Intervalle de fluctuation

Variables aléatoires discrètes

UTBM

mars 2016

Exercice 1

Un lot de 800 pièces métalliques contient 20% de pièces défectueuses.

Exercice 1

Un lot de 800 pièces métalliques contient 20% de pièces défectueuses.

1. On prélève au hasard un échantillon exhaustif (sans remise) de 100 pièces de ce lot. Soit X la variable aléatoire qui compte le nombre de pièces défectueuses dans cet échantillon.
   Quelle est la loi de probabilité de X ?

Exercice 1

Un lot de 800 pièces métalliques contient 20% de pièces défectueuses.

1. On prélève au hasard un échantillon exhaustif (sans remise) de 100 pièces de ce lot. Soit X la variable aléatoire qui compte le nombre de pièces défectueuses dans cet échantillon.
   Quelle est la loi de probabilité de X ?
2. On prélève au hasard, successivement et avec remise, 100 pièces de ce lot (échantillon non exhaustif). Soit Y la variable aléatoire qui compte le nombre de pièces défectueuses obtenues.
   Quelle est la loi de probabilité de Y ?

Solution

1. X suit une loi

Solution

1. X suit une loi hypergéométrique.

Solution

1. X suit une loi hypergéométrique.
2. Y suit une loi

Solution

1. X suit une loi hypergéométrique.
2. Y suit une loi binomiale.

Solution

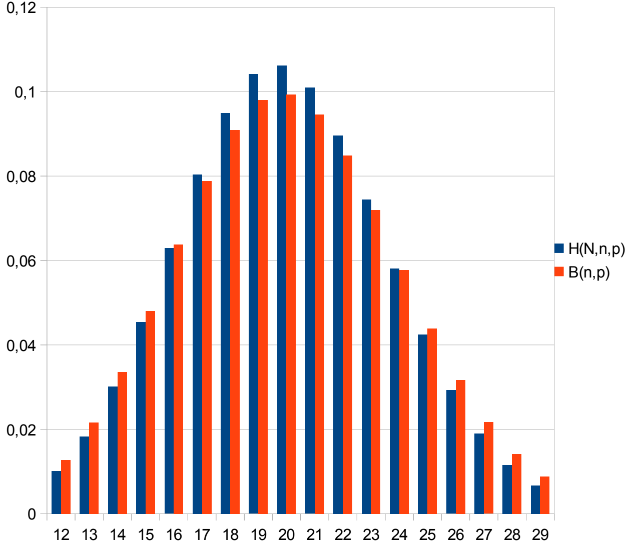
1. X suit une loi hypergéométrique.
2. Y suit une loi binomiale.
3. Comparaison des lois de X et de Y :

1. X suit une loi hypergéométrique.
2. Y suit une loi binomiale.
3. Comparaison des lois de X et de Y :

N=800
n=100
p=0,2

	Hypergéométrique	Binomiale	Ecart		
	$\mathcal{H}$(N,n,p)	$\mathcal{B}$(n,p)			
k	P(X=k)	P(Y=k)		P($X\leq k$)	
12	0,0100765146	0,0127538769	0,002677362	0,018725225	
13	0,0182551852	0,0215834839	0,003328299	0,036980411	
14	0,0301012846	0,033531484	0,003430199	0,067081695	
15	0,0453996071	0,0480617937	0,002662187	0,112481302	
16	0,0628990735	0,0638320698	0,000932996	0,175380376	
17	0,0803492653	0,0788513803	0,001497885	0,255729641	
18	0,0949487684	0,0908981189	0,004050649	0,350678409	
19	0,1040941021	0,0980742862	0,006019816	0,454772512	
20	0,1061481018	0,0993002148	0,006847887	0,560920613	
21	0,1009132281	0,0945716332	0,006341595	0,661833841	
22	0,0896253767	0,0848995343	0,004725842	0,751459218	
23	0,0745020894	0,07198004	0,002522049	0,825961308	
24	0,0580616534	0,0577339904	0,000327663	0,884022961	
25	0,0424867433	0,0438778327	0,001391089	0,926509704	
26	0,0292320112	0,0316426678	0,002410657	0,955741715	
27	0,0189342624	0,0216810872	0,002746825	0,974675978	0,955950752
28	0,0115589005	0,0141314229	0,002572522	0,986234878	
29	0,0066575232	0,008771228	0,002113705	0,992892402	
30	0,0036211476	0,0051896432	0,001568496	0,996513549	

Comparaison lois hypergéométrique et binomiale



Exercice 2

Une machine a fabriqué 800 pièces métalliques. Le responsable de fabrication affirme que 20% de ces pièces sont défectueuses. On n'a pu tester que 100 pièces parmi lesquelles 25 sont défectueuses.

Seconde situation

Exercice 2

Une machine a fabriqué 800 pièces métalliques. Le responsable de fabrication affirme que 20% de ces pièces sont défectueuses. On n'a pu tester que 100 pièces parmi lesquelles 25 sont défectueuses.
Peut-on estimer avec 5% de risque de se tromper que le responsable est de bonne foi ?

Intervalle de fluctuation

Tout intervalle $[a\,,\,b]$ tel que $P(a \leq X \leq b) \geq 95\%$ peut être considéré comme un intervalle de fluctuation de X au seuil de 95%.

Intervalle de fluctuation

Tout intervalle $[a\,,\,b]$ tel que $P(a \leq X \leq b) \geq 95\%$ peut être considéré comme un intervalle de fluctuation de X au seuil de 95%. On peut chercher celui qui est centré sur l'espérance de X :

$$P(20 - k \leq X \leq 20 + k) \geq 95\%$$

Intervalle de fluctuation

Tout intervalle $[a\,,\,b]$ tel que $P(a \leq X \leq b) \geq 95\%$ peut être considéré comme un intervalle de fluctuation de X au seuil de 95%. On peut chercher celui qui est centré sur l'espérance de X :

$$P(20 - k \leq X \leq 20 + k) \geq 95\%$$

La règle de décision peut s'énoncer ainsi :
soit f_e la fréquence observée (c'est-à-dire ici $f_e = 25\%$).

- Si $f_e \in [a, b]$ alors *on accepte l'hypothèse* selon laquelle le responsable est de bonne foi au seuil de 95 %.

Tout intervalle $[a\,,\,b]$ tel que $P(a \leq X \leq b) \geq 95\%$ peut être considéré comme un intervalle de fluctuation de X au seuil de 95%. On peut chercher celui qui est centré sur l'espérance de X :

$$P(20 - k \leq X \leq 20 + k) \geq 95\%$$

La règle de décision peut s'énoncer ainsi :
soit f_e la fréquence observée (c'est-à-dire ici $f_e = 25\%$).

- Si $f_e \in [a, b]$ alors *on accepte l'hypothèse* selon laquelle le responsable est de bonne foi au seuil de 95 %.
- Si $f_e \notin [a, b]$ alors *on rejette l'hypothèse* selon laquelle le responsable est de bonne foi avec un risque de 5% de se tromper.

utbm
université de technologie Belfort-Montbéliard