Applications linéaires

Dans tout ce chapitre, $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{K} = \mathbb{C}$.

Définition 1

Soient E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels.

- On dit qu'une application $f : E \longrightarrow F$ est **linéaire** de E dans F ssi pour tous vecteurs x et y de E, pour tout scalaire λ de $\mathbb{K}$

$$f(\lambda \cdot x + y) =$$

- On note $\mathscr{L}(E, F)$ l'ensemble de toutes les applications linéaires de E dans F.
  Une application linéaire de E dans lui-même est appelé un

  L'ensemble des endomorphismes de E est noté $\mathscr{L}(E)$.

- Soit $f \in \mathscr{L}(E, F)$. On appelle **image de** f l'ensemble, noté $\operatorname{Im} f$, des vecteurs de F qui sont les images par f des vecteurs de E. Autrement dit,

$$y \in \operatorname{Im} f \iff \exists$$

- Soit $f \in \mathscr{L}(E, F)$. On appelle **noyau de** f l'ensemble, noté $\operatorname{Ker} f$, des vecteurs de E dont l'image par f est le vecteur nul de F. Autrement dit,

$$x \in \operatorname{Ker} f \iff$$

Rappels :

- $\mathscr{L}(E, F)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{F}(E, F)$.
- $\operatorname{Im} f$ est un sous-espace vectoriel de F. . $\operatorname{Ker} f$ est un sous-espace vectoriel de E.
- Si $f : E \longrightarrow F$ une application linéaire et bijective, alors sa bijection réciproque $f^{-1} : F \to E$ est linéaire. Une application linéaire et bijective de E dans F est appelée

Théorème 1

Soient E un $\mathbb{K}-$espace vectoriel de dimension finie n $(n \geqslant 1)$ et $(e_1, e_2, \ldots, e_n)$ une base de E. Soient F un $\mathbb{K}-$espace vectoriel quelconque et $(v_1, v_2, \ldots, v_n)$ une famille de vecteurs de F.
Alors il existe une **unique** application linéaire f de E dans F, telle que

Remarque :
cette propriété signifie que pour connaître entièrement une application linéaire f sur un espace E de dimension finie, il suffit de connaître les images par f des vecteurs d'une base de E.

I Projecteurs et symétries

I.1 Approche géométrique

Définition 2

Soient E un $\mathbb{K}-$espace vectoriel, F et G deux sous-espaces vectoriels de E tels que

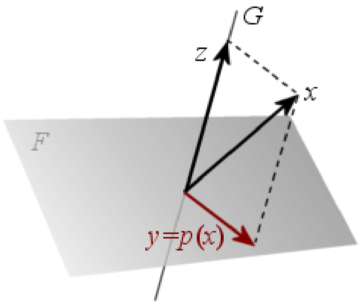
$$E = F \oplus G$$

- On appelle **projection vectorielle sur** F **parallèlement à** G l'application p qui, à tout vecteur $x = y + z$ où $y \in F$ et $z \in G$, associe le vecteur

$$p(x) =$$

- On appelle **symétrie vectorielle par rapport à** F **parallèlement à** G l'application s qui, à tout vecteur $x = y + z$ où $y \in F$ et $z \in G$, associe le vecteur

$$s(x) =$$



Proposition 2

Soient F et G deux sous-espaces vectoriels de E, supplémentaires dans E.

- Si p est la **projection vectorielle sur** F **parallèlement à** G alors

$$p \in \qquad ; \qquad \operatorname{Ker} p = \qquad \text{et} \qquad \operatorname{Im} p =$$

- Si s est la **symétrie vectorielle par rapport à** F **parallèlement à** G alors

Preuve : montrons la linéarité de p.

■

I.2 Caractérisations

Définition 3

On appelle **projecteur de** E tout endomorphisme de E qui vérifie $p \circ p =$

Proposition 3

Si p est un projecteur de E alors $E = \operatorname{Ker} p \oplus \operatorname{Im} p$

Preuve : montrons d'abord que $E \subset \operatorname{Ker} + \operatorname{Im} p$.

■

Théorème 4

Soient p et s deux endomorphismes de E.

- p est une projection vectorielle si, et seulement si, $p \circ p =$
- s est une symétrie vectorielle si, et seulement si, $s \circ s =$

  Dans ce cas, s est la symétrie par rapport à $\operatorname{Ker}(s - \mathrm{id}_E)$ parallèlement à $\operatorname{Ker}(s + \mathrm{id}_E)$.

Preuve : supposons $s \in \mathscr{L}(E)$ tel que $s \circ s = \mathrm{id}_E$.

■

II Rang d'une application linéaire

Si E est un $\mathbb{K}-$espace vectoriel de dimension finie $n \geqslant 1$, admettant pour base $(e_1, e_2, \ldots, e_n)$ et si f est une application linéaire de E dans F, alors Im f est

Définition 4

Soient E et F deux $\mathbb{K}-$espaces vectoriels tels que E est de dimension finie.
On appelle **rang d'une application linéaire** $f \in \mathscr{L}(E, F)$, et on note $\text{rg}(f)$, la dimension de

Théorème 5 (formule du rang)

Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel **de dimension finie**, F un $\mathbb{K}$-espace vectoriel **quelconque** et f une application linéaire de E dans F. Alors

$$\dim E =$$

Proposition 6 (caractérisation des isomorphismes)

Soient E et F deux $\mathbb{K}-$espaces vectoriels de **même** dimension finie $n \geqslant 1$. Soit f une application linéaire de E dans F. Alors les quatre assertions suivantes sont équivalentes :
(i) f est bijective
(ii) f est injective
(iii) f est surjective
(iv) $\text{rg}(f) =$

III Matrice d'une application linéaire

p et n sont deux entiers naturels non nuls.
E et F désigneront dorénavant deux $\mathbb{K}-$espaces vectoriels de dimensions finies respectives p et n.
$\mathscr{B} = (e_1, e_2 \ldots, e_p)$ sera une base de E et $\mathscr{C} = (\epsilon_1, \epsilon_2 \ldots, \epsilon_n)$ sera une base de F.

III.1 Définition

Définition 5

Soit f une application linéaire de E dans F.
On appelle **matrice de f relativement aux bases $\mathscr{B}$ et $\mathscr{C}$**, la matrice $A \in \mathfrak{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ à n lignes et p colonnes, dont la $j-$ème colonne est constituée des coordonnées du vecteur $f(e_j)$ dans la base $\mathscr{C}$. On écrit $A = \text{Mat}_{\mathscr{B},\mathscr{C}}(f)$.

Dans le cas d'un endomorphisme $f \in \mathscr{L}(E)$, lorsque la base est la même «au départ et à l'arrivée», on note $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(f) = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B},\mathscr{B}}(f)$

REMARQUES :

- Les coordonnées des $f(e_j)$ étant uniques, la matrice associée à f dans les bases données est unique.
- $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(\mathrm{id}_E) =$

III.2 Calculs d'images

Proposition 7

Soit $f \in \mathscr{L}(E, F)$ et $A = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B},\mathscr{C}}(f)$.
Pour tous vecteurs $x \in E$ et $y \in F$, on note X et Y leurs matrices colonnes associées dans les bases $\mathscr{B}$ et $\mathscr{C}$. Alors

$$y = f(x) \iff$$

III.3 Lien entre $\mathscr{L}(E, F)$ et $\mathfrak{M}_{n,p}(\mathbb{K})$

Proposition 8 (Opérations)

Soient E, F et G trois $\mathbb{K}-$espaces vectoriels de dimensions finies.
Soient $\mathscr{B}$ une base de E, $\mathscr{C}$ une base de F et $\mathscr{D}$ une base de G.

i) Si $f \in \mathscr{L}(E, F)$, si $g \in \mathscr{L}(E, F)$ et si $\lambda \in \mathbb{K}$ alors

$$\mathrm{Mat}_{\mathscr{B},\mathscr{C}}(f + g) =$$

$$\mathrm{Mat}_{\mathscr{B},\mathscr{C}}(\lambda f) =$$

ii) Si $f \in \mathscr{L}(E, F)$ et si $g \in \mathscr{L}(F, G)$ alors

$$\mathrm{Mat}_{\mathscr{B},\mathscr{D}}(g \circ f) =$$

Conséquence :

Proposition 9

L'application $\Phi : \mathscr{L}(E, F) \longrightarrow \mathfrak{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ qui, à toute application linéaire f de $\mathscr{L}(E, F)$ associe sa matrice relativement aux bases $\mathscr{B}$ et $\mathscr{C}$, est un isomorphisme de $\mathscr{L}(E, F)$ sur $\mathfrak{M}_{n,p}(\mathbb{K})$. On a donc $\dim(\mathscr{L}(E, F)) =$

Proposition 10

Soit f un endomorphisme de E et A sa matrice relative à la base $\mathscr{B}$. Alors

f est bijectif si, et seulement si, A est ......

et dans ce cas A^{-1} est la matrice de f^{-1} relativement à la base $\mathscr{B}$.

IV Changement de base en dimension finie

IV.1 Matrice de passage

Définition 6

Soit $\mathscr{B} = (e_1, e_2, \dots, e_p)$ et $\mathscr{B}' = (e'_1, e'_2, \dots, e'_p)$ deux bases d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E.
On appelle **matrice de passage** de la base $\mathscr{B}$ à la base $\mathscr{B}'$ la matrice carrée $P \in \mathfrak{M}_p(\mathbb{K})$ dont les colonnes sont les coordonnées des vecteurs $e'_1, e'_2, \dots, e'_p$ dans la base $\mathscr{B}$.

Autrement dit, $P =$

Proposition 11

La matrice de passage P de la base $\mathscr{B}$ à la base $\mathscr{B}'$ est

et $P^{-1} = Q$ où Q désigne la matrice de passage ...

IV.2 Effet d'un changement de base

IV.2.1 sur les coordonnées d'un vecteur

Proposition 12

Soit $\mathscr{B}$ et $\mathscr{B}'$ deux bases d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E de dimension finie.
Soit $\overrightarrow{u}$ un vecteur de E. Si P est la matrice de passage $\mathscr{B}$ à $\mathscr{B}'$, alors $U =$

IV.2.2 sur la matrice d'un endomorphisme de E

Théorème 13 (formule de changement de base)

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie.
Soient $\mathscr{B}$ et $\mathscr{B}'$ deux bases de E et P la matrice de passage **de** $\mathscr{B}$ **à** $\mathscr{B}'$.
Si f est un endomorphisme de E alors

$$A' = \qquad \text{où} \quad A = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(f) \quad \text{et} \quad A' = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}'}(f)$$