Diagonalisation de matrices carrées

Dans tout ce chapitre, $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{K} = \mathbb{C}$. E désigne un $\mathbb{K}-$espace vectoriel.

I Éléments propres d'un endomorphisme

I.1 Valeur propre et vecteurs propres

Définition 1

Soit $f \in \mathscr{L}(E)$, $A \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$ et $\lambda \in \mathbb{K}$.

- On dit que λ est une **valeur propre** de l'endomorphisme f ssi

$$\exists x \in E \ ; \ x \neq \overrightarrow{0_E} \ \text{ et } \ f(x) = \lambda x$$

- De même, λ est appelé valeur propre de la matrice A lorsque

$$\exists U \in \mathfrak{M}_{n,1}(\mathbb{K}) \ ;$$

I.2 Sous-espaces propres

Définition 2

Soit $f \in \mathscr{L}(E)$, $A \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$ et $\lambda \in \mathbb{K}$.

- Si λ est une valeur propre de f, alors tout vecteur x $\boxed{\text{non nul}}$ vérifiant $f(x) = \lambda x$ est appelé ...
- L'ensemble $\text{Ker}(f - \lambda\, \text{id}_E)$ est appelé le sous-espace propre de f associé à la valeur propre λ. On le note $E_\lambda(f)$.

$$E_\lambda(f) =$$

- Si λ est une valeur propre de A, alors toute matrice colonne non nulle $U \in \mathfrak{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ vérifiant $AU = \lambda U$ est appelée

Exemple : posons $E = \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$

et considérons l'endomorphisme de dérivation $\quad u : \begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & E \\ f & \longmapsto & f' \end{array}$

I.3 En dimension finie

On suppose pour toute la suite du chapitre, que E est un espace vectoriel de dimension finie $n \in \mathbb{N}^*$. Soit f un endomorphisme de E, $\mathscr{B}$ une base de E et $A = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(f)$. Alors :

▷ λ est une valeur propre de f ssi λ est une valeur propre de A.
▷ $\overrightarrow{x} \in E$ est un vecteur propre de f associé à λ ssi le vecteur colonne associé à $\overrightarrow{x}$ dans la base $\mathscr{B}$ est un vecteur propre de A associé à la valeur propre λ.

Théorème 1

▷ Soit $f \in \mathscr{L}(E)$. $\lambda \in \mathbb{K}$ est une valeur propre de f ssi $f - \lambda \,\mathrm{id}_E$ n'est pas ...

▷ Soit $A \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$. $\lambda \in \mathbb{K}$ est une valeur propre de A ssi $\det(A - \lambda I_n)$

Corollaire : Soit $A \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$.
0 est une valeur propre de A ssi $\det(A)$

Proposition 2

Soit $\lambda_1, \lambda_2 \ldots, \lambda_p$ des valeurs propres deux à deux distinctes d'un endomorphisme $f \in \mathscr{L}(E)$.
Si $\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_2}, \ldots, \overrightarrow{u_p}$ sont des vecteurs propres associés, alors $(\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_2}, \ldots, \overrightarrow{u_p})$ est une famille ...

Tout endomorphisme de E admet au plus

Preuve : par récurrence sur $p \in \mathbb{N}^*$.

■

Définition 3 (se généralise à p s.e.v. de E où $p \geqslant 3$)

On dit que des sous-espaces vectoriels F_1, F_2, F_3 sont en somme directe ssi

COROLLAIRE :
Soit f un endomorphisme de E admettant p valeurs propres deux à deux distinctes $\lambda_1, \lambda_2 \ldots, \lambda_p$.
Alors les sous-espaces propres associés $E_{\lambda_i}(f)$ sont en somme directe.

II Polynômes d'endomorphismes

II.1 Définition

Définition 4

Soit $P \in \mathbb{K}[X]$ un polynôme : $P(X) = \sum_{k=0}^{m} a_k X^k$.

▷ Si $f \in \mathscr{L}(E)$, on note $P(f)$ l'endomorphisme de E défini par :

$$\forall x \in E, \quad P(f)(x) = \sum_{k=0}^{m} a_k f^k(x) \qquad \text{où} \qquad f^0 = \mathrm{id}_E \ \text{ et } \ f^k = \underbrace{f \circ f \circ \cdots \circ f}_{k \ fois}$$

▷ Si $A \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$, on note $P(A)$ la matrice définie par $P(A) =$

Proposition 3

Soit P et Q deux polynômes de $\mathbb{K}[X]$, f un endomorphisme de E et $\mu \in \mathbb{K}$ un scalaire.

Alors $(\mu P + Q)(f) =$; $(P \times Q)(f) =$

Si $\exists x \in E$; $f(x) = \mu x$ alors $P(f)(x) =$

Preuve : on suppose que $f(x) = \mu x$

■

II.2 Polynômes annulateurs

Définition 5

- ▷ Soit $P \in \mathbb{K}[X]$ et $f \in \mathscr{L}(E)$.
  On dit que P est un **polynôme annulateur de** f ssi $P(f) =$
- ▷ Soit $P \in \mathbb{K}[X]$ et $A \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$. On dit que P est un polynôme annulateur de A ssi

Exemple : un endomorphisme $f \in \mathscr{L}(E)$ est appelé *projecteur* ssi $f \circ f = f$.
Un polynôme annulateur de f est donc

Proposition 4

Soit $f \in \mathscr{L}(E)$ et P un polynôme annulateur de f. Alors toute valeur propre de f est une

Attention ! toutes les racines d'un polynôme annulateur ne sont pas forcément des valeurs propres. Un fois que l'on a trouvé des valeurs propres éventuelles, il faut essayer de résoudre $f(x) = \lambda\, x$ (ou $AX = \lambda\, X$).

Si $P \in \mathbb{K}[X]$ et si $A = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(f)$ alors $\quad \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}\big(P(f)\big) =$

II.3 Polynôme caractéristique

Définition 6

Soit $f \in \mathscr{L}(E)$, $A \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$, $\dim E = n \quad$ avec $n \geqslant 1$.

On appelle **polynôme caractéristique** de f le polynôme $\quad \chi_f(X) = \det(f - X\,\mathrm{id}_E)$

On appelle polynôme caractéristique de A le polynôme $\quad \chi_A(X) =$

Remarques :

- le polynôme caractéristique $\chi_f(X)$ d'un endomorphisme $f \in \mathscr{L}(E)$ est de degré $\quad \dots$
- son coefficient dominant est $\quad \dots \quad$ et $\chi_f(0) = \dots$
- Pour $n = 2$, si $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ alors

  $P_A(X) =$

Théorème 5 (Caractérisation des valeurs propres)

Soit $f \in \mathscr{L}(E)$, $A \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$ et $\lambda \in \mathbb{K}$.

λ est une valeur propre de f si, et seulement si, $\chi_f(\lambda) =$

λ est une valeur propre de A si, et seulement si,

Preuve : en raisonnant par équivalence,

$$\begin{aligned}
\lambda \text{ est valeur propre de } f &\Leftrightarrow \exists x \in E \ ; \ x \neq 0_E \text{ et } f(x) = \lambda x \\
&\Leftrightarrow \exists x \in E \ ; \ x \neq 0_E \text{ et } x \in \operatorname{Ker}(f - \lambda \operatorname{id}_E) \\
&\Leftrightarrow \operatorname{Ker}(f - \lambda \operatorname{id}_E) \neq \{0_E\} \\
&\Leftrightarrow f - \lambda \operatorname{id}_E \text{ est non injective ie non bijective } (\dim E < +\infty) \\
&\Leftrightarrow \det(f - \lambda \operatorname{id}_E) = 0 \Leftrightarrow \chi_f(\lambda) = 0
\end{aligned}$$

■

II.4 Ordre de multiplicité d'une valeur propre

La dimension d'un sous-espace propre $E_\lambda(f)$ de f, est

Proposition 6

Si λ est une valeur propre de l'endomorphisme f, alors

$$1 \leqslant \dim E_\lambda(f) \leqslant m_\lambda$$

Preuve : notons p la dimension du sous-espace propre $E_\lambda(f)$.

Puisque $E_\lambda(f) \neq \{0_E\}$, on a déjà

■

III Diagonalisation

E désigne toujours un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie $n \geqslant 1$.

III.1 Définition

Définition 7

Soit $f \in \mathscr{L}(E)$. On dit que f est **diagonalisable** ssi il existe une base de E constituée de vecteurs propres de f.

Exemples : • Une homothétie de E

• Un projecteur de E

III.2 Caractérisations

Théorème 7

Soit f un endomorphisme de E ($\dim(E) = n$) ayant des valeurs propres deux à deux distinctes $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_p$. Les assertions suivantes sont équivalentes :

(i) f est diagonalisable

(ii) il existe une base $\mathscr{B}$ de E constituée de vecteurs propres de f

(iii) il existe une base $\mathscr{B}$ de E dans laquelle la matrice de f est diagonale

(iv) la somme des dimensions des sous-espaces propres de f est égale à

(v) le polynôme caractéristique $\chi_f(X)$ est scindé sur $\mathbb{K}$ et pour toute valeur propre λ_k d'ordre de multiplicité $\alpha_k \in \mathbb{N}^*$,

$$\dim E_{\lambda_k}(f) =$$

Preuve : par définition (i) $\Longleftrightarrow$ (ii)

■

Remarque utile : si E est de dimension $n \geqslant 1$ et si un endomorphisme $f \in \mathscr{L}(E)$ admet n valeurs propres deux à deux distinctes, alors

III.3 Application aux matrices

Définition 8

Soit $A \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$. On dit que la matrice A est **diagonalisable** ssi il existe une matrice inversible $P \in GL_n(\mathbb{K})$ et une matrice diagonale D telles que

$$A =$$

A est diagonalisable ssi A est semblable à une matrice diagonale.

Proposition 8

Une matrice carrée A est diagonalisable ssi l'endomorphisme f canoniquement associé à la matrice A est diagonalisable.

Une matrice triangulaire à coefficients diagonaux distincts est ...

Exemple : la matrice $A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ est-elle diagonalisable ?

Diagonaliser A revient à déterminer une matrice diagonale $D \in \mathfrak{M}_3(\mathbb{R})$ et une matrice inversible

$P \in GL_3(\mathbb{R})$ telles que $A = PDP^{-1}$.

(i) Calcul du polynôme caractéristique $\chi_A(X)$ et des valeurs propres de A.

(ii) Détermination des sous-espaces propres et de leurs dimensions.

(iii) Conclusion

Définition 9 (rappel)

Un matrice carrée A qui vérifie ${}^{t}A = A$ est dite

Théorème 9 (admis)

Toute matrice symétrique, à coefficients réels, est diagonalisable dans $\mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$.

IV Applications de la diagonalisation

IV.1 Calcul des puissances d'une matrice carrée

Soit $A \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$ une matrice carrée diagonalisable. Alors il existe une matrice inversible $P \in GL_n(\mathbb{K})$ et une matrice diagonale $D = \text{diag}(\lambda_1\,,\, \lambda_2\,,\, \dots\,,\, \lambda_n)$ telles que

Exemple : soit $A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

IV.2 Suites récurrentes linéaires croisées

Soit u et v deux suites définies par leurs premiers termes u_0, v_0 et les relations de récurrence $\forall\, n \in \mathbb{N}, \begin{cases} u_{n+1} &= a\, u_n + b\, v_n \\ v_{n+1} &= c\, u_n + d\, v_n \end{cases}$ où $a,\ b,\ c,\ d$ sont des scalaires fixés.

En posant

Exemple : $u_0 = v_0 = 1$ et $\forall\, n \in \mathbb{N}, \begin{cases} u_{n+1} &= 7\, u_n + 2\, v_n \\ v_{n+1} &= -4\, u_n + v_n \end{cases}$

IV.3 Systèmes différentiels linéaires homogènes à coefficients constants

Exemple : le système différentiel $\begin{cases} x'(t) &= 2\,x(t) + y(t) \\ y'(t) &= x(t) + 2\,y(t) \end{cases}$ s'écrit matriciellement $X'(t) = A\,X(t)$ avec

Définition 10

On appelle **système différentiel linéaire homogène à coefficients constants** tout système de la forme

$$X'(t) = A\,X(t)$$

où $A \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$ est une matrice carrée d'ordre n et

$t \longmapsto X(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{pmatrix}$ est la fonction inconnue dérivable sur $\mathbb{R}$, à valeurs dans $\mathfrak{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.

Pour résoudre $X'(t) = A\,X(t)$ dans le cas où A est diagonalisable : $A = P\,D\,P^{-1}$,