. Vérifier par le calcul que les dérivées partielles ne sont pas continues en $(0,0)$.

Exercice 10

Déterminer le développement limité à l'odre 1 de la fonction f au point $a=(2\,;1)$:

(a) $f(x,y) = x^2y$ (b) $f(x,y) = \dfrac{1}{2}(x^2-y^2)$

(c) $f(x,y) = \ln(xy)$ (d) $f(x,y) = x\arctan y$

Exercice 11 On considère la fonction g définie sur $\mathbb{R}^2$ par

$$g(x,y) = x^2 + 5y^2 - 20y + 25$$

On désigne par $\mathscr{S}$ sa surface représentative dans l'espace rapporté à un repère orthonormal $\left(O\,;\vec{i}\,,\vec{j}\,,\vec{k}\right)$.

1. Calculer les dérivées partielles premières de g.
2. Déterminer le développement limité à l'ordre 1 de la fonction g au point $a=(-2\,;1\,)$.
3. (a) Déterminer le(s) éventuel(s) point(s) critique(s) de g.
   (b) Montrer que la fonction g présente un minimum absolu que l'on précisera.
4. On note $\mathcal{P}$ le plan d'équation $2y+z=5$.
   En quel(s) point(s) de $\mathscr{S}$ le plan tangent à $\mathscr{S}$ est-il parallèle à $\mathcal{P}$?
5. En utilisant le résultat de 3b, trouver le point du plan $\mathcal{P}$ le plus proche de l'origine O du repère.

Exercice 12 On considère la fonction f de deux variables définie par

$$f(x,y) = x\,y^2 - \ln(x^2)$$

On désigne par $\mathscr{S}$ sa surface représentative.

1. Donner l'ensemble de définition $\mathcal{D}$ de la fonction f.
2. Calculer les dérivées partielles premières de f.
3. (a) Déterminer le développement limité à l'ordre 1 de la fonction f au point $a=(1\,;2)$.
   (b) En déduire, sans calculatrice, une valeur décimale approchée de $f(0,99\,;\,2,001)$

4. Déterminer une équation cartésienne du plan tangent à la surface $\mathscr{S}$ au point $A(1,2,4)$.

5. On note $\mathscr{P}$ le plan d'équation $3x+2y-z=0$.
En quel(s) point(s) de $\mathscr{S}$ le plan tangent à $\mathscr{S}$ est-il parallèle à $\mathscr{P}$?

Exercice 13 On considère la fonction f de deux variables définie par : $f(x,y)=3x\,\mathrm{e}^{y}-x^{3}-\mathrm{e}^{3y}$. On admet que f est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}^2$.

1. (a) Calculer les dérivées partielles premières de f.
   (b) Montrer que $a=(1;0)$ est le seul point critique de f.
2. (a) Calculer les dérivées partielles secondes de f.
   (b) En déduire que f admet un extremum local en a. S'agit-il d'un maximum ou d'un minimum ?
   (c) Cet extremum est-il absolu ?

Exercice 14

Trouver les extremums locaux de la fonction f définie par :

1. $f(x,y)=2x^2+2y^2+2xy-x-y$
2. $f(x,y)=x^3+y^3-9\,xy+1$
3. $f(x,y)=x^4+y^4-4\,x\,y$
4. $f(x,y)=\sin(x)+y^2-2\,y+1$
5. $f(x,y)=\mathrm{e}^{x\,\sin y}$
6. $f(x,y)=xy(x+y-1)$

Exercice 15

On considère la fonction f, de deux variables réelles, définie pour tous réels strictement positifs x et y par :

$$f(x,y)=x\,y+\frac{8}{x}+\frac{8}{y}$$

1. Déterminer les éventuels points critiques de f.
2. La fonction f présente-t-elle des extremums locaux ?

3. **Application** :
Une entreprise fabrique des bacs parallélépipédiques de largeur x, de longueur y et de hauteur z (x, y et z étant exprimées en dm). Ces bacs comportent un fond mais pas de couvercle et l'épaisseur des plaques formant ces bacs est négligeable.
   (a) Quelle est l'aire totale (en dm^2) des plaques nécessaires à la construction d'un bac ? On notera cette aire $\mathcal{A}(x,y,z)$.
   (b) On veut que chaque bac ait un volume de 4 litres. Comment choisir les dimensions pour minimiser l'aire $\mathcal{A}$?

Exercice 16 On considère les fonctions :

$$f:\ \begin{array}{ccl}]0\,,+\infty[& \longrightarrow & \mathbb{R} \\ t & \longmapsto & f(t)=(t+\ln t)\,\mathrm{e}^{t-1} \end{array}$$

$$F:\ \begin{array}{ccl}]0\,,+\infty[& \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & F(x)=\displaystyle\int_1^x f(t)\,\mathrm{d}t \end{array}$$

1. Montrer que F est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $]0\,,+\infty[$ et exprimer $F'(x)$, pour tout $x\in]0\,,+\infty[$, à l'aide de $f(x)$.

   On considère l'application de classe $\mathcal{C}^2$:

$$g:\ \begin{array}{ccl}]0;+\infty[^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x,y) & \longrightarrow & g(x,y)=F(x)+F(y)-2\,\mathrm{e}^{\frac{x+y}{2}} \end{array}$$

2. Exprimer les dérivées partielles premières $\dfrac{\partial g}{\partial x}(x,y)$ et $\dfrac{\partial g}{\partial y}(x,y)$ pour tout $(x,y)\in]0;+\infty[^2$, à l'aide de $f(x)$, $f(y)$ et $\mathrm{e}^{\frac{x+y}{2}}$.
3. a) Montrer que f est bijective.
   b) Établir que, pour tout $(x,y)\in]0\,,+\infty[^2$, (x,y) est un point critique de g ssi $x=y$ et $x+\ln x=e$
4. Montrer que l'équation $x+\ln x=e$, d'inconnue $x\in]0\,,+\infty[$, admet une solution et une seule, que l'on notera α. Vérifier que $1<\alpha<e$.
5. Montrer que g admet un extremum local. Préciser sa nature.