Déterminants

Dans tout ce chapitre, $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{K} = \mathbb{C}$.
E désigne un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie n avec $n \geqslant 2$.

I Déterminant d'une matrice carrée d'ordre n

I.1 Matrice carrée d'ordre inférieur à 3

Définition 1

Soit A une matrice carrée d'ordre n avec $n \leqslant 3$.
On appelle **déterminant** de A le scalaire noté $\det(A)$ défini comme suit :

- si $n = 2$ et $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, on pose $\det(A) = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc$
- si $n = 3$ et si $A = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & k \end{pmatrix}$, on pose

$$\begin{aligned} \det(A) &= a\begin{vmatrix} e & f \\ h & k \end{vmatrix} - b\begin{vmatrix} d & f \\ g & k \end{vmatrix} + c\begin{vmatrix} d & e \\ g & h \end{vmatrix} \\ &= aek - afh - bdk + bfg + cdh - ceg \end{aligned}$$

Règle de Sarrus : pour une matrice carrée d'ordre 3, $A = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & k \end{pmatrix}$, le scalaire $\det(A)$ est donné par

$$\det(A) = \begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & k \end{vmatrix} = aek + dhc + gbf - gec - ahf - dbk$$

Remarques :

- On définit le déterminant d'une matrice carrée d'ordre 1 :
  si $A = (a) \in \mathfrak{M}_1(\mathbb{K})$, on pose $\det(A) = a$
- $\begin{vmatrix} (a_1 + \lambda a_2) & b \\ (c_1 + \lambda c_2) & d \end{vmatrix} = a_1 d - b c_1 + \lambda(a_2 d - b c_2) = \begin{vmatrix} a_1 & b \\ c_1 & d \end{vmatrix} + \lambda \begin{vmatrix} a_2 & b \\ c_2 & d \end{vmatrix}$

  On dit que l'application det est linéaire par rapport à la première colonne de sa variable.

I.2 Cas général

Théorème 1 (admis)

Il existe une unique application $f : \mathfrak{M}_n(\mathbb{K}) \longrightarrow \mathbb{K}$, appelée **déterminant**, vérifiant les trois propriétés suivantes :

(i) f est linéaire par rapport à chacune des colonnes de sa variable

(ii) si B est la matrice obtenue en permutant 2 colonnes de $A \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$ alors $f(B) = -f(A)$

(iii) $f(I_n) = 1$

Pour toute matrice $A \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$, le nombre $f(A)$ s'appelle le déterminant de A et se note $\det(A)$.

(i) signifie que, si on se fixe des matrices colonnes $C_1,\ C_2, \dots,\ C_{i-1}\,,\ C_{i+1}\,, \dots,\ C_n$ de $\mathfrak{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ alors l'application

$$\begin{array}{rccl} \widetilde{f_i} : & \mathfrak{M}_{n,1}(\mathbb{K}) & \longrightarrow & \mathbb{K} \\ & \mathbf{X} & \longmapsto & f\left(C_1\,, C_2\,, \dots, C_{i-1}\,, \mathbf{X}\,, C_{i+1}\,, \dots, C_n\right) \end{array} \quad \text{est linéaire.}$$

(ii) signifie que quand on permute deux colonnes d'une matrice, son déterminant est multiplié par -1 .

Dans le cas où $A = (a_{i,j})_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\ 1\leqslant j\leqslant n}}$, on écrit $\det(A) = \begin{vmatrix} a_{1,1} & \cdots & a_{1,j} & \cdots & a_{1,n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & & \vdots \\ a_{i,1} & \cdots & a_{i,j} & \cdots & a_{i,n} \\ \vdots & & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n,1} & \cdots & a_{n,j} & \cdots & a_{n,n} \end{vmatrix}$

I.3 Propriétés du déterminant liées aux colonnes

Proposition 2

Soit $A \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$.

(i) Si une colonne de A est nulle alors $\det(A) = 0$

(ii) Si deux colonnes de A sont égales, alors $\det(A) = 0$

(iii) Pour tout scalaire $\lambda \in \mathbb{K}$, $\det(\lambda\, A) = \lambda^n \det(A)$

(iv) Le déterminant d'une matrice diagonale est égal au produit de ses termes diagonaux.

II Calcul pratique de déterminants

II.1 Les opérations élémentaires sur les colonnes

Proposition 3 (Caractère multilinéaire alterné du déterminant)

Soit $A \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$.

1. Si on multiplie une colonne de A par $\lambda \in \mathbb{K}$ alors le déterminant de A est multiplié par λ
2. On ne change pas le déterminant de A en ajoutant à une colonne de A un multiple d'**une autre** colonne.
3. On ne change pas le déterminant de A en ajoutant à une colonne de A une combinaison linéaire des **autres** colonnes de A.

Exemple : factoriser le déterminant $\Delta(x) = \begin{vmatrix} x & 1 & 1 \\ 1 & x & 1 \\ 1 & 1 & x \end{vmatrix}$

II.2 Déterminant d'un produit, déterminant d'une transposée

Théorème 4 (admis)

Pour toutes matrices carrées A et B d'ordre n, $\det(AB) = \det(A)\det(B)$

Mise en garde : en général $\det(A+B) \neq \det(A) + \det(B)$

et $\det(2A) = 2^n \det(A) \neq 2\det(A)$ lorsque A est inversible et $n \geqslant 2$.

Théorème 5 (admis)

Une matrice et sa matrice transposée ont même déterminant :

$$\text{si } A \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{K}) \text{ alors } \quad \det\left({}^tA\right) = \det(A)$$

Ce résultat essentiel nous permet d'obtenir, à partir des lignes, les propriétés que nous avons obtenues sur le déterminant à partir des colonnes de la matrice.

Soit $A \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$.

- Si une ligne de A est nulle, alors $\det(A) = 0$
- Si deux lignes de A sont égales, alors $\det(A) = 0$
- Si on permute deux lignes de A, alors le déterminant est multiplié par -1
- On ne change pas le déterminant de A en ajoutant à une ligne de A une combinaison linéaire des autres lignes de A.

II.3 Déterminant d'une matrice triangulaire

Proposition 6

Le déterminant d'une matrice triangulaire est égal au produit de ses coefficients diagonaux.

Preuve : on suppose que A est une matrice triangulaire supérieure :

$$A = \begin{pmatrix} a_1 & x_2 & x_3 & \cdots & x_n \\ 0 & a_2 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & a_{n-1} & z \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & a_n \end{pmatrix}$$

■

II.4 Développement par rapport à une colonne ou à une ligne

Soit $A = (a_{i,j})_{\substack{1 \leqslant i \leqslant n \\ 1 \leqslant j \leqslant n}} = \begin{pmatrix} a_{1,1} & \cdots & a_{1,j} & \cdots & a_{1,n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & & \vdots \\ a_{i,1} & \cdots & a_{i,j} & \cdots & a_{i,n} \\ \vdots & & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n,1} & \cdots & a_{n,j} & \cdots & a_{n,n} \end{pmatrix}$ une matrice carrée d'ordre n.

Pour $\boldsymbol{i} \in [\![1\,,n]\!]$ et $\boldsymbol{j} \in [\![1\,,n]\!]$, on note $A_{[i,j]}$ la matrice obtenue à partir de A en supprimant la $i^{\text{ème}}$ ligne et la $j^{\text{ème}}$ colonne.

Proposition 7 (admise)

Soit $A \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$. On peut calculer le déterminant de la matrice A en développant

- ▷ par rapport à sa $\boldsymbol{j}^{\text{ème}}$ colonne

$$\det(A) = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+\boldsymbol{j}}\, a_{i,\boldsymbol{j}} \,\det\left(A_{[i,\boldsymbol{j}]}\right)$$

- ▷ par rapport à sa $\boldsymbol{i}^{\text{ème}}$ ligne

$$\det(A) = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{\boldsymbol{i}+j}\, a_{\boldsymbol{i},j} \,\det\left(A_{[\boldsymbol{i},j]}\right)$$

Vérification dans le cas $n = 3$. On développe par exemple par rapport à la deuxième colonne de A où

$$A = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & k \end{pmatrix}$$

Exemple : calculer le déterminant $\delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 & 2 \\ 3 & 0 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 3 & 1 \end{vmatrix}$

III Famille de vecteurs et endomorphisme

Dans ce paragraphe, E est un $\mathbb{K}-$espace vectoriel de dimension finie n, muni d'une base $\mathscr{B}$.

III.1 Déterminant d'une famille de vecteurs dans une base

Définition 2

Soit $\left(\overrightarrow{x_1}, \overrightarrow{x_2}, \ldots, \overrightarrow{x_n}\right)$ une famille de n vecteurs de E.
Si on note X_i la matrice colonne des coordonnées de chaque vecteur $\overrightarrow{x_i}$ dans la base $\mathscr{B}$, et si on note A la matrice carrée d'ordre n, dont les colonnes sont, dans cet ordre, $X_1, X_2, \ldots, X_n$, on appelle déterminant de la famille de vecteurs $\left(\overrightarrow{x_1}, \overrightarrow{x_2}, \ldots, \overrightarrow{x_n}\right)$ dans la base $\mathscr{B}$, le scalaire noté $\det_{\mathscr{B}}(\overrightarrow{x_1}, \overrightarrow{x_2}, \ldots, \overrightarrow{x_n})$ défini par :

$$\det_{\mathscr{B}}(\overrightarrow{x_1}, \overrightarrow{x_2}, \ldots, \overrightarrow{x_n}) = \det(A)$$

- ▷ Le déterminant d'une famille de vecteurs dépend de la base dans laquelle on se place.
- ▷ Si $\mathscr{B} = \left(\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, \ldots, \overrightarrow{e_n}\right)$ est une base de E, alors

$$\det_{\mathscr{B}}(\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, \ldots, \overrightarrow{e_n}) = \det(I_n) = 1$$

Proposition 8

Soit $n \geqslant 2$.

(i) L'application $\det_{\mathscr{B}} : \begin{array}{ccc} E^n & \longrightarrow & \mathbb{K} \\ (\overrightarrow{x_1}, \overrightarrow{x_2}, \ldots, \overrightarrow{x_n}) & \longmapsto & \det_{\mathscr{B}}(\overrightarrow{x_1}, \overrightarrow{x_2}, \ldots, \overrightarrow{x_n}) \end{array}$ est linéaire par rapport à chacune de ses n variables (les autres étant fixées), c.à.d

pour des vecteurs fixés $\overrightarrow{x_1}, \overrightarrow{x_2}, \ldots, \overrightarrow{x_n}$ de E, l'application

$$\widetilde{f}_i : \begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & \mathbb{K} \\ \overrightarrow{u} & \longmapsto & \det_{\mathscr{B}}(\overrightarrow{x_1}, \overrightarrow{x_2}, \ldots, \overrightarrow{x_{i-1}}, \overrightarrow{u}, \overrightarrow{x_{i+1}}, \ldots, \overrightarrow{x_n}) \end{array} \quad \text{est linéaire.}$$

(ii) Pour tous vecteurs $\overrightarrow{x_1}, \overrightarrow{x_2}, \ldots, \overrightarrow{x_n}$ de E, s'il existe des indices distincts i et j tels que $\overrightarrow{x_i} = \overrightarrow{x_j}$ alors

$$\det_{\mathscr{B}}(\overrightarrow{x_1}, \overrightarrow{x_2}, \ldots, \overrightarrow{x_n}) = 0$$

(iii) Pour tous vecteurs $\overrightarrow{x_1}, \overrightarrow{x_2}, \ldots, \overrightarrow{x_n}$ de E, si $k > i$ alors

$$\det_{\mathscr{B}}(\overrightarrow{x_1}, \ldots, \overrightarrow{x_{i-1}}, \overrightarrow{\boldsymbol{x_k}}, \overrightarrow{x_{i+1}}, \ldots, \overrightarrow{x_{k-1}}, \overrightarrow{\boldsymbol{x_i}}, \overrightarrow{x_{k+1}}, \ldots, \overrightarrow{x_n}) = -\det_{\mathscr{B}}(\overrightarrow{x_1}, \overrightarrow{x_2}, \ldots, \overrightarrow{x_n})$$

III.2 Déterminant d'un endomorphisme

Définition 3

Soit f un endomorphisme de E et $\mathscr{B}$ une base de E.
On pose

$$\det(f) = \det\left(\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(f)\right)$$

Le déterminant d'un endomorphisme f est indépendant de la base choisie $\mathscr{B}$. En effet,

- ▷ On a $\quad \det(\mathrm{id}_E) = 1$
- ▷ Si f et g sont deux endomorphismes de E alors $\quad \det(f \circ g) = \det(f)\,\det(g)$
- ▷ Si $\lambda \in \mathbb{K}$ et $f \in \mathscr{L}(E)$ alors $\quad \det(\lambda f) = \lambda^n \det(f) \quad$ où $\ n = \dim(E)$.

Remarque :
si $\mathscr{B} = \left(\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, \ldots, \overrightarrow{e_n}\right)$ est une base de E, alors

$$\det(f) = \det_{\mathscr{B}}\left(f(\overrightarrow{e_1}),\, f(\overrightarrow{e_2}),\, \ldots,\, f(\overrightarrow{e_n})\right)$$

IV Quelques applications des déterminants

IV.1 Inversibilité d'une matrice

Théorème 9

Soit $A \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$.
La matrice A est inversible si, et seulement si, $\det(A) \neq 0$

Dans ce cas : $\det(A^{-1}) = \dfrac{1}{\det(A)}$

Preuve : • «⇒» : on suppose que A est inversible alors $AA^{-1} = I_n$. Donc, en composant par det, $\det(AA^{-1}) = \det(I_n) = 1$. De plus $\det(A\,A^{-1}) = \det(A)\det(A^{-1})$ d'où la conclusion voulue.

• «⇐» : par contraposée. On suppose que A n'est pas inversible. Notons $(C_1, \ldots, C_n)$ les colonnes de A et $\mathscr{B}_0$ la base canonique de $\mathfrak{M}_{n,1}(\mathbb{K})$.

■

IV.2 Caractérisation de bases

Théorème 10

Soit $\mathscr{B} = (e_1\,, e_2\,, \ldots, e_n)$ une base de E et $\mathscr{F} = (x_1\,, x_2\,, \ldots, x_n)$ une famille de n vecteurs de E. Alors

$\mathscr{F}$ est une base de E si, et seulement si, $\det_{\mathscr{B}}(x_1\,, x_2\,, \ldots, x_n) \neq 0$

Preuve : «⇒» On suppose que $\mathscr{F} = (x_1\,, x_2\,, \ldots, x_n)$ est une base de E. On note A la matrice carrée d'ordre n dont les colonnes sont les coordonnées des vecteurs x_i dans la base $\mathscr{B}$.

A est la matrice de passage de la base $\mathscr{B}$ vers la base $\mathscr{F}$. Alors $\det(A) =$

■

IV.3 Comatrice

Définition 4

Soit A une matrice carrée de $\mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$. On appelle **comatrice** de A la matrice notée $\text{com}(A)$ dont le coefficient général est

$$\gamma_{i,j} = (-1)^{i+j} \det\left(A_{[i,j]}\right)$$

Exemple : posons $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathfrak{M}_2(\mathbb{R})$. Alors $\quad \text{com}(A) =$

Proposition 11

Pour toute matrice $A \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$, $\quad A \cdot {}^t(\text{com } A) = \det(A)\, I_n$

Preuve : pour tous entiers i et j appartenant à $[\![1\,,\,n]\!]$, notons $M_j(L_i)$ la matrice déduite de A en remplaçant la $j-$ème ligne de A par la $i-$ème ligne de A.

- Si $i \neq j$ alors $\det(M_j(L_i)) = 0$ car
- Si $i = j$ alors $M_j(L_i) = A$ et $\det(M_j(L_i)) = \det(A)$

Posons $B = A \cdot {}^t(\text{com } A) = (b_{i,j})$. On obtient $\forall (i,j) \in [\![1\,,\,n]\!]^2$,

$$b_{i,j} =$$

■

Proposition 12

Si A est une matrice inversible, alors

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \cdot {}^t(\text{com } A)$$

IV.4 En géométrie

- Dans le plan, deux vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ sont colinéaires ssi leur déterminant (dans une base quelconque) est nul.
- Dans l'espace, trois vecteurs $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$ et $\overrightarrow{w}$ sont colplanaires ssi leur déterminant est nul.
- Équation cartésienne d'un plan de l'espace :

  soient A, B et C trois points non alignés de l'espace rapporté à un repère $\left(O\,;\overrightarrow{i}\,,\overrightarrow{j}\,,\overrightarrow{k}\right)$.
  Posons $\mathscr{B} = (\overrightarrow{i}\,,\overrightarrow{j}\,,\overrightarrow{k})$.
  Alors $M \in (ABC)$ ssi les points A, B, C et M sont coplanaires
  ssi les vecteurs $\overrightarrow{AM}$, $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont liés
  ssi $\det_{\mathscr{B}}(\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = 0$

Exemple : On donne les points $A(-1,0,-1)$; $B(0,3,1)$ et $C(1,3,3)$.
Déterminer une équation cartésienne du plan (ABC).