Variables aléatoires discrètes

I Généralités sur les variables aléatoires discrètes

I.1 Notion de variable aléatoire

Définition 1

Soit $(\Omega, \mathcal{T})$ un espace probabilisable.

- On appelle *variable aléatoire réelle* (en abrégé var) toute application $X : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ définie sur ... à valeurs dans ... telle que pour tout intervalle J de $\mathbb{R}$, on ait :

$$X^{-1}(J)$$

- L'ensemble des valeurs prises par X est une partie de $\mathbb{R}$, que l'on appelle *univers image* de Ω par X et que l'on note $X(\Omega)$.
- Une var $X : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ est dite *discrète* lorsque $X(\Omega) = \{x_i \in \mathbb{R} \mid i \in I\}$ où I ...
- L'*événement* de $\mathcal{T}$ noté $[X = x_i]$ est l'ensemble des éléments de Ω qui ont pour image x_i par l'application X.

L'ensemble noté $[X = x_i]$ est l'événement : « X prend la valeur x_i ».
Plus précisément, $[X = x_i] = \{\omega \in \Omega \mid X(\omega) = \dots\dots\}$

Si $X(\Omega)$ est un ensemble fini, on dit que X est une **var discrète finie**. Sinon on dit que X est une **var discrète infinie**.

Exemples :

(i) Une urne contient 3 boules rouges et 2 boules vertes. On tire au hasard et simultanément deux boules de l'urne. On désigne par X la variable aléatoire qui compte le nombres de boules vertes obtenues.

(ii) On effectue une succession de lancers d'un dé cubique jusqu'à obtenir 6. Soit X le nombre de lancers effectués.

Il est difficile ici de décrire l'univers de notre expérience mais on peut tout de même donner très clairement $X(\Omega)$.

En étant rigoureux on devrait écrire : $X(\Omega) = \mathbb{N}^* \cup \{+\infty\}$ car il se peut que le 6 ne soit jamais obtenu. Mais on peut démontrer que la probabilité de ne jamais obtenir 6 est nulle, c'est-à-dire que l'on obtiendra presque sûrement 6. On peut alors choisir de considérer que $X(\Omega) = \mathbb{N}^*$ et donc X est une var discrète infinie.

I.2 Loi de probabilité d'une variable aléatoire discrète

Dans la suite du chapitre, $(\Omega, \mathcal{T}, P)$ est un espace probabilisé.

Définition 2

Soit $X : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ une var discrète avec $X(\Omega) = \{x_i \mid i \in I\}$.
On appelle **loi de probabilité** de X la liste des couples $(x_i, p_i)_{i\in I}$ où pour tout $i \in I$,

Lorsque $X(\Omega)$ est fini et ne contient «pas trop» d'éléments, on peut présenter la loi de X sous la forme d'un tableau avec dans la première ligne les valeurs de x_i et dans la deuxième ligne $p_i = P\big([X = x_i]\big)$.

Exemple : reprenons l'exemple (i) de I.1

Remarque : l'univers Ω étant un ensemble souvent compliqué ou mal connu, une variable aléatoire $X : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ permet de «transférer» P sur un univers plus simple et plus petit qui est $X(\Omega)$.

Proposition 1

Soit X une var discrète. Si $X(\Omega) = \{x_i \in \mathbb{R} \mid i \in I\}$ alors la famille d'événements $([X = x_i])_{i\in I}$ est un système complet d'événements. En particulier on a :

$$\sum_{i\in I} P([X = x_i]) =$$

On admet que si $(x_n, p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de $\mathbb{R}^2$ telle que $\forall n \in \mathbb{N},\ p_n \geqslant 0$ et $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} p_n =$
alors il existe un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{T}, P)$ et une var discrète X définie sur Ω tels que $(x_n, p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ...

I.3 Fonction de répartition

Définition 3

Soit $X : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ une variable aléatoire réelle.
On appelle **fonction de répartition** de X la fonction $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad F(x) =$$

Proposition 2

Soit F la fonction de répartition d'une var X. Alors

(i) $\forall x \in \mathbb{R},\ \ F(x) \in$

(ii) F est sur $\mathbb{R}$.

(iii) $\lim\limits_{x \to -\infty} F(x) =$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} F(x) =$

(iv) $\forall (a, b) \in \mathbb{R}^2, \quad a < b \Longrightarrow P(a < X \leqslant b) =$

Preuve : (i) provient de la définition d'une probabilité.

(ii) Soit $x \leqslant y$. Alors on a $[X \leqslant x] \subset [X \leqslant y]$ et donc $P(X \leqslant x) \leqslant P(X \leqslant y)$, c'est-à-dire $F(x) \leqslant F(y)$.

(iii) admis

(iv) Soit a et b deux réels tels que $a < b$. Alors $[a < X \leqslant b] = [X \leqslant b] \setminus [X \leqslant a]$.
Donc grâce aux propriétés des probabilités, $P([a < X \leqslant b]) = F(b) - F(a)$. ■

Exemple : reprenons l'exemple (i) de I.1

Proposition 3

La fonction de répartition d'une var discrète est une fonction en escalier.

I.4 Image d'une variable aléatoire par une fonction

Proposition 4

Soit $X : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ une var discrète.
Soit $f : \mathcal{D} \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction définie sur $\mathcal{D}$ à valeurs dans $\mathbb{R}$ telle que

Alors l'application $Y = f \circ X$ notée aussi $f(X)$ est une var discrète définie sur Ω et telle que :

$$Y(\Omega) = \qquad\qquad \text{avec} \quad \forall y \in Y(\Omega),\ P(Y = y) = \sum$$

Exemple : soit X une var dont la loi est définie par :

valeurs x_i de X	-1	1	2
probabilités $p_i = P([X = x_i])$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$

Déterminer la loi de $Y = 2X + 1$.

II Espérance, variance et écart type

II.1 Cas des variables aléatoires discrètes finies

Définition 4

Soit X une variable aléatoire définie sur Ω, de loi de probabilité $(x_i\,, p_i)_{i\in[\![1\,,n]\!]}$

- L'*espérance mathématique* de X est le réel noté $E(X)$ défini par : $\boxed{E(X) = \sum_{i=1}^{n} \qquad}$
- La *variance* de X est le réel positif noté $V(X)$ défini par : $\boxed{V(X) = \sum_{i=1}^{n} p_i \; (\qquad\qquad)^2}$
- L'*écart-type* de X est le réel positif noté $\sigma(X)$ défini par : $\boxed{\sigma(X) = \qquad}$

Remarques :

(i) $E(X)$ est la moyenne pondérée des valeurs prises par X, chaque valeur valeur x_i ayant pour coefficient le nombre p_i .

(ii) Si Ω est un univers fini, $\quad E(X) = \sum$

Exemple :

Proposition 5 (formule de transfert)

Soit X une variable aléatoire définie sur Ω, prenant les valeurs $x_1, x_2, \ldots, x_n$ avec les probabilités $p_1, p_2, \ldots, p_n$.
Soit f une fonction définie sur la partie $X(\Omega)$ de $\mathbb{R}$.
Alors l'espérance de la variable aléatoire $Y = f \circ X$ est

$$E(Y) =$$

Proposition 6

Soit X une variable aléatoire discrète finie définies sur Ω.
Alors pour tous réels a et b,

$$E(aX + b) =$$

$$V(X) = E\left((X - E(X))^2\right)$$
$$V(aX + b) =$$

II.2 Cas des variables aléatoires discrètes infinies

Dans ce paragraphe, X est une var discrète infinie avec $X(\Omega) = \{x_i \in \mathbb{R} \mid i \in \mathbb{N}\}$.

II.2.1 Espérance mathématique

Définition 5

Soit X une variable aléatoire discrète, de loi de probabilité $(x_i\,, p_i)_{i \in \mathbb{N}}$

On dit que X **admet une espérance**, ou que **l'espérance de X existe** lorsque la série $\sum p_i\, x_i$ est absolument convergente.
On appelle alors *espérance mathématique de X*, le réel noté $E(X)$ défini par :

$$E(X) =$$

Proposition 7 (formule de transfert)

Soit $f : X(\Omega) \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction définie sur la partie $X(\Omega)$ de $\mathbb{R}$.
Si la série $\sum p_i\, f(x_i)$ **converge absolument**, alors la variable aléatoire $Y = f \circ X = f(X)$ admet une espérance et on a :

$$E(f(X)) =$$

Proposition 8 (admise, linéarité de l'espérance)

Soit X et Y deux variables aléatoires discrètes admettant chacune une espérance. Soit a et b deux nombres réels. Alors la variable aléatoire $aX + bY$ admet une espérance et

$$E(a\,X + b\,Y) =$$

II.2.2 Moment d'ordre 2

Définition 6

Si la variable aléatoire X^2 admet une espérance, on dit que X admet un **moment d'ordre 2** qui est le réel

$$E(X^2) =$$

Remarque :
si X admet un moment d'ordre 2, alors l'espérance de X existe.
En effet,

II.2.3 Variance et écart-type

Définition 7

Soit X une var discrète admettant un moment d'ordre 2.

- On appelle *variance* de X le réel positif noté $V(X)$ défini par :

$$V(X) =$$

- On appelle *écart-type* de X le réel positif noté $\sigma(X)$ défini par

REMARQUES :

- Si X n'admet pas d'espérance, X ne peut pas admettre de variance.
- La variance est la moyenne du carré de la distance entre les valeurs de X et l'espérance de X. La variance est donc une mesure de dispersion de X par rapport à $E(X)$.

Proposition 9 (formule de Kœnig-Huygens)

Soit X une var discrète admettant un moment d'ordre 2. Alors

$$V(X) =$$

En pratique, on utilise souvent cette formule pour calculer une variance.

Si X admet une variance, alors pour tous réels a et b, $aX + b$ admet une variance et

$$V(aX + b) =$$

III Lois discrètes usuelles finies

III.1 Loi de Bernoulli

On appelle épreuve de Bernoulli une expérience aléatoire ayant deux issues possibles et deux seulement. On a coutume d'appeler *succès* S l'une de ces deux issues, et *échec* E l'autre issue.
Par exemple, on lance une fois une pièce de monnaie. On peut appeler *succès* l'obtention de pile, et *échec* l'obtention de face.

On définit alors la variable aléatoire X en posant $X = 1$ si le succès S est réalisé et $X = 0$ sinon. X est une var qui prend les valeurs 0 et 1 avec la probabilité $P(X = 0) = 1 - p$ et $P(X = 1) = p$.

Définition 8

Soit $p \in [0; 1]$. On dit qu'une var X suit la loi de Bernoulli de paramètre p ssi

$X(\Omega) =$ avec $P(X = 1) =$ et $P(X = 0) =$

On écrit $X \hookrightarrow \mathscr{B}(1, p)$

Proposition 10

Si $X \hookrightarrow \mathscr{B}(1, p)$ alors $E(X) =$ et $V(X) =$

III.2 Loi binomiale (ou loi des tirages avec remise)

n désigne un entier naturel non nul (en général $n \geqslant 2$). On répète n fois dans des conditions identiques et indépendantes la même épreuve de Bernoulli à deux issues contraires S et E. On désigne par p la probabilité du succès S, $0 \leqslant p \leqslant 1$. On peut considérer que tout résultat de ce type d'expérience est une liste ordonnée de n lettres, formée uniquement des lettre S (pour succès) et E (pour échec).

Théorème 11

Si X est la variable aléatoire égale au nombre de succès obtenus au cours de ces n épreuves indépendantes, alors

$$X(\Omega) = [\![0, n]\!] \quad \text{et} \quad \forall\, k \in [\![0, n]\!]\,,\ P(X = k) =$$

Rappel : d'après la formule du binôme de Newton, pour tous réels a et b,

Définition 9

On dit alors que X suit la loi binomiale de paramètres n et p.
On écrit $\quad X \hookrightarrow \mathscr{B}(n\,, p)$

Exemple : on lance un dé équilibré cinq fois de suite. Pour un lancer donné, le succès S correspond à la sortie du 6 et l'échec E à la sortie de $1, 2, 3, 4$ ou 5. Calculer la probabilité d'obtenir exactement deux fois le 6 au cours des cinq lancers.

Proposition 12

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $p \in \mathbb{R}$ tel que $0 \leqslant p \leqslant 1$. Si $X \hookrightarrow \mathscr{B}(n\,, p)$ alors

$$E(X) = \qquad\qquad \text{et} \quad V(X) =$$

III.3 Loi hypergéométrique (ou loi des tirages sans remise)

Mise en place : on considère une urne dans laquelle sont placées N boules : il y a $M = pN$ boules blanches et $N - M = (1-p)N$ boules rouges. On tire simultanément et sans remise n boules de cette urne ($1 \leqslant n \leqslant N$) et on appelle X la variable aléatoire égale au nombre de boules blanches obtenues.

X prend la valeur k si $0 \leqslant k \leqslant M$ et $0 \leqslant n - k \leqslant N - M$, c'est-à-dire si

$$\leqslant k \leqslant$$

On considère l'ensemble Ω des combinaisons de n éléments de l'ensemble des N boules, et on munit $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega))$ de la probabilité uniforme P.
$\text{card}(\Omega) =$

• On a donc :

$$P(X = k) = \frac{\binom{M}{k}\binom{N-M}{n-k}}{\binom{N}{n}}$$

Définition 10

Soit N et n deux entiers tels que $1 \leqslant n \leqslant N$. Soit $p \in [0\,,\,1]$ tel que $Np \in \mathbb{N}^*$
On dit qu'une variable aléatoire X suit la loi hypergéométrique de paramètres N, n et p ssi

$$X(\Omega) =$$

et $\quad \forall\, k \in X(\Omega), \quad P(X = k) =$

On écrit $\quad X \hookrightarrow \mathcal{H}(N, n, p)$

Proposition 13 (admise)

Si $X \hookrightarrow \mathcal{H}(N, n, p)$, alors $\qquad E(X) =$

IV Lois discrètes usuelles infinies

IV.1 Loi géométrique

Rappel : soit x un nombre réel tel que $-1 < x < 1$.

- La série $\sum x^k$ est absolument convergente, on l'appelle la **série géométrique de raison** x et on a :

$$\sum_{k=0}^{+\infty} x^k =$$

- La série $\sum k\, x^{k-1}$ est absolument convergente, on l'appelle la **série dérivée de la série géométrique de raison** x et on a :

$$\sum_{k=1}^{+\infty} k\, x^{k-1} =$$

On répète dans des conditions identiques et indépendantes la même épreuve de Bernoulli à deux issues contraires S et E. On désigne par p la probabilité du succès S, $0 < p < 1$.
On appelle X la variable aléatoire égale au nombre d'épreuves effectuées jusqu'à ce que S soit réalisé **pour la première fois**.
On note S_i l'événement :«S est réalisé au cours de la i-ème épreuve» et on pose $E_i = \overline{S_i}$.
Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$,

$$[X = k] = E_1 \cap E_2 \cap \dots \cap E_{k-1} \cap S_k$$

d'où

$$P(X = k) =$$

Définition 11

Soit $p \in]0\,,\,1[$. On dit qu'une variable aléatoire X suit la loi géométrique de paramètre p ssi

$$X(\Omega) = \qquad \text{et} \quad \forall\, k \in \mathbb{N}^*, \quad P(X = k) =$$

On écrit $\quad X \hookrightarrow \mathscr{G}(p)$

Proposition 14

Soit $p \in]0\,,\,1[$. Si $X \hookrightarrow \mathscr{G}(p)$ alors

$$E(X) = \qquad \text{et} \quad V(X) =$$

Preuve : on sait que pour tout réel $x \in]-1\,,1[$, la série $\sum k\, x^{k-1}$ converge absolument et

■

IV.2 Loi de Poisson

Rappel : pour tout nombre réel x, la série $\sum \frac{x^k}{k!}$ est absolument convergente.
On l'appelle **série exponentielle** et on a

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{x^k}{k!} = \lim_{n \longrightarrow +\infty} \dots$$

Définition 12

Soit λ un réel strictement positif.
On dit qu'une variable aléatoire X suit la loi de Poisson de paramètre λ ssi

$$X(\Omega) = \mathbb{N} \qquad \text{et} \qquad \forall\, k \in \mathbb{N},\ P(X = k) =$$

On écrit $\quad X \hookrightarrow \mathscr{P}(\lambda)$

Champs d'intervention :

- Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et p un réel tel que $0 \leqslant p \leqslant 1$.
  Lorsque n est grand ($n \geqslant 50$), p est petit ($p \leqslant 0,1$) et $n\,p < 10$, on peut approcher la loi binomiale $\mathscr{B}(n\,,p)$ par la loi de Poisson $\mathscr{P}(\lambda)$ où
  $$\lambda = \dots$$
-

Proposition 15

Soit $\lambda > 0$. Si $X \hookrightarrow \mathscr{P}(\lambda)$ alors

$$E(X) = \qquad\qquad \text{et} \qquad V(X) =$$