Espaces probabilisés

I Cas d'un univers fini

I.1 Le langage des probabilités

Une *expérience aléatoire* (ou une *épreuve aléatoire*) est une expérience reproductible dont le résultat dépend du hasard. L'ensemble de toutes les issues possibles (ou *éventualités*) de cette expérience est appelé *univers*, on le note Ω. Lorsqu'on effectue une expérience aléatoire, certains faits liés à cette expérience peuvent se produire ou non, on les appelle *événements*. Lorsque Ω est un ensemble fini, on identifie chaque événement à une unique partie de Ω. On appelle *événement élémentaire* tout événement réalisé pour une seule issue, un événement élémentaire est donc modélisé par un singleton $\{\omega\}$ de Ω.

langage probabiliste	**théorie des ensembles**
événement certain (toujours réalisé)	Ω
événement impossible (jamais réalisé)	$\emptyset$
événement contraire de A, noté $\overline{A}$	complémentaire de A dans Ω
événement : «A et B»	$A \cap B$
événement : «A ou B»	$A \cup B$
A et B sont incompatibles	$A \cap B = \emptyset$
A entraîne B	$A \subset B$

I.2 Probabilité sur un ensemble fini

Définition 1

Soit Ω un ensemble fini. On appelle **probabilité** sur Ω toute application P de l'ensemble $\mathcal{P}(\Omega)$ des parties de Ω à valeurs dans $[0, 1]$ vérifiant :

- $P(\Omega) =$
- pour tous événements incompatibles A et B, $P(A \cup B) =$

Tout couple (Ω, P) où Ω est un ensemble fini et P une probabilité sur Ω s'appelle un *espace probabilisé fini*. Le nombre $P(A)$ s'appelle *la probabilité de l'événement A*.

Proposition 1

Soit $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n\}$ un ensemble fini de cardinal n où n est un entier naturel non nul. Soit P une probabilité sur Ω. On pose $\forall i \in [\![1, n]\!],\ p_i = P(\{\omega_i\})$. Alors

- $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} p_i =$
- pour tout événement A, le réel $P(A)$ est égal à la somme des probabilités des singletons $\{\omega_i\}$ dont A est la réunion.

> **Exemple** : une urne contient 4 boules numérotées de 1 à 4. On tire au hasard et simultanément 2 boules de l'urne et on s'intéresse au plus grand des deux numéros obtenus.

Théorème 2

Soit A et B deux événements.

(i) $P(\overline{A}) = 1 - P(A)$. En particulier $P(\emptyset) =$

(ii) Si $A \subset B$ alors $P(A) \leqslant P(B)$

(iii)
$$P(A \cup B) =$$

(iv) Si $A_1,\ A_2, \ldots, A_k$ sont des événements deux à deux incompatibles, alors

$$P(A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_k) = \ldots\ldots\ldots$$

I.3 L'hypothèse d'équiprobabilité

Définition 2

Soit $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n\}$ un ensemble fini non vide de cardinal n (où $n \in \mathbb{N}^*$).
La probabilité sur Ω telle que :

$$\forall i \in [\![1, n]\!],\ P(\{\omega_i\}) = \frac{1}{n}$$

s'appelle **la probabilité uniforme** sur Ω.

Les événements élémentaires ont tous la même probabilité : ils sont ...

Si P est la probabilité uniforme sur Ω, alors pour tout événement $A \subset \Omega$:

$$P(A) = \sum_{\omega \in A} P(\{\omega\}) = \sum_{\omega \in A} \frac{1}{n} = \frac{1}{n} \sum_{\omega \in A} 1 = \frac{\mathrm{card}(A)}{\mathrm{card}(\Omega)}$$

On dit alors qu'il y a «équiprobabilité» (des événements élémentaires) et que $P(A)$ est le quotient du «nombre de cas favorables» par le «nombre total de cas possibles».

ATTENTION : la formule $P(A) = \text{card}(A)/\text{card}(\Omega)$ n'est pas valable lorsque la probabilité P considérée n'est pas la probabilité uniforme.
En pratique, on aura affaire à la probabilité uniforme à chaque fois qu'il sera question d'une pièce équilibrée, d'un dé équilibré, etc.

II Cas général

II.1 Motivation

Les univers que l'on va rencontrer ne seront pas tous finis. Lorsque Ω est infini, la construction d'une probabilité est un peu plus compliquée.

> **Exemple** : On tire au hasard sur une cible plane $\mathscr{C}$. On suppose que chaque coup atteint la cible. Le résultat de chaque tir est représenté par le point d'impact M. L'univers Ω de cette expérience aléatoire est donc l'ensemble des points de la cible.
> Soit A une partie de Ω, on considère l'événement A : «l'impact est dans A ». Intuitivement, on pourrait penser que $P(A) = \dfrac{\text{aire}(A)}{\text{aire}(\mathscr{C})}$. Il faut donc être capable de calculer l'aire de A, donc on ne peut pas prendre n'importe quelle partie de Ω pour calculer $P(A)$.

II.2 La tribu des événements

Définition 3

Soit Ω un ensemble non vide et $\mathcal{T}$ une partie de $\mathcal{P}(\Omega)$, c'est-à-dire un ensemble de parties de Ω.
On dit que $\mathcal{T}$ est une **tribu** sur Ω si :

(i) $\Omega \in \mathcal{T}$

(ii) Pour tout $B \in \mathcal{T}$, $\qquad \overline{B}$

(iii) Pour tout suite $(B_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de $\mathcal{T}$, la réunion $\displaystyle\bigcup_{n\in\mathbb{N}} B_n$ appartient à $\mathcal{T}$.

Par exemple, $\mathcal{P}(\Omega)$ est une tribu de parties de Ω.

Définition 4

Soit Ω un ensemble et $\mathcal{T}$ une tribu sur Ω.
Le couple $(\Omega, \mathcal{T})$ s'appelle un **espace probabilisable**.

Étant donnés Ω un ensemble et $\mathcal{T}$ une tribu sur Ω,

- $\emptyset$
- si A et B sont deux éléments de $\mathcal{T}$, alors $A \cup B$, $A \cap B$ et $A \setminus B$ sont dans
- si $(B_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite d'éléments de $\mathcal{T}$, alors

II.3 Probabilité sur un espace probabilisable

Définition 5

Soit $(\Omega, \mathcal{T})$ un espace probabilisable. On appelle **probabilité** sur $(\Omega, \mathcal{T})$ toute application P définie sur $\mathcal{T}$ à valeurs dans $[0\,;\,1]$ vérifiant :

- $P(\Omega) =$
- pour tout suite $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'événements de $\mathcal{T}$ *deux à deux incompatibles*,

$$P\left(\bigcup_{n=0}^{+\infty} A_n\right) =$$

$(\Omega, \mathcal{T}, P)$ est alors appelé **espace probabilisé**.

La principale différence par rapport au cas fini est que dans le deuxième axiome, il a fallu prendre une suite infinie d'événements ce qui n'était pas possible dans le cas fini car il n'existe qu'un nombre fini d'événements.

Proposition 3

Soit $\Omega = \{\omega_i \ / \ i \in \mathbb{N}\}$ un ensemble dénombrable.
Si $(p_i)_{i\in\mathbb{N}}$ est une suite de réels positifs telle que la série $\sum p_i$ converge et a pour somme $\displaystyle\sum_{i=0}^{+\infty} p_i = \ldots$, alors il existe une unique probabilité P sur $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega))$ telle que

Proposition 4

Soit $(\Omega, \mathcal{T}, P)$ un espace probabilisé. Soit A et B deux événements.

(i) $P(\overline{A}) = 1 - P(A)$. En particulier $P(\emptyset) = 0$

(ii) Si $A \subset B$ alors $P(B \setminus A) =$

(iii) $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

(iv)

$$P(A \cup B \cup C) =$$

III Conditionnement

III.1 Probabilité conditionnelle

Définition 6

Soit $(\Omega, \mathcal{T}, P)$ un espace probabilisé et A un événement de probabilité non nulle.
Pour tout événement B, on appelle probabilité conditionnelle de B sachant A, le nombre noté $P_A(B)$ défini par :

$$P_A(B) = \text{————}$$

$P_A(B)$ se lit : «probabilité de B sachant A».

Proposition 5

Soit A un événement de probabilité non nulle. Alors P_A est une probabilité sur $(\Omega, \mathcal{T})$.
Donc pour tout événement B, $\quad 0 \leqslant P_A(B) \leqslant 1$ et $\quad P_A(\overline{B}) =$

III.2 Formule des probabilités composées

Proposition 6

Soit $(\Omega, \mathcal{T}, P)$ un espace probabilisé.
Soit A , B et C trois événements tels que $P(A \cap B \cap C) \neq 0$. Alors :

$$P\,(A \cap B \cap C) = P(A) \times P_A(B) \times P_{A \cap B}(C)$$

Preuve : $P\,((A \cap B) \cap C) = P(A \cap B)\, P_{A \cap B}(C) = P(A)\, P_A(B)\, P_{A \cap B}(C)$

cette formule se généralise par récurrence sur $n \geqslant 2$ à $P(A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_n)$. ■

Exemple : on tire successivement et sans remise trois boules dans une urne qui contient au départ 3 boules blanches et 7 noires. Pour tout $k \in \{1, 2, 3\}$, on note B_k l'événement «la k-ème boule tirée est blanche». Donner $P(B_1)$, $P_{B_1}(B_2)$ et $P_{B_1 \cap B_2}(B_3)$. En déduire la probabilité pour que les trois boules tirées soient blanches.

III.3 Formule des probabilités totales

Définition 7 (système complet d'événements)

Soit $(\Omega, \mathcal{T})$ un espace probabilisable. On appelle **système complet d'événements** de Ω toute famille $(A_i)_{i \in I}$ d'événements (où I est une partie non vide de $\mathbb{N}$) telle que

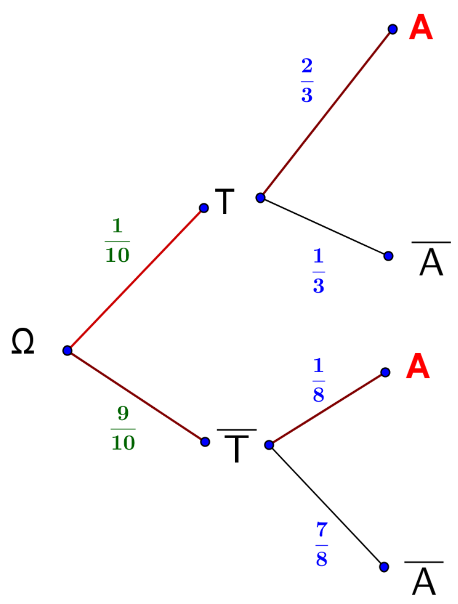
- aucun de ces événements n'est vide : $\forall\, i \in I,\ A_i \neq \emptyset$
- les événements A_i sont deux à deux incompatibles :

$$\forall\, (i, j) \in I^2,\ (i \neq j \Longrightarrow A_i \cap A_j = \emptyset)$$

- leur réunion est égale à Ω :

En pratique, $I = \mathbb{N}$ ou $I = [\![1\,, n]\!]$.

> **Exemple** : on choisit au hasard un individu dans une population comportant 10% de tricheurs. On fait tirer une carte d'un jeu de 32 cartes à cet individu. On sait que si cet individu est un tricheur, il a 2 chances sur 3 de tirer un as. Quelle est la probabilité que cet individu tire un as ?



Théorème 7 (formule des probabilités totales)

Soit $(\Omega, \mathcal{T}, P)$ un espace probabilisé. Soit $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ un système complet d'événements tel que $\forall\, n \in \mathbb{N},\ P(A_n) \neq 0$. Alors, pour tout événement B,

$$P(B) = \sum_{n=0}^{+\infty} P(A_n \cap B) = \sum_{n=0}^{+\infty} P(A_n)\, P_{A_n}(B)$$

Preuve : soit $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ un système complet d'événements tel que $\forall\, n \in \mathbb{N},\ P(A_n) \neq 0$ et $B \in \mathcal{T}$ un événement.

D'après la théorie des ensembles, $B = \Omega \cap B = \left(\bigcup_{n=0}^{+\infty} A_n\right) \cap B = \bigcup_{n=0}^{+\infty} (A_n \cap B)$

Or les $A_n \cap B$ sont deux à deux incompatibles. Donc, d'après le second axiome de la définition 5,

$$P(B) = \sum_{n=0}^{+\infty} P(A_n \cap B)$$

■

III.4 Indépendance stochastique

Soit A et B deux événements tels que $P(B) \neq 0$. Si la réalisation de B n'influe pas sur la probabilité de A c.à.d. $P_B(A) = P(A)$, on dit que A et B sont indépendants.

Définition 8

On dit que deux événements A et B sont **indépendants** (pour la probabilité P) ssi

$$P(A \cap B) =$$

ATTENTION : ne pas confondre indépendance et incompatibilité.
Dans la pratique, l'indépendance est souvent donnée a priori, elle s'impose de façon plus ou moins intuitive.

Exemple : deux tireurs a et b visent une cible. Le tireur a touche la cible avec une probabilité de $1/4$ et b touche la cible avec une probabilité de $2/5$. Quelle est la probabilité que la cible soit atteinte ?

REMARQUE : si A et B sont deux événements indépendants alors $\overline{A}$ et B, A et $\overline{B}$ et $\overline{A}$ et $\overline{B}$ le sont aussi.

Définition 9 (indépendance d'une suite d'événements)

Soit $(\Omega, \mathcal{T}, P)$ un espace probabilisé et $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'éléments de $\mathcal{T}$.
On dit que les événements A_n sont **mutuellement indépendants** pour la probabilité P ssi pour toute partie finie non vide I de $\mathbb{N}$, on a

$$P\left(\bigcap_{i\in I} A_i\right) =$$

ce qui désigne le produit des $P(A_i)$ pour i décrivant I.

REMARQUE : si des événements sont **mutuellement indépendants**, alors ils sont deux à deux indépendants, mais la réciproque est fausse.