Séries numériques

I Généralités sur les séries

Dans ce paragraphe, $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ désigne une suite de nombres réels.

I.1 Série associée à une suite

Définition 1

- On appelle **série de terme général** u_n, et on note $\sum u_n$, la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par

$$S_n =$$

S_n s'appelle la **somme partielle de rang** n de la série $\sum u_n$.

- On dit que la **série** $\sum u_n$ **converge** ssi la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente. La limite de cette suite est alors appelée **somme de la série** de terme général u_n et on la note

Si la série ne converge pas, on dit qu'elle **diverge**.

- Si la série $\sum u_n$ converge on appelle **reste d'ordre** n le réel :

$$R_n = \sum_{k=0}^{+\infty} u_k - \sum_{k=0}^{n} u_k = \sum$$

Déterminer la nature d'une série signifie qu'il faut déterminer si la série est convergente ou divergente.

> **Exemple** : une somme «télescopique». On pose $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ u_n = \dfrac{1}{n(n+1)} =$

I.2 Condition nécessaire de convergence

Proposition 1

Pour que la série $\sum u_n$ converge, *il faut* que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ......

Application :
Cette propriété est très utile pour prouver qu'une série diverge. Lorsque le terme général de la série ne converge pas vers 0, on dit que la série associée diverge grossièrement.

La réciproque de cette propriété est fausse. Ce n'est pas parce que le terme général tend vers 0 que la série associée converge :

I.3 Quelques propriétés générales

Proposition 2 (opérations sur les séries)

Soit $\sum u_n$ et $\sum v_n$ deux séries.

(i) Pour tout réel $\lambda \neq 0$, les séries $\sum \lambda u_n$ et $\sum u_n$ sont de même nature et si les séries convergent, on a :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \lambda u_n =$$

(ii) Si les deux séries $\sum u_n$ et $\sum v_n$ sont convergentes alors la série $\sum (u_n + v_n)$ est convergente et :

Attention la réciproque de la deuxième propriété est fausse, on doit s'assurer de la convergence de toutes les séries avant d'écrire $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}(u_n + v_n) = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n + \sum_{n=0}^{+\infty} v_n$.

• On remarque que $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}(u_k - u_{k-1}) =$, on donc peut en déduire la propriété suivante

Proposition 3 (lien entre suite et série)

La suite u est convergente ssi la série de terme général $u_n - u_{n-1}$ converge.
En cas de convergence, on a :

$$\sum_{n=1}^{+\infty}(u_n - u_{n-1}) = \lim$$

Remarque : les séries $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} u_n$ et $\displaystyle\sum_{n\geqslant N_0} u_n$ sont de même nature.

I.4 Lien séries-intégrales

Proposition 4

Soit $a \in \mathbb{N}$. Si f est une fonction continue, positive et décroissante sur l'intervalle $[a\,,\,+\infty[$ et si on pose pour tout entier $k \geqslant a$, $\quad u_k = f(k)$, alors pour tout entier $n > a$,

$$\leqslant \sum_{k=a}^{n} u_k \leqslant$$

Cet encadrement peut donner la limite ou même un équivalent de la suite des sommes partielles (à condition de savoir calculer les intégrales en jeu dans cet encadrement).

Preuve : comme la fonction f est décroissante sur $[a\,,\,+\infty[$, on a :

■

Corollaire : soit f une fonction continue, positive et décroissante sur l'intervalle $[a\,,+\infty[$.
Alors

II Séries de référence

II.1 Série géométrique et sa dérivée

Proposition 5

Soit $q \in \mathbb{R}$.

- La série $\sum q^n$ s'appelle la **série géométrique de raison** q.
  Cette série est convergente si, et seulement si, et on a alors :
  $$\sum_{n=0}^{+\infty} q^n =$$
- La série $\sum n\, q^{n-1}$ s'appelle la **série dérivée de la série géométrique de raison** q.
  Cette série converge si, et seulement si, $|q| < 1$ et on a alors :
  $$\sum_{n=1}^{+\infty} n\, q^{n-1} =$$

Preuve : supposons $|q| < 1$. On sait que $\sum_{k=0}^{n} q^k =$

Or, comme $|q| < 1$, on a $\lim_{n \to +\infty} q^{n+1} = 0$ donc les sommes partielles convergent vers $\frac{1}{1-q}$ et donc la série est convergente et sa somme vaut $\frac{1}{1-q}$.

■

II.2 Séries de Riemann

Théorème 6

Soit α un réel. La série $\sum \frac{1}{n^\alpha}$ converge ssi

Ces séries sont appelées les **séries de Riemann**.

Preuve : on suppose que $\alpha > 0$. On applique le corollaire de la proposition 4, à la fonction $t \longmapsto t^{-\alpha}$.

■

II.3 Série exponentielle

Théorème 7

Pour tout réel x, la série $\sum \frac{x^n}{n!}$ converge et on a :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!} =$$

Cette série est appelée **série exponentielle**.

Preuve : on se fixe $n \in \mathbb{N}^*$ et $x > 0$. On considère la fonction $f : t \longmapsto \left(\sum_{k=0}^{n} \frac{t^k}{k!}\right) \mathrm{e}^{-t}$

Alors f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout réel t,

$f'(t) =$

On applique ensuite l'inégalité des accroissements finis à la fonction f :

■

III Critères de convergence pour les séries à termes positifs

Dans toute cette partie, $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ désigne une suite de nombres réels **positifs**, c'est-à-dire que pour tout $n \in \mathbb{N}, \quad u_n \geqslant 0$.

III.1 Monotonie de la suite des sommes partielles

La suite (S_n) des sommes partielles est une suite croissante car $\forall\, n \in \mathbb{N}^*,\ S_n - S_{n-1} = u_n \geqslant 0$.

Théorème 8

Une série $\sum u_n$ à termes réels positifs est convergente ssi la suite (S_n) de ses sommes partielles est …

III.2 Critères de comparaison

Proposition 9

Soit $\sum u_n$ et $\sum v_n$ deux séries telles que $\forall n \in \mathbb{N},\ 0 \leqslant u_n \leqslant v_n$.

- Si la série $\sum v_n$ converge alors

- Si la série $\sum$ diverge alors

Corollaire : soit $\sum u_n$ et $\sum v_n$ deux séries à termes positifs telles que $u_n \underset{(n\longrightarrow+\infty)}{=} o(v_n)$.
- Si la série $\sum v_n$ converge alors $\sum u_n$ ...
- Si la série $\sum u_n$ diverge alors $\sum v_n$ ...

Théorème 10 (critère d'équivalence)

Soit $\sum u_n$ et $\sum v_n$ deux séries à termes positifs telles que $u_n \underset{(n\longrightarrow+\infty)}{\sim} v_n$.
Alors les séries $\sum u_n$ et $\sum v_n$ sont de même nature.

Preuve : on suppose que $u_n \underset{(n\longrightarrow+\infty)}{\sim} v_n$. Alors il existe

■

Pour utiliser ces critères, il faut vérifier que la suite est bien à termes positifs. L'idée est ensuite de se ramener par équivalent, négligeabilité ou inégalité à des séries de références, le plus souvent à une série géométrique ou une série de Riemann.

> **Exemple** : déterminer la nature de la série de terme général $u_n = \frac{1}{n}\left(\exp\left(\frac{1}{n}\right) - 1\right)$

III.3 Critère de Riemann

Proposition 11

S'il existe un réel $\alpha > 1$ tel que la suite $(n^{\alpha}\, u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ soit

Alors la série $\sum u_n$ converge.

III.4 Critère de d'Alembert

Proposition 12

Soit $\sum u_n$ une série à termes strictement positifs ($\forall\, n \in \mathbb{N},\ u_n > 0$).

$$\text{Soit } \ell = \lim_{n\to+\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n}\,, \quad \ell \in \mathbb{R}^+ \cup \{+\infty\}$$

- ▷ Si $\ell > 1$, alors la série de terme général u_n diverge.
- ▷ Si $\ell < 1$, alors la série $\sum u_n$ converge.

Preuve : supposons $\ell < 1$ et choisissons un réel q tel que $\ell < q < 1$.

■

Exemple : étudier la nature de la série $\sum \frac{n!}{n^n}$.

IV Séries à termes de signe quelconque

IV.1 Convergence absolue

Définition 2

On dit que la série $\sum u_n$ est **absolument convergente** (ou **converge absolument**) si la série à termes positifs

Théorème 13 (la convergence absolue implique la convergence)

Si la série $\sum u_n$ est absolument convergente, alors elle est aussi convergente et

$$\left|\sum_{n=0}^{+\infty} u_n\right| \leqslant$$

Attention, encore une fois la réciproque de cette propriété est fausse.

Exemple : on verra plus loin que la série de terme général $u_n = \frac{(-1)^{n-1}}{n}$ est convergente.
On remarque ici que $|u_n| = \frac{1}{n}$ donc la série $\sum u_n$ est convergente mais pas absolument convergente.

Remarque :
Une série convergente mais non absolument convergente est dite ...

IV.2 Critère spécial des séries alternées

Définition 3

Une série réelle $\sum u_n$ est dite **alternée** si pour tout entier naturel n, les réels u_n et u_{n+1} sont de signes contraires, c'est-à-dire ...

Le terme général d'une série alternée se présente sous la forme
$u_n = (-1)^n a_n$ ou $u_n = (-1)^{n+1} a_n$ avec $a_n \geqslant 0$.

Théorème 14

Soit $\sum u_n$ une série alternée telle que la suite $(|u_n|)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante, de limite zéro.

Alors la série $\sum u_n$ converge et le reste d'ordre n, $R_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k$ vérifie :

$$|R_n| \leqslant$$

De plus R_n est du signe de son premier terme : celui de ...

En particulier la somme de la série est du signe de

Preuve : on peut toujours supposer que $\forall\, n \in \mathbb{N}$, $u_n = (-1)^n a_n$ où (a_n) est une suite positive, décroissante, de limite nulle. On pose pour tout entier naturel n, $S_n = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k a_k$

Montrons que les suites $(S_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ et $(S_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ sont adjacentes.

■