Intégration sur un intervalle quelconque

Dans tout ce chapitre, a et b désignent des nombres réels avec $a < b$ et $b > 0$.

Définition 1

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$. On dit qu'une fonction $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ est *continue par morceaux sur* I si, pour tout segment $[a\,,b]$ inclus dans I, la restriction de f à $[a\,,b]$ est continue par morceaux sur $[a\,,b]$.

Remarques :

- Toute fonction continue par morceaux sur un segment, est bornée.
- Une fonction continue par morceaux sur un intervalle quelconque, n'est pas nécessairement bornée.

Exemple : la fonction «partie entière» $x \longmapsto \lfloor x \rfloor$ est ...

I Intégrales généralisées

I.1 Sur un intervalle fermé du type $[a\,,+\infty[$ où $a \in \mathbb{R}$

Définition 2

Soit $f : [a\,,+\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue par morceaux sur $[a\,,+\infty[$.
On dit que **l'intégrale généralisée** $\displaystyle\int_a^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$ **est convergente** si la fonction $x \longmapsto \displaystyle\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$ admet

On pose alors :

$$\int_a^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t =$$

Cette intégrale se note aussi

Dans le cas contraire, l'intégrale est dite ...

Exemples :

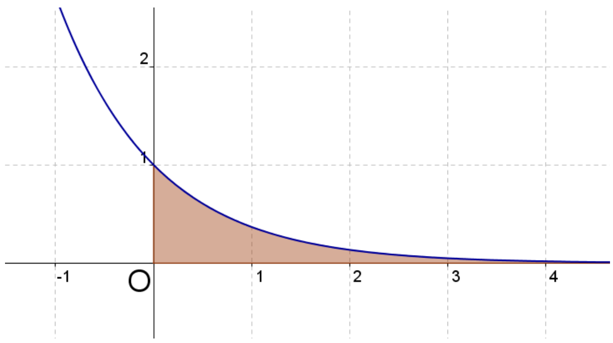
(i) Déterminer la nature de l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t$.

La fonction $t \mapsto \mathrm{e}^{-t}$ est continue sur $[0\,,+\infty[$. Le seul problème se trouve donc en $+\infty$.

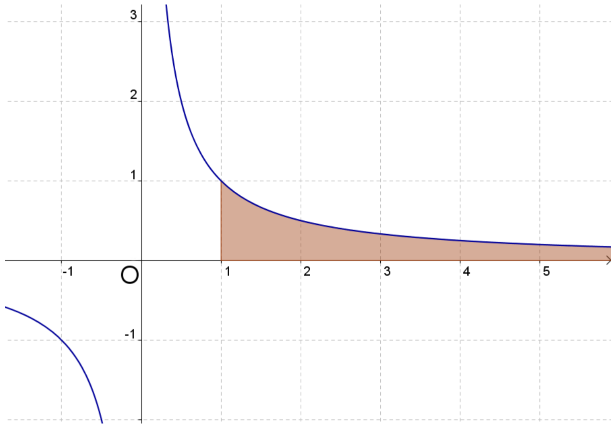
Soit $x \in [0\,,+\infty[$. On a $\displaystyle\int_0^x \mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t = -\mathrm{e}^{-x}+1$

D'où $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\int_0^x \mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t = \lim_{x\to+\infty} -\mathrm{e}^{-x}+1 = 1.$

Donc $\displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t$ est convergente et $\displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t = 1.$



(ii) Quelle est la nature de l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{t}\,\mathrm{d}t$?



I.2 Sur un intervalle semi-ouvert du type $]0\,,b]$ où $b \in \mathbb{R}^{+*}$

Définition 3

Soit $f :]0\,,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue par morceaux sur $]0\,,b]$.

On dit que **l'intégrale généralisée** $\displaystyle\int_0^b f(t)\,\mathrm{d}t$ **est convergente** si la fonction $x \longmapsto \displaystyle\int_x^b f(t)\,\mathrm{d}t$ admet une limite finie lorsque x tend vers ...

On pose alors :

$$\int_{]0\,,b]} f(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^b f(t)\,\mathrm{d}t =$$

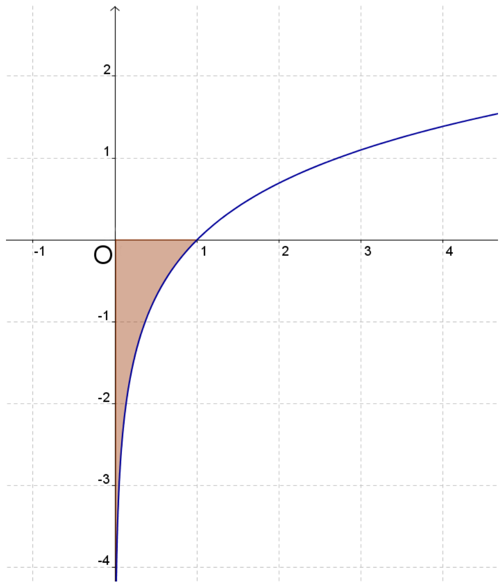
Dans le cas contraire, l'intégrale est dite ...

Exemples :

(i) Quelle est la nature de l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 \ln t\,\mathrm{d}t$?

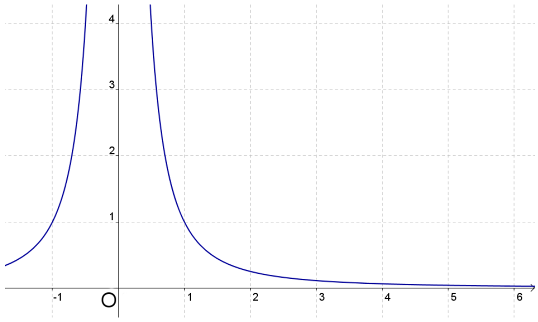
La fonction $t \mapsto \ln t$ est continue sur $]0\,,1]$, donc le problème se pose en 0.

Soit $x \in]0\,,1]$. Calculons $\displaystyle\int_x^1 \ln t\,\mathrm{d}t$.



En conclusion l'intégrale $\int_0^1 \ln t \, \mathrm{d}t$ est convergente et $\int_0^1 \ln t \, \mathrm{d}t =$

(ii) Quelle est la nature de l'intégrale $\int_0^1 \frac{1}{t^2} \, \mathrm{d}t$?



Remarque

Soit $f :]0\,,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue sur $]0\,,b]$ et prolongeable par continuité au point zéro en une fonction $\tilde{f}$. Alors l'intégrale $\int_0^b f(t) \, \mathrm{d}t$ converge et

Exemple : déterminer la nature de l'intégrale $\int_0^1 \frac{\ln(1+x)}{x} \, \mathrm{d}x$.

La fonction $f : x \longmapsto \frac{\ln(1+x)}{x}$ est continue sur $]0\,,1]$. Le problème semble donc se poser en 0. Mais on remarque que

I.3 Sur l'intervalle ouvert $]0\,,+\infty[$

Soit f une fonction continue par morceaux sur $]0\,,+\infty[$.

S'il existe un réel $c\in]0\,,+\infty[$ tel que les intégrales généralisées $\displaystyle\int_0^c f(t)\,\mathrm{d}t$ et $\displaystyle\int_c^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$ convergent, alors

Définition 4

Soit f une fonction continue par morceaux sur l'intervalle ouvert $]0\,,+\infty[$ et c un réel strictement positif. Si les intégrales $\displaystyle\int_0^c f(t)\,\mathrm{d}t$ et $\displaystyle\int_c^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$ sont convergentes, on dit que **l'intégrale généralisée** $\displaystyle\int_0^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$ **est convergente**. On pose alors :

$$\int_{]0\,,+\infty[} f(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t =$$

II Propriétés

Dans tout ce paragraphe, I désignera un intervalle du type $[a\,,+\infty[$ ou $]0\,,b]$ ou $]0\,,+\infty[$.

II.1 Linéarité

Proposition 1

Soit f et g deux fonctions continues par morceaux sur l'intervalle I telles que les intégrales $\displaystyle\int_I f(t)\,\mathrm{d}t$ et $\displaystyle\int_I g(t)\,\mathrm{d}t$ convergent. Alors pour tout réel λ,

II.2 Positivité et croissance

Soit f une fonction continue par morceaux sur I.

Si l'intégrale généralisée $\displaystyle\int_I f(t)\,\mathrm{d}t$ converge et si f est positive sur I alors $\displaystyle\int_I f(t)\,\mathrm{d}t$

Proposition 2 (intégration d'une inégalité)

Soit f et g deux fonctions continues par morceaux sur un intervalle I telles que les intégrales généralisées $\int_I f(t)\,\mathrm{d}t$ et $\int_I g(t)\,\mathrm{d}t$ convergent.

Si $\forall t \in I,\ f(t) \leqslant g(t)$ alors

$$\int_I f(t)\mathrm{d}t \quad \dots \quad \int_I g(t)\mathrm{d}t$$

II.3 Relation de Chasles

Proposition 3

Soit f une fonction continue par morceaux sur un intervalle I telle que l'intégrale généralisée $\int_I f(t)\,\mathrm{d}t$ converge. Alors pour tous a, b et c éléments ou extrémités de I,

$$\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t =$$

avec convergence des trois intégrales.

III Critères de convergence

III.1 Intégrales de Riemann

Proposition 4

Soit $\alpha \in \mathbb{R}$.

- $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^\alpha}\,\mathrm{d}t$ converge ssi

  Dans ce cas, $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^\alpha}\,\mathrm{d}t =$

- $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{t^\alpha}\,\mathrm{d}t$ converge ssi

Preuve : • Supposons $\alpha \neq 1$,

$\blacksquare$

Remarques :

(i) pour tout réel $b > 0$, $\displaystyle\int_0^b \frac{1}{t^\alpha}\,\mathrm{d}t$ est convergente si, et seulement si, $\alpha < 1$ et $\displaystyle\int_b^{+\infty} \frac{1}{t^\alpha}\,\mathrm{d}t$ est convergente si, et seulement si, $\quad\ldots$

(ii) l'intégrale généralisée $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1}{t^\alpha}\,\mathrm{d}t$ est divergente pour tout réel α.

III.2 Fonctions positives

f et g désignent deux fonctions continues par morceaux et **positives** sur $[a\,,+\infty[$.
Tous les résultats énoncés pourront être adaptés à des fonctions continues par morceaux sur $]0\,,b]$.

Proposition 5 (critère de comparaison)

On suppose que $\forall\, t \in [a\,,+\infty[, \qquad 0 \leqslant f(t) \leqslant g(t)$.

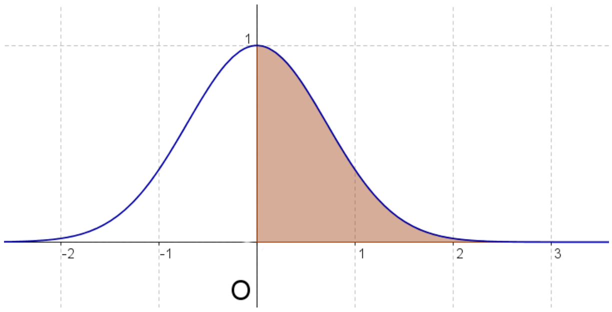
• Si $\displaystyle\int_a^{+\infty} g(t)\,\mathrm{d}t$ converge alors

• Si diverge alors $\displaystyle\int_a^{+\infty} g(t)\,\mathrm{d}t$ diverge.

Preuve : définissons F et G sur $[a\,,+\infty[$ par

$\blacksquare$

Exemple : : étudier la convergence de l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \exp(-t^2)\,\mathrm{d}t$.



Proposition 6 (critère de Riemann)

Soit f une fonction continue par morceaux et **positive** sur $[a\,,+\infty[$.
• S'il existe un réel $\alpha > 1$ tel que $\displaystyle\lim_{t\to+\infty} t^\alpha f(t) = 0$ alors

• S'il existe un réel $\alpha \leqslant 1$ tel que $\displaystyle\lim_{t\to+\infty} t^\alpha f(t) = +\infty$ alors

Preuve : on suppose qu'il existe un réel $\alpha > 1$ tel que $\displaystyle\lim_{t\to+\infty} t^\alpha f(t) = 0$

■

Critère de Riemann au voisinage de zéro :

Théorème 7 (critère d'équivalence)

On suppose que, au voisinage de $+\infty$, $f(t) \underset{(t\longrightarrow+\infty)}{\sim} g(t)$.

Alors les intégrales $\displaystyle\int_a^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$ et $\displaystyle\int_a^{+\infty} g(t)\,\mathrm{d}t$ sont de même nature.

Exemple : déterminer la nature de l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{t^2-5t+7}{4t^3+2t+1}\,\mathrm{d}t$.

III.3 Intégrale absolument convergente

Définition 5

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction continue par morceaux sur l'intervalle I.
On dit que f est **intégrable** sur I ou encore que l'intégrale $\displaystyle\int_I f(t)\,\mathrm{d}t$ est **absolument convergente** si l'intégrale généralisée

Proposition 8

Si f est intégrable sur l'intervalle I alors l'intégrale $\displaystyle\int_I f(t)\,\mathrm{d}t$ est convergente.

Preuve : on suppose que $f : I \to \mathbb{R}$ est intégrable sur l'intervalle I.

Posons $f^+ = \dfrac{1}{2}(|f|+f)$ et $f^- = \dfrac{1}{2}(|f|-f)$

Alors

■

On pourra donc utiliser les critères de comparaison sur $|f|$ pour démontrer la convergence de l'intégrale $\int_I f(t)\,\mathrm{d}t$.

Attention, si $\int_I |f(t)|\,\mathrm{d}t$ est divergente alors $\int_I f(t)\,\mathrm{d}t$ n'est pas nécessairement divergente.

Proposition 9 (critère d'intégrabilité)

Soit f une fonction continue par morceaux sur un intervalle I. S'il existe une fonction $\varphi : I \to \mathbb{R}^+$ positive, continue par morceaux et **intégrable** sur I telle que

$$\forall\, t \in I,$$

Alors f est intégrable sur I.

IV Passage à la limite sous l'intégrale

Théorème 10 (de convergence dominée, admis)

Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions continues par morceaux sur I à valeurs dans $\mathbb{R}$ telle que :

- pour tout réel $t \in I$, la suite $\big(f_n(t)\big)_{n\in\mathbb{N}}$ converge dans $\mathbb{R}$ vers un réel noté $f(t)$
- la fonction f est continue par morceaux sur I
- il existe une fonction $\varphi : I \longrightarrow \mathbb{R}^+$ positive, continue par morceaux et **intégrable** sur I telle que

$$\forall\, n \in \mathbb{N},\ \forall\, t \in I,$$

Alors les fonctions f_n et f sont intégrables sur I et

$$\int_I f_n(t)\,\mathrm{d}t \underset{(n\to+\infty)}{\longrightarrow}$$

On dit que le troisième point est l'hypothèse de domination.

Exemple : déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty} \int_0^{+\infty} \frac{1}{1+t^2+t^n\,\mathrm{e}^{-t}}\,\mathrm{d}t$