Produit scalaire sur un espace vectoriel réel

Dans tout ce chapitre, E désigne un $\mathbb{R}$-espace vectoriel.

I Structure préhilbertienne

I.1 Forme bilinéaire, symétrique, définie positive

Définition 1

On appelle **produit scalaire** sur E toute application $\varphi : E \times E \longrightarrow \mathbb{R}$ vérifiant les axiomes suivants :

(i) φ est linéaire par rapport à la première variable : $\forall\,(x, y, z) \in E^3$, $\forall\,\lambda \in \mathbb{R}$,

$$\varphi(\lambda x + y\,,\, z) =$$

(ii) φ est symétrique : $\forall\,(x, y) \in E^2$, $\quad \varphi(x, y) =$

(iii) φ est définie positive : $\forall x \in E$, $\quad \varphi(x, x) \geqslant \quad$ et $\quad \varphi(x, x) = 0 \Longrightarrow$

On appelle **espace préhilbertien réel** tout $\mathbb{R}$-e.v. E muni d'un produit scalaire φ.

- Lorsque les axiomes (i) et (ii) sont satisfaits, φ est linéaire aussi par rapport à la deuxième variable. On dit alors que φ est une forme bilinéaire sur E :

- Le produit scalaire $\varphi(x, y)$ de deux vecteurs x et y de E est souvent noté :

I.2 Exemples d'espaces préhilbertiens réels

- Le produit scalaire canonique sur $E = \mathbb{R}^n$ est défini par :

  $\forall\, x = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, $\forall\, y = (y_1, y_2, \ldots, y_n) \in \mathbb{R}^n$,

$$\langle x \mid y \rangle =$$

- Soit $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ tel que $a < b$. On pose $E = \mathcal{C}([a,b]\,,\,\mathbb{R})$ l'espace vectoriel réel des fonctions continues sur le segment $[a,b]$ à valeurs dans $\mathbb{R}$. On considère l'application

$$\begin{array}{rccl} \varphi : & E^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & (f,g) & \longmapsto & \displaystyle\int_a^b f(t)\,g(t)\,\mathrm{d}t \end{array}$$

Montrer que φ est un produit scalaire sur E.

- On pose $E = \mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$.
Alors l'application $\begin{array}{rccl} \varphi : & E^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & (A,B) & \longmapsto & \mathrm{tr}({}^tA\,B) \end{array}$ est un produit scalaire sur E.

On développe $\mathrm{tr}({}^tA\,B)$ par rapport aux coefficients des matrices A et B.

I.3 Norme euclidienne

E désigne désormais un espace préhilbertien réel dont le produit scalaire sera noté $\langle . \mid . \rangle$

Définition 2 (notation)

Pour tout vecteur x de E, on appelle **norme** de x, le nombre réel positif noté $\|x\|$, défini par

$$\|x\| =$$

L'application «norme» : $E \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par $\|x\| = \sqrt{< x \mid x >}$ s'appelle la norme euclidienne associée au produit scalaire $\langle . \mid . \rangle$

Théorème 1 (inégalité de Cauchy-Schwarz)

Pour tous vecteurs u et v de E,

$$|\langle u \mid v\rangle| \leqslant$$

- $|\langle u \mid v\rangle| = \|u\| \ \|v\|$ ssi la famille

Preuve : soit u et v deux vecteurs fixés de E. On pose, pour tout réel t,

$$P(t) = \|tu + v\|^2 =$$

$\blacksquare$

Définition 3 (angle de deux vecteurs)

Étant donnés deux vecteurs non nuls u et v de E, on appelle **écart angulaire** de u et v, l'unique nombre réel $\theta \in [0\,,\,\pi]$ défini par :

$$\cos\theta =$$

Formulaire : pour tous vecteurs u et v de E,

- $\|u+v\|^2 =$
-

$$\langle u \mid v\rangle = \frac{1}{2}\left(\|u+v\|^2 - \right.$$

Proposition 2

L' application «norme» : $E \longrightarrow \mathbb{R}$ vérifie les propriétés suivantes :

(i) $\forall\, u \in E,\ \|u\| \geqslant$

(ii) $\forall\, \lambda \in \mathbb{R},\ \forall\, u \in E,\ \|\lambda\, u\| =$

(iii) $\forall\,(u,v) \in E^2,\quad \|u+v\| \leqslant$ (inégalité de Minkowski)

(iv) $\|u+v\| = \|u\| + \|v\|$ ssi il existe un réel *positif* λ tel que

Preuve : Montrons d'abord (iii). D'après le formulaire ci-dessus il vient

$$\|u+v\|^2 = \|u\|^2 + \|v\|^2 + 2 < u \mid v > \leqslant \dots$$

et donc d'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz

$$\|u+v\| \leqslant \sqrt{\|u\|^2 + \|v\|^2 + 2\|u\|\|v\|}$$

ce qui permet de conclure.

(iv) Étudions le cas d'égalité.

$\blacksquare$

Interprétations géométriques : dans le plan usuel.
Soit ABC un triangle quelconque du plan.

- formule d'Al-Kashi :

$$\begin{aligned} AB^2 &= AC^2 + CB^2 + 2\left\langle \overrightarrow{AC} \mid \overrightarrow{CB} \right\rangle \\ &= AC^2 + CB^2 - \end{aligned}$$

- théorème de la médiane : si I est le milieu du segment $[BC]$, alors

$$AB^2 + AC^2 =$$

II Orthogonalité

$(E\,,\,<.\,|\,.>)$ désigne toujours un espace préhilbertien réel.

II.1 Vecteurs orthogonaux

Définition 4

- On dit que deux vecteurs u et v de E sont **orthogonaux** ssi $< u \mid v > =$
  On écrit alors $u \perp v$.
- On dit que la famille finie $(u_1,\, u_2,\, \ldots,\, u_p)$ est **orthogonale** ssi

$$\forall\,(i,j) \in [\![1\,,\,p]\!]^2, \quad i \neq j \Longrightarrow$$

- On dit que la famille finie $(u_1,\, u_2,\, \ldots,\, u_p)$ est **orthonormale** ssi

$$\forall\,(i,j) \in [\![1\,,\,p]\!]^2, \quad \langle u_i \mid u_j \rangle = \delta_{i\,,\,j} =$$

$\delta_{i\,,\,j}$ s'appelle le *symbole de Kronecker*.

Théorème 3 (Théorème de Pythagore)

Pour tous vecteurs u et v de E,

$$u \perp v \iff \|u+v\|^2 =$$

Proposition 4

Toute famille orthogonale de vecteurs non nuls de E, est libre.

Preuve : Soit $(u_1, u_2, \dots, u_p)$ une famille orthogonale de vecteurs non nuls et p nombres réels $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_p$ tels que

$$\sum_{i=1}^{p} \alpha_i u_i = 0_E$$

Soit $j \in [\![1\,,\,p]\!]$. On a, par bilinéarité du produit scalaire,

$$\begin{aligned} 0 &= \langle u_j \mid \sum_{i=1}^{p} \alpha_i u_i \rangle \\ &= \sum_{i=1}^{p} \alpha_i < u_j \mid u_i > \\ &= \alpha_j < u_j \mid u_j > + \sum_{i \neq j} \alpha_i < u_j \mid u_i > \\ &= \alpha_j \|u_j\|^2 \end{aligned}$$

Puisque u_j est non nul, $\|u_j\|^2 > 0$. D'où $\alpha_j = 0$. Tous les réels α_j sont donc nuls. ■

II.2 Orthogonal d'un sous-espace vectoriel

Définition 5

Soit F un sous-espace vectoriel de E.
L'orthogonal de F, noté $F^\perp$, est la partie de E définie par :

$$F^\perp = \{x \in E \mid \forall y \in F, < x \mid y >= 0\}$$

Autrement dit $\quad x \in F^\perp \iff$

Le double orthogonal $\left(F^\perp\right)^\perp$ est simplement noté $F^{\perp\perp}$.

Proposition 5

Soit F et G deux sous-espaces vectoriels de E. Alors

- $\{0_E\}^\perp =$ et $E^\perp =$
- $F^\perp$ est un sous-espace vectoriel de E.
- $$F \subset G \Longrightarrow$$
- $$F \qquad F^{\perp\perp}$$
- $$F \cap F^\perp =$$

Preuve : si $x \in E^{\perp}$ alors

$\blacksquare$

II.3 Bases orthonormales en dimension finie

Définition 6

Un espace vectoriel réel E de dimension finie, muni d'un produit scalaire, est appelé **espace euclidien**.

Tout espace euclidien non réduit à $\left\{\overrightarrow{0_E}\right\}$ possède au moins une base orthonormale.

Proposition 6 (coordonnées d'un vecteur dans une base orthonormale)

Soit $\mathscr{B} = (e_1, e_2, \ldots, e_n)$ une base orthonormale d'un espace euclidien E.

$$\text{Alors} \quad \forall x \in E, \quad x = \sum_{i=1}^{n}$$

III Projection orthogonale sur un sous-espace de dimension finie

III.1 Supplémentaire orthogonal

Théorème 7

Soit E un espace préhilbertien réel et F un sous-espace vectoriel de dimension finie de E.
Alors F admet un supplémentaire orthogonal, c.à.d

$$E =$$

Preuve : On se limite au cas où F est de dimension $n \geqslant 1$.
On sait déjà que $F \cap F^{\perp} = \{0_E\}$. Il reste à prouver que $E \subset F + F^{\perp}$. Soit $x \in E$.

■

III.2 Définition d'une projection orthogonale

Si un espace vectoriel E se décompose en somme directe $E = F \oplus G$,
on définit la **projection sur** F **parallèlement à** G comme étant l'application p qui, à tout vecteur $x = x_1 + x_2$ où $x_1 \in F$ et $x_2 \in G$, associe le vecteur $p(x) =$

Alors p est un endomorphisme de E qui vérifie :

$$p \circ p = \qquad , \qquad \operatorname{Ker}(p) = \qquad , \qquad \operatorname{Im}(p) =$$

Définition 7

Soit F un sous-espace vectoriel de dimension finie de E : $E = F \oplus \ldots$
On appelle projection orthogonale sur F la projection sur parallèlement à

On la note p_F

III.3 Distance d'un vecteur à un sous-espace de dimension finie

Théorème 8

Soit E un espace préhilbertien et F un sous-espace vectoriel de **dimension finie** de E. Soit $(e_1, e_2, \ldots, e_m)$ une base orthonormale de F.

(i) pour tout vecteur $x \in E$,

$$p_F(x) = \sum_{k=1}^{m}$$

(ii) La fonction qui, à tout élément $y \in F$, associe $\|x - y\|$, atteint son minimum en un unique point de F, à savoir ...

$$\|x - p_F(x)\| = \inf \left\{ \|x - y\| \in \mathbb{R}^+ \ / \ y \in F \right\} = d(x, F)$$

(iii) Soit $a \in E$.

$$a = p_F(x) \iff$$

Preuve : (ii) d'après le théorème de Pythagore,

■

Exemple : *distance d'un vecteur à une droite.*
Soit u un vecteur non nul de E. On appelle D la droite vectorielle engendrée par u.
Exprimer $d(x, D)$ en fonction de $\|x\|$ et de $\langle x \mid u \rangle$.

III.4 Procédé d'orthogonalisation de Gram-Schmidt

Voici un algorithme de construction de bases orthogonales (puis orthonormales).

Proposition 9

Soit E un espace préhilbertien réel
et $(e_1, e_2, \ldots, e_n)$ une **famille libre** de vecteurs de E avec $n \geqslant 2$.
On pose $\forall k \in [\![1\,,\,n]\!], \quad F_k = \mathrm{Vect}(e_1, e_2, \ldots, e_k)$.

Alors il existe une **famille orthogonale** $(g_1, g_2, \ldots, g_n)$ de vecteurs de E telle que

$$\forall k \in [\![1\,,\,n]\!],$$

Preuve : Construisons **par récurrence** une telle famille $(g_1, g_2, \ldots, g_n)$.
On peut choisir $g_1 = e_1$.

Pour $k \in \mathbb{N}^*$ avec $k < n$, supposons construite une famille orthogonale de vecteurs non nuls $(g_1, g_2, \ldots, g_k)$ telle que

$$\forall i \in [\![1\,,\,k]\!], \quad \mathrm{Vect}(g_1, g_2, \ldots, g_i) = \mathrm{Vect}(e_1, e_2, \ldots, e_i) = F_i$$

Cherchons le vecteur g_{k+1} sous la forme $\quad g_{k+1} = e_{k+1} - \sum_{i=1}^{k} \lambda_i\, g_i$

Pour un tel vecteur, on vérifierait par double inclusion que

$$\mathrm{Vect}(g_1, g_2, \ldots, g_k, g_{k+1}) = \mathrm{Vect}(e_1, e_2, \ldots, e_{k+1})$$

Posons $z_k = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i\, g_i$. $\quad$ Alors $\quad e_{k+1} = z_k + g_{k+1} \quad$ avec $z_k \in F_k$

Or la famille $(g_1, g_2, \ldots, g_k, g_{k+1})$ est orthogonale ssi $\quad g_{k+1} \in \ldots$

Donc z_k est le projeté orthogonal de $\quad \ldots \quad$ sur $\quad \ldots$

Ainsi $\quad g_{k+1} = e_{k+1} - z_k = e_{k+1} - p_{F_k}(e_{k+1}) =$

$$g_{k+1} =$$

Conclusion : on peut définir les vecteurs g_k par récurrence, en posant :

$$g_1 = e_1 \quad \text{et} \quad \forall k \in [\![1\,,\,n-1]\!], \quad \boxed{g_{k+1} = e_{k+1} - \sum_{i=1}^{k} \frac{\langle e_{k+1} \mid g_i \rangle}{\|g_i\|^2}\, g_i}$$

∎

REMARQUE : pour obtenir une famille orthonormale vérifiant la conclusion de la proposition 9, il suffit de diviser chaque vecteur g_k par sa norme.

> **Exemple** : on munit $\mathbb{R}^3$ de sa structure euclidienne canonique et on considère le sous-espace vectoriel F de $\mathbb{R}^3$ engendré par les vecteurs $u = (3, 0, -4)$ et $v = (1, 1, 1)$.
> Construire une base orthonormale de F.