Suites et séries de fonctions

I désigne un intervalle de $\mathbb{R}$ non vide et non réduit à un point.
$\mathbb{R}^I = \mathcal{F}(I, \mathbb{R})$ désigne le $\mathbb{R}$-espace vectoriel des fonctions de I dans $\mathbb{R}$.

- On appelle *suite de fonctions* toute suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ à valeurs dans $\mathbb{R}^I$. Autrement dit, une suite de fonctions est une suite (f_n) dont les éléments sont des fonctions $f_n : I \longrightarrow \mathbb{R}$.
- Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions définies sur I à valeurs dans $\mathbb{R}$.

  On pose $$S_n : \begin{array}{rcl} I & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \displaystyle\sum_{k=0}^{n} u_k(x) \end{array}$$

  On appelle *série de fonctions* de I dans $\mathbb{R}$ de terme général u_n, la suite de fonctions $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ appelée suite des sommes partielles. On la note plutôt $\sum u_n$.
- Souvent par abus, on parle de la série de fonctions $\sum u_n(x)$ où $u_n(x)$ est une expression qui dépend de la variable x.

I Modes de convergence

I.1 Convergence simple

Définition 1

Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions définies sur I à valeurs dans $\mathbb{R}$ et soit $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$.
On dit que la suite de fonctions (f_n) **converge simplement** vers f sur I si, et seulement si,

$$\forall\, x \in I, \quad f_n(x) \underset{(n\to+\infty)}{\longrightarrow} f(x)$$

Il y a unicité de la limite simple.
Si (f_n) est une suite de fonctions de I dans $\mathbb{R}$ convergeant simplement sur I vers la fonction $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ alors f s'appelle la

Exemple : étudier la convergence simple sur $[0\,,\,1]$ de la suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ où
$$f_n : \begin{array}{rcl} [0\,,\,1] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & x^n \end{array}$$

Définition 2

On dit que la série de fonctions $\sum u_n$ **converge simplement** sur I si, et seulement si, pour tout réel $x \in I$, la série numérique $\sum u_n(x)$ converge.

Autrement dit, la série $\sum u_n$ converge simplement sur I si, et seulement si, la suite de fonctions $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ......

Exemple : soit $u_n : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \dfrac{x^n}{n!} \end{array}$

La série $\sum u_n$ converge simplement sur $\mathbb{R}$ vers

I.2 Convergence uniforme

Définition 3

Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions définies sur I à valeurs dans $\mathbb{R}$ et soit $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$.
On dit que la suite de fonctions (f_n) **converge uniformément** vers f sur I si, et seulement si

$$\forall\, \varepsilon > 0, \quad \exists\, N_0 \in \mathbb{N}, \quad \forall\, n \geqslant N_0, \quad \forall\, x \in I,$$

ou de façon équivalente, si, et seulement si,

$$\ldots\ldots \underset{(n\to+\infty)}{\longrightarrow} 0$$

Remarque : la suite de fonctions (f_n) converge uniformément vers f sur I ssi il existe une suite de réels positifs $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que

Exemple : étudier la convergence uniforme sur $[-a\,,\,a]$ de la suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ où $a \in]0\,,\,1[$ et $f_n : \begin{array}{ccc} [-a\,,\,a] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & x^n \end{array}$

Proposition 1

Si la suite (f_n) converge uniformément vers f sur I, alors (f_n) converge simplement vers f sur I.

Proposition 2 (conséquence de la définition 2)

Pour montrer qu'une suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ne converge pas uniformément vers f sur I, il suffit de trouver une suite de réels $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de I telle que

Définition 4

On dit que la série de fonctions $\sum u_n$ **converge uniformément** sur I si, et seulement si, la suite de fonctions $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de ses sommes partielles, converge uniformément sur I.

REMARQUE : pour que la série de fonctions $\sum u_n$ converge uniformément sur I, il faut que la suite de fonctions (u_n) converge uniformément vers

Proposition 3 (reformulation de la définition 4)

Soit $\sum u_n$ une série de fonctions qui converge simplement sur I. Cette série converge uniformément sur I si, et seulement si, la suite de fonctions $(R_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge **uniformément** vers la fonction nulle sur I où

$$\forall x \in I, \quad R_n(x) =$$

Ainsi, pour montrer que $\sum u_n$ converge uniformément sur I, il suffit de trouver une suite de réels positifs $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que :

- $\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in I, |R_n(x)| \leqslant \quad \ldots$
- la suite réelle (α_n) converge vers $\quad \ldots$

Exemple : pour tout entier $n \geqslant 1$, on définit la fonction u_n sur $[0\,,\,1]$ par $\quad u_n(x) = \dfrac{(-1)^n}{n}x^n$
Montrer que la série de fonctions $\sum u_n$ converge uniformément sur le segment $[0\,,\,1]$.

I.3 Convergence normale pour une série de fonctions

Définition 5

On dit que la série de fonctions $\sum u_n$ **converge normalement** sur I ssi

- ▷ pour tout entier naturel n, la fonction u_n est ...
- ▷ la *série numérique* de terme général $M_n = \sup_{x \in I} |u_n(x)|$ est convergente.

Proposition 4 (critère pratique de convergence normale)

La série de fonctions $\sum u_n$ converge normalement sur I ssi il existe une suite de réels positifs $(\alpha_n)_{n \in \mathbb{N}}$ telle que

- ▷ pour tout entier $n \in \mathbb{N}$ et pour tout réel $x \in I$,

...

- ▷ la série numérique $\sum \alpha_n$ est ...

Exemple : soit a un réel strictement positif et $u_n : \begin{array}{ccc} [-a\,,\,a] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \dfrac{x^n}{n!} \end{array}$

Montrer que la série de fonctions $\sum u_n$ converge normalement sur $[-a\,,\,a]$.

Proposition 5 (admise)

La convergence normale entraîne la convergence uniforme (qui entraîne la convergence simple).

II Convergence uniforme et limites

II.1 Continuité

Théorème 6 (continuité de la limite)

La limite uniforme d'une suite de fonctions continues est elle-même continue.

Plus précisément, si pour tout entier naturel n, le fonction f_n est continue sur I et si la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers f sur I,

alors f est

Preuve : soit a un réel quelconque appartenant à I. Soit ε un réel strictement positif fixé.

■

Remarque : le théorème précédent s'adapte aux séries de fonctions.
Soit $\sum u_n$ une série de fonctions définies sur I à valeurs dans $\mathbb{R}$.
On suppose que :

- chaque fonction u_n est continue sur I
- la série de fonctions $\sum u_n$

Alors la somme $S = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n$ est une fonction définie et

II.2 Intégration sur un segment

Proposition 7 (permutation avec une intégrale)

Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions **continues** sur le segment $[a\,,\,b]$.
Si la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ **converge uniformément** vers une fonction f sur $[a\,,\,b]$

Alors f est continue sur $[a\,,\,b]$ et $\lim\limits_{n\longrightarrow+\infty} \int_a^b f_n(t)\,\mathrm{d}t =$

Preuve : on sait déjà, d'après le théorème 6, que

■

Théorème 8 (permutation somme/intégrale)

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions **continues** sur le segment $[a\,,\,b]$.
Si la série de fonctions $\sum u_n$ **converge uniformément** sur $[a\,,\,b]$

Alors la fonction somme $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n$ est continue sur $[a\,,\,b]$ et

$$\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\int_a^b u_n(t)\,\mathrm{d}t\right) =$$

II.3 Dérivation de la fonction limite

Proposition 9 (dérivation de la limite)

Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions définies sur un intervalle I. On suppose que :

- ▷ chaque fonction f_n est de classe $\mathcal{C}^1$ sur I,
- ▷ la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement vers une fonction f sur I,
- ▷ la suite des fonctions dérivées $(f_n')_{n\in\mathbb{N}}$ converge ...

Alors f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur I et

$$\forall\, x \in I, \quad f'(x) =$$

Preuve : par convergence uniforme sur tout segment de I, la fonction g est continue sur I d'après le théorème 6. Soit $a \in I$. Chaque fonction f_n étant de classe $\mathcal{C}^1$ sur

$\blacksquare$

Théorème 10 (dérivation terme à terme)

Soit $\sum u_n$ une série de fonctions définies sur un intervalle I. On suppose que :

- ▷ chaque fonction u_n est de classe $\mathcal{C}^1$ sur I,
- ▷ la série $\sum u_n$ converge simplement sur I,
- ▷ la série des dérivées $\sum u_n'$ converge ...

Alors la fonction somme $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur I et

$$\forall\, x \in I, \quad \left(\sum_{n=0}^{+\infty} u_n\right)'(x) =$$

Exemple : on pose $S(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{x+n}$. Justifier que la fonction S est définie sur $\mathbb{R}^{+*}$. Montrer que S est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^{+*}$ et exprimer $S'(x)$ sous la forme d'une somme de série.

III Passage à la limite sous l'intégrale

Théorème 11 (de convergence dominée, admis)

Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions continues par morceaux sur I à valeurs dans $\mathbb{R}$ telle que :

- la suite (f_n) converge simplement vers une fonction f sur I
- la fonction f est continue par morceaux sur I
- il existe une fonction $\varphi : I \longrightarrow \mathbb{R}^+$ positive, continue par morceaux et **intégrable** sur I telle que

$$\forall\, n \in \mathbb{N},\ \forall\, t \in I,$$

Alors les fonctions f_n et f sont intégrables sur I et

$$\int_I f_n(t)\,\mathrm{d}t \underset{(n\to+\infty)}{\longrightarrow}$$

Le troisième point s'appelle *l'hypothèse de domination.*

Exemple : déterminer $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\int_0^{+\infty}\frac{1}{1+t^2+t^n\,\mathrm{e}^{-t}}\,\mathrm{d}t$