Matrices et applications linéaires

I Matrice colonne associée à un vecteur

Soit E un $\mathbb{K}-$espace vectoriel de dimension finie n, et soit $\mathscr{B} = (\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, \dots, \overrightarrow{e_n})$ une base de E. Pour tout vecteur $\overrightarrow{u}$ de E, il existe des scalaires uniques $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ tels que

$$\overrightarrow{u} = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \overrightarrow{e_i} \quad (\text{ coordonnées de } \overrightarrow{u} \text{ dans la base } \mathscr{B})$$

On note alors $U = \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix}$ et U est appelé la **matrice colonne associée** à $\overrightarrow{u}$ dans la base $\mathscr{B}$.

Définition 1 (Matrice d'un vecteur dans une base)

La matrice du vecteur $\overrightarrow{u}$ dans la base $\mathscr{B}$ est la matrice colonne des coordonnées de $\overrightarrow{u}$ dans $\mathscr{B}$. On peut la noter U.

$$U = \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix} \iff$$

Exemples :

- Soit $\overrightarrow{u} = (x_1, \dots, x_n)$ un vecteur de $\mathbb{R}^n$. Alors sa matrice colonne dans la **base canonique** de $\mathbb{R}^n$ est

- Soit $P = X + (X-1)^3$. Déterminer la matrice colonne associée à P dans la base canonique de $\mathbb{R}_3[X]$.

Proposition 1

Soit E un $\mathbb{K}-$espace vectoriel de dimension finie n, et soit $\mathscr{B} = (\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, \dots, \overrightarrow{e_n})$ une base de E. L'application qui, à tout vecteur $\overrightarrow{u} \in E$ associe sa matrice colonne dans la base $\mathscr{B}$ est un isomorphisme de sur .

Cette proposition signifie que le vecteur colonne dans une base donnée est unique.

II Matrice d'une application linéaire

p et n sont deux entiers naturels non nuls.
E et F désigneront dorénavant deux $\mathbb{K}-$espaces vectoriels de dimensions finies respectives p et n.
$\mathscr{B} = (e_1, e_2 \ldots, e_p)$ sera une base de E et $\mathscr{C} = (\epsilon_1, \epsilon_2 \ldots, \epsilon_n)$ sera une base de F.

II.1 Définition

Définition 2

Soit f une application linéaire de E dans F.
On appelle **matrice de f relativement aux bases $\mathscr{B}$ et $\mathscr{C}$**, la matrice $A \in \mathfrak{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ à n lignes et p colonnes définie par $A = (a_{i,j})_{\substack{1 \leqslant i \leqslant n \\ 1 \leqslant j \leqslant p}}$ telle que

$$\forall j \in [\![1, p]\!], \qquad f(e_j) =$$

On écrit $A = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B},\mathscr{C}}(f)$.
Dans le cas d'un endomorphisme $f \in \mathscr{L}(E)$, lorsque la base est la même «au départ et à l'arrivée», on note $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(f) = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B},\mathscr{B}}(f)$

REMARQUES :

- La j-ème colonne de $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B},\mathscr{C}}(f)$ est le vecteur colonne des coordonnées dans la base $\mathscr{C}$ du vecteur .
- Les coordonnées des $f(e_j)$ étant uniques, la matrice associée à f dans les bases données est unique.
- La matrice associée à un endomorphisme est une matrice ...
- $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(\mathrm{id}_E) =$

Exemple : on considère l'application linéaire f de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^2$ définie par

$$f(x, y, z) = (x - y + 4z, 3x - z)$$

Déterminer la matrice A de l'application f relativement aux bases canoniques de $\mathbb{R}^3$ et $\mathbb{R}^2$.
On note (e_1, e_2, e_3) la base canonique de $\mathbb{R}^3$ et (ϵ_1, ϵ_2) la base canonique de $\mathbb{R}^2$.

II.2 Calculs d'images

Proposition 2

Soit $f \in \mathscr{L}(E,F)$ et $A = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B},\mathscr{C}}(f)$.
Pour tous vecteurs $x \in E$ et $y \in F$, on note X et Y leurs matrices colonnes associées dans les bases $\mathscr{B}$ et $\mathscr{C}$. Alors

$$y = f(x) \iff$$

Preuve : posons $A = (a_{i,j})_{\substack{1 \leqslant i \leqslant n \\ 1 \leqslant j \leqslant p}}$

■

Exemple : soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}_2[X]$ dont la matrice dans la base canonique $(\mathbb{1}, X, X^2)$ de $\mathbb{R}_2[X]$ est $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ -3 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. On considère le polynôme $P = 3X^2 - 2X + 1$. Calculer $f(P)$.

II.3 Lien entre $\mathscr{L}(E,F)$ et $\mathfrak{M}_{n,p}(\mathbb{K})$

Proposition 3 (Opérations)

Soit E, F et G trois $\mathbb{K}-$espaces vectoriels de dimensions finies.
Soit $\mathscr{B}$ une base de E, $\mathscr{C}$ une base de F et $\mathscr{D}$ une base de G.

i) Si $f \in \mathscr{L}(E,F)$, si $g \in \mathscr{L}(E,F)$ et si $\lambda \in \mathbb{K}$ alors

$$\mathrm{Mat}_{\mathscr{B},\mathscr{C}}(f+g) =$$

$$\mathrm{Mat}_{\mathscr{B},\mathscr{C}}(\lambda f) =$$

ii) Si $f \in \mathscr{L}(E,F)$ et si $g \in \mathscr{L}(F,G)$ alors

$$\mathrm{Mat}_{\mathscr{B},\mathscr{D}}(g \circ f) =$$

Preuve : ii) soit $x \in E$. On pose $y = f(x)$ et $z = g(y) = (g \circ f)(x)$. On désigne par X, Y, et Z les vecteurs colonnes associés respectivement à x, y et z dans les bases $\mathscr{B}$, $\mathscr{C}$, $\mathscr{D}$. On pose de plus $A = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B},\mathscr{C}}(f)$ et $B = \mathrm{Mat}_{\mathscr{C},\mathscr{D}}(g)$.

D'après la proposition précédente on a $Y = AX$ et $Z = BY$. Donc $Z = B(AX) = (BA)X$. Comme la matrice associée à une application linéaire est unique, on obtient $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B},\mathscr{D}}(g \circ f) = BA$ ∎

Conséquence :

Proposition 4

– L'application $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B},\mathscr{C}}$ qui, à toute application linéaire f de $\mathscr{L}(E,F)$ associe sa matrice relativement aux bases $\mathscr{B}$ et $\mathscr{C}$, est un isomorphisme de $\mathscr{L}(E,F)$ sur $\mathfrak{M}_{n,p}(\mathbb{K})$.
On a donc

$$\dim(\mathscr{L}(E,F)) =$$

– L'application $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}$ qui à tout endomorphisme f de $\mathscr{L}(E)$ associe sa matrice relative à la base $\mathscr{B}$, est un isomorphisme de $\mathscr{L}(E)$ sur $\mathfrak{M}_p(\mathbb{K})$. On a donc

$$\dim(\mathscr{L}(E)) =$$

Proposition 5

Soit f un endomorphisme de E et A sa matrice relative à la base $\mathscr{B}$. Alors

f est bijectif si, et seulement si, A est inversible

et dans ce cas A^{-1} est la matrice de f^{-1} relativement à la base $\mathscr{B}$.

$$\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(f^{-1}) =$$

Preuve : démontrons uniquement le sens direct "$\Rightarrow$". On a donc $A = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(f)$. On pose alors $N = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(f^{-1})$. On sait que $f \circ f^{-1} = \mathrm{id}_E$ donc d'après la proposition 3 ii), $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(f \circ f^{-1}) = AN$.
On a donc $AN = I_p$ et on en déduit donc que A est inversible et que $N = A^{-1}$.

III Changement de base

III.1 Matrice de passage

Définition 3

Soit $\mathscr{B} = (e_1, e_2, \dots, e_p)$ et $\mathscr{B}' = (e'_1, e'_2, \dots, e'_p)$ deux bases d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E.
On appelle **matrice de passage** de la base $\mathscr{B}$ à la base $\mathscr{B}'$ la matrice carrée $P \in \mathfrak{M}_p(\mathbb{K})$ dont les colonnes sont les coordonnées des vecteurs $e'_1, e'_2, \dots, e'_p$ dans la base $\mathscr{B}$.

Autrement dit, $P =$

Exemple : notons $\mathscr{B} = (e_1, e_2)$ la base canonique de $\mathbb{R}^2$.
Posons $e'_1 = -e_2$ et $e'_2 = 2e_1 + e_2$. La matrice de passage de la base $\mathscr{B}$ à la base (e'_1, e'_2) est

Proposition 6

La matrice de passage P de la base $\mathscr{B}$ à la base $\mathscr{B}'$ est

et $P^{-1} = Q$ où Q désigne la matrice de passage ...

III.2 Effet d'un changement de base

III.2.1 sur les coordonnées d'un vecteur

Proposition 7

Soit $\mathscr{B}$ et $\mathscr{B}'$ deux bases d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E de dimension finie.
Soit $\overrightarrow{u}$ un vecteur de E. Si P est la matrice de passage $\mathscr{B}$ à $\mathscr{B}'$, alors

$$U =$$

Preuve : posons $U = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_p \end{pmatrix}$ et $U' = \begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ \vdots \\ x'_p \end{pmatrix}$ les matrices colonnes des coordonnées de $\overrightarrow{u}$ respectivement dans les bases $\mathscr{B}$ et $\mathscr{B}'$.

$\blacksquare$

REMARQUE : si l'on connaît les coordonnées d'un vecteur $\overrightarrow{u}$ dans une base $\mathscr{B}$ et les coordonnées des vecteurs de $\mathscr{B}$ dans une «nouvelle» base $\mathscr{B}'$ (c'est à dire la matrice de passage de de la base $\mathscr{B}'$ à la base $\mathscr{B}$), il est facile (en remplaçant, développant, regroupant) d'obtenir les coordonnées de $\overrightarrow{u}$ dans la «nouvelle» base $\mathscr{B}'$. Cela se traduit par la relation matricielle

$$U' =$$

III.2.2 sur la matrice d'un endomorphisme de E

Théorème 8 (formule de changement de base)

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie.

Soit $\mathscr{B}$ et $\mathscr{B}'$ deux bases de E et P la matrice de passage **de** $\mathscr{B}$ **à** $\mathscr{B}'$.

Si f est un endomorphisme de E alors

$$A' =$$

où $A = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(f)$ et $A' = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}'}(f)$

IV Rang d'une matrice

IV.1 Lien avec le rang d'une application linéaire

Définition 4

Soit $A \in \mathfrak{M}_{n,p}(\mathbb{K})$. On appelle *rang de la matrice* A et on note $\mathrm{rg}(A)$ le rang de

Remarques :

(i) le rang de la matrice A est le rang

(ii) $\mathrm{rg}(A) \leqslant$

(iii) $\mathrm{rg}(A) = 0 \iff$

(iv) $A \in GL_n(\mathbb{K}) \iff$

IV.2 Multiplication à droite par une matrice inversible

Lemme

Si $A \in \mathfrak{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ et si $Q \in GL_p(\mathbb{K})$ alors AQ a le même rang que A.

Conséquences :

Exemple : déterminer le rang de la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 5 \\ 2 & 5 & -3 & 12 \\ 1 & 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$

V Exercices

Exercice 1

Soit $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ l'application linéaire définie par :

$$f(\,(x,y,z)\,) = (z+y-x\,,x+z-y\,,x+y-z)$$

1. Écrire la matrice A de f dans la base canonique $\mathcal{B}$ de $\mathbb{R}^3$.
2. Déterminer la matrice de $f\circ f$ par les deux méthodes suivantes :
   a) en calculant les images par $f\circ f$ des vecteurs de la base canonique,
   b) en calculant le produit matriciel $A\cdot A$.
3. En déduire $(f\circ f)(x\,,y\,,z)$ pour tout $(x,y,z)\in\mathbb{R}^3$.

Exercice 2 Écrire la matrice de l'application linéaire

$$\begin{array}{rccl} \Phi : & \mathbb{C}_3[X] & \longrightarrow & \mathbb{C}_2[X] \\ & P & \longmapsto & P(X+1)-P(X) \end{array}$$

relativement aux bases canoniques de $\mathbb{C}_3[X]$ et $\mathbb{C}_2[X]$.

Exercice 3

Soit $f\in\mathscr{L}(\mathbb{R}^3)$ l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ canoniquement associé à la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 3 \\ -4 & -7 & -12 \\ 2 & 4 & 7 \end{pmatrix}$$

1. Calculer la matrice de $f\circ f$ dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$.
   Que peut-on en déduire pour $f\circ f$?
2. Montrer que $\operatorname{Ker} f \cap \operatorname{Im} f = \left\{\overrightarrow{0}\right\}$.

Exercice 4

Soit $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ l'application linéaire dont la matrice dans la base canonique est :

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Déterminer $\operatorname{Ker} f$. En déduire que f est une bijection.
Donner $\operatorname{Im} f$.

Exercice 5

1. Montrer qu'il existe une unique application linéaire de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^3$ telle que $f(1,0)=(1,2,3)$ et $f(0,1)=(2,1,3)$
2. Écrire la matrice de f relativement aux bases canoniques de $\mathbb{R}^2$ et $\mathbb{R}^3$.
3. Pour $(x,y)\in\mathbb{R}^2$, calculer $f(x;y)$.
4. Déterminer le rang et le noyau de f. f est-elle injective ? surjective ? bijective ?

Exercice 6

Dans l'espace vectoriel $\mathbb{R}^3$ muni de sa base canonique $\mathcal{B}=(\overrightarrow{e_1}\,,\overrightarrow{e_2}\,,\overrightarrow{e_3})$, on considère les trois vecteurs :

$$\overrightarrow{f_1}=(1,1,1) \qquad \overrightarrow{f_2}=(1,1,-1) \qquad \overrightarrow{f_3}=(1,-1,1)$$

1. Montrer que $\mathcal{C}=(\overrightarrow{f_1}\,,\overrightarrow{f_2}\,,\overrightarrow{f_3})$ est une base de $\mathbb{R}^3$.
2. On considère u l'application linéaire de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^3$ définie par les relations : $u(\overrightarrow{e_1})=\overrightarrow{f_1}$ $\quad u(\overrightarrow{e_2})=\overrightarrow{f_2}$ $\quad u(\overrightarrow{e_3})=\overrightarrow{f_3}$
   (a) Expliciter la matrice M de u dans la base canonique $\mathcal{B}$.
   (b) Montrer que u est bijective.

3. Déterminer la matrice de $u^2 = u \circ u$ dans la base $\mathcal{B}$. Montrer que cette matrice est combinaison linéaire de M et I_3.
   En déduire une relation entre u, u^2 et $\mathrm{id}_{\mathbb{R}^3}$.

Exercice 7

Dans le plan muni d'un repère orthonormal $\left(O\,;\overrightarrow{i}\,,\overrightarrow{j}\right)$, on se donne le point $A(2\,;0)$ et les vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ définis par :

$$\overrightarrow{u} = \overrightarrow{i} + \overrightarrow{j} \qquad \text{et} \qquad \overrightarrow{v} = -\overrightarrow{i} + \overrightarrow{j}$$

1. Justifier que $(\overrightarrow{u}\,,\overrightarrow{v})$ est une base du plan.
2. (a) Donner la matrice de passage de la base $(\overrightarrow{i}\,,\overrightarrow{j})$ à la base $(\overrightarrow{u}\,,\overrightarrow{v})$.
   (b) Pour tout point M de coordonnées (x,y) dans $\left(O\,;\overrightarrow{i}\,,\overrightarrow{j}\right)$, on note (X,Y) ses coordonnées dans le nouveau repère $(A\,;\overrightarrow{u}\,,\overrightarrow{v})$. Exprimer x, y en fonction de X et Y.
3. On note Γ la courbe d'équation $y^2 - x^2 + 4x = 8$ dans $\left(O\,;\overrightarrow{i}\,,\overrightarrow{j}\right)$.
   Déterminer l'équation de Γ dans le nouveau repère $(A\,;\overrightarrow{u}\,,\overrightarrow{v})$.
4. Quelle est la nature géométrique de Γ ?

Exercice 8

Soit $\mathbb{C}_2[X]$ l'espace vectoriel des polynômes à coefficients complexes, de degré inférieur ou égal à 2.
On considère l'application $\varphi : \begin{array}{ccc} \mathbb{C}_2[X] & \longrightarrow & \mathbb{C}_2[X] \\ P(X) & \longmapsto & P(X+1) - X\,P'(X) \end{array}$

1. Pour a, b et c complexes, calculer $\varphi(aX^2 + bX + c)$.
2. Vérifier que φ est une application linéaire de $\mathbb{C}_2[X]$ dans $\mathbb{C}_2[X]$.
3. Déterminer une base du noyau de φ. En déduire le rang de φ.
4. Écrire la matrice de φ dans la base canonique $\mathscr{B}_0 = (1\,,\,X\,,\,X^2)$ de $\mathbb{C}_2[X]$.

Exercice 9

Soit $\varphi : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_3[X] & \longrightarrow & \mathbb{R}_3[X] \\ P & \longmapsto & P - (X+1)P' \end{array}$

1. Vérifier que φ est un endomorphisme de $\mathbb{R}_3[X]$.
2. Montrer que $(1, (X+1), (X+1)^2, (X+1)^3)$ est une base de $\mathbb{R}_3[X]$.
3. Écrire la matrice de φ dans la base précédente.
4. En déduire l'image de φ, le rang de φ et le noyau de φ.

Exercice 10

Soit E un espace vectoriel sur $\mathbb{C}$ de dimension 3, muni d'une base $\mathscr{B} = \left(\overrightarrow{e_1}\,,\overrightarrow{e_2}\,,\overrightarrow{e_3}\right)$. On définit l'endomorphisme u de E par

$$u(\overrightarrow{e_1}) = -\overrightarrow{e_3} \quad , \quad u(\overrightarrow{e_2}) = i\,\overrightarrow{e_2} \quad \text{et} \quad u(\overrightarrow{e_3}) = \overrightarrow{e_1}$$

Déterminer $u \circ u$. En déduire que u est un endomorphisme bijectif de E.

Exercice 11

On considère $f \in \mathscr{L}(\mathbb{R}^3)$ dont la matrice, dans la base canonique $\mathscr{B}_0$ de $\mathbb{R}^3$, est $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 0 \\ 4 & -1 & 2 \end{pmatrix}$. On donne les vecteurs :
$\overrightarrow{u_1} = (0,0,1)$; $\overrightarrow{u_2} = (0,1,1)$; $\overrightarrow{u_3} = (1,1,1)$.
On admet que $\mathscr{B}' = \left(\overrightarrow{u_1}\,,\overrightarrow{u_2}\,,\overrightarrow{u_3}\right)$ est une base de $\mathbb{R}^3$.

1. (a) Exprimer $f(\overrightarrow{u_1})$ en fonction de $\overrightarrow{u_1}$, puis $f(\overrightarrow{u_2})$ en fonction de $\overrightarrow{u_2}$.
   (b) Calculer les coordonnées du vecteur $f(\overrightarrow{u_3})$ dans la base canonique $\mathscr{B}_0$ de $\mathbb{R}^3$.
   (c) Exprimer $f(\overrightarrow{u_3})$ comme combinaison linéaire de $\overrightarrow{u_1}\,,\overrightarrow{u_2}\,,\overrightarrow{u_3}$.
2. (a) Donner la matrice de passage P de la base $\mathscr{B}_0$ vers la base $\mathscr{B}'$.
   (b) En déduire la matrice $T = P^{-1}\,A\,P$.