Variables aléatoires à densité

Dans tout le chapitre, $(\Omega, \mathcal{T}, P)$ est un espace probabilisé.

I Densités et fonction de répartition

I.1 Densité de probabilité

Définition 1

On dit qu'une fonction $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ définie sur $\mathbb{R}$ est une **densité de probabilité** ssi

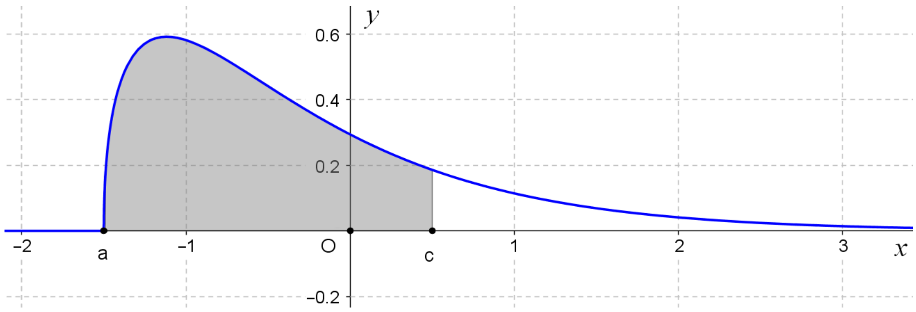
- f est *positive (ou nulle)* sur $\mathbb{R}$, c'est-à-dire $\forall t \in \mathbb{R},$
- f est continue sur $\mathbb{R}$, sauf éventuellement en un nombre fini de points
- l'intégrale généralisée $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$ est convergente et $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t =$

Exemple : $f(t) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad t < 1 \\ \dfrac{1}{t^2} & \text{si} \quad t \geqslant 1 \end{cases}$

Définition 2

On dit qu'une variable aléatoire $X : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ est **une variable aléatoire réelle à densité** (ou une variable aléatoire continue) s'il existe une densité de probabilité $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ telle que

La fonction f s'appelle alors **une densité** de la variable aléatoire X.



I.2 Caractérisation par la fonction de répartition

Proposition 1

Si F est la fonction de répartition d'une variable aléatoire à densité X et si f est une densité de X alors :

- F est et $\lim\limits_{x \to -\infty} F(x) =$
- F est continue sur $\mathbb{R}$.
- F est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ sauf éventuellement en un nombre fini de points et lorsque F est dérivable en x,
$$F'(x) =$$

Remarques :

- Les var discrètes ne sont donc pas des variables à densité.
- Comme f est positive, la fonction de répartition est bien croissante sur $\mathbb{R}$.

Ces propriétés sur la fonction de répartition suffisent à caractériser les variables à densité :

Théorème 2

Soit $X : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ une variable aléatoire réelle de fonction de répartition F.

(i) Si F est continue sur $\mathbb{R}$

(ii) et si F est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ sauf éventuellement en un nombre fini de points

alors X est une variable aléatoire à densité.

De plus toute fonction positive ou nulle f vérifiant $f(x) = F'(x)$ en tout point x où F est dérivable, est

En pratique :
pour démontrer qu'une variable aléatoire donnée X est une variable à densité, on trouve sa fonction de répartition et on doit vérifier qu'elle est continue sur $\mathbb{R}$ et de classe $\mathcal{C}^1$ sauf peut être en un nombre fini de points. Pour trouver une densité de X, il suffit de prendre la dérivée de F.

Exemple :

Soit X une variable aléatoire à densité dont une densité est la fonction f définie par

$$f(t) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad t < 0 \\ \mathrm{e}^{-t} & \text{si} \quad t \geqslant 0 \end{cases}$$

Montrer que $Y = X^3$ est une var à densité et en déterminer une densité.

I.3 Calculs de probabilités

Proposition 3

Soit X une variable aléatoire continue de densité f. Alors pour tous réels c et d tels que $c < d$:

- $P(X > c) = 1 - P(X \leqslant c) =$
- $P(c < X \leqslant d) = \displaystyle\int_c^d f(t)\, dt$
- $P(X = c) =$
- $P(c < X < d) = P(c \leqslant X \leqslant d) =$

REMARQUES :

- La probabilité de l'événement $[c \leqslant X \leqslant d]$ apparaît comme l'aire de la partie du plan située en dessous de la courbe représentative de f, au dessus de l'axe des abscisses et entre les droites verticales d'équation $x = c$ et $x = d$.

- Dans le cas particulier où la densité de probabilité f est nulle sur un intervalle du type $]-\infty, a[$ avec $a \in \mathbb{R}$, on a pour tout réel x,

$$F(x) = P(X \leqslant x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\,\mathrm{d}t = \begin{cases} & \text{si} \quad x \geqslant a \\ 0 & \text{si} \quad x < a \end{cases}$$

II Espérance, variance et écart-type

II.1 Espérance mathématique

Définition 3

Soit X une variable aléatoire continue de densité f.

Si l'intégrale généralisée $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} t\,f(t)\,\mathrm{d}t$ est convergente,

on dit que X admet une *espérance mathématique* et on pose

$$\boxed{E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty}}$$

Exemple :

soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(t) = \begin{cases} \cos t & \text{si } t \in \left[0\,,\, \dfrac{\pi}{2}\right] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$

Vérifier que f est une densité d'une variable aléatoire X.
X admet-elle une espérance ? Si oui, la calculer.

Définition 4

Si X est une var telle que $E(X) = 0$, on dit que X **est une variable centrée**.

Proposition 4 (transformation affine d'une variable à densité)

Soit X une variable aléatoire à densité, dont une densité est f.
Soit a et b deux réels tels que $a \neq 0$.
Alors $Y = aX + b$ est une variable aléatoire à densité dont une densité est la fonction

$$g : t \longmapsto$$

Preuve : dans le cas où $a > 0$.

■

Proposition 5 (admise, formule de transfert)

Soit X une variable aléatoire à densité, dont une densité est f.
Soit φ une fonction continue sur $\mathbb{R}$.
Si l'intégrale généralisée $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} |\varphi(t)|\ f(t)\,\mathrm{d}t$ est **convergente**, alors la variable aléatoire $\varphi \circ X = \varphi(X)$ admet une espérance et on a :

$$E(\varphi(X)) =$$

Corollaire
Soit X une variable aléatoire à densité admettant une espérance. Alors pour tous réels a et b, $Y = aX + b$ est une variable aléatoire qui admet pour espérance :

$$E(Y) =$$

Proposition 6 (admise, linéarité de l'espérance)

Soit X et Y deux variables à densité admettant chacune une espérance. Soit a et b deux nombres réels. Alors la variable aléatoire $aX + bY$ admet une espérance et

$$E(a\,X + b\,Y) =$$

II.2 Moment d'ordre 2

Définition 5 (et proposition)

Soit $X : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ une variable aléatoire continue de densité f.
Alors X^2 est une variable aléatoire à densité.

Si l'intégrale généralisée $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} t^2\, f(t)\, dt$ est convergente, on dit que X admet un **moment d'ordre 2**, qui est aussi l'espérance de X^2 et on a

$$E(X^2) =$$

Si X admet un moment d'ordre 2, alors X admet nécessairement une espérance.

II.3 Variance et écart-type

Définition 6

Soit X une variable aléatoire continue de densité f, admettant un moment d'ordre 2.

- On appelle *variance* de X le réel positif noté $V(X)$ défini par :

$$V(X) =$$

- On appelle *écart-type* de X le réel positif noté $\sigma(X)$ défini par

Pour le calcul de variance dans la pratique, on utilisera souvent la proposition suivante :

Proposition 7 (formule de Kœnig-Huygens)

Soit X une var à densité, admettant un moment d'ordre 2. Alors

$$V(X) =$$

Proposition 8

Soit X une variable aléatoire à densité admettant une variance. Alors pour tout réels a et b tels que $a \neq 0$, la variable aléatoire $Y = aX + b$ admet une variance et

$$V(aX + b) =$$

Définition 7

Soit $X : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ une variable à densité admettant une variance non nulle.
La variable $X^* = \dfrac{X - E(X)}{\sigma(X)}$ est appelée **la variable centrée réduite associée à** X.

III Lois usuelles

III.1 Loi uniforme sur un intervalle

Définition 8

On dit qu'une variable aléatoire continue X suit la loi uniforme sur l'intervalle $[a\,, b]$ avec $a < b$ ssi sa densité est la fonction f définie par

$$f(t) = \begin{cases} \dfrac{1}{b-a} & \text{si} \quad t \in [a\,, b] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

On écrit alors $X \hookrightarrow \mathscr{U}([a\,, b])$

Remarque : si $X \hookrightarrow \mathscr{U}([a\,, b])$ alors la probabilité pour que X appartienne à un sous-intervalle $[c\,, d]$ de $[a\,, b]$ est

$$P(c \leqslant X \leqslant d) =$$

III.2 Loi exponentielle (ou loi sans mémoire)

Définition 9

Soit λ un nombre réel strictement positif.
On dit qu'une variable aléatoire continue X suit la loi exponentielle de paramètre λ ssi sa densité est la fonction f définie par

$$f(t) = \begin{cases} \lambda\,\mathrm{e}^{-\lambda t} & \text{si} \quad t \geqslant 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

On écrit alors $X \hookrightarrow \mathscr{E}(\lambda)$

Théorème 9

Si une variable aléatoire continue X suit la loi exponentielle de paramètre λ ($\lambda > 0$), alors pour tous réels positifs h et t,

$$P_{[X>t]}(X > t + h) =$$

Proposition 10

Soit λ un nombre réel strictement positif.
Si $X \hookrightarrow \mathscr{E}(\lambda)$ alors X admet une espérance et une variance telles que

$$E(X) = \qquad\qquad \text{et} \qquad V(X) =$$

III.3 Loi normale (ou de Laplace-Gauss)

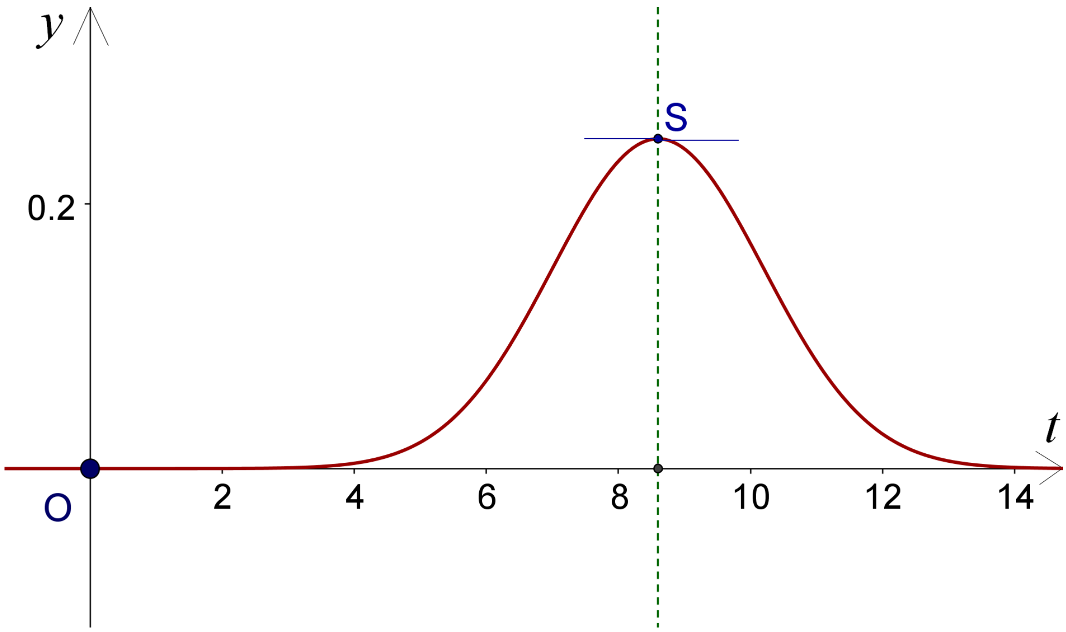
Définition 10

Soit $\mu \in \mathbb{R}$ et $\sigma > 0$.

On dit qu'une variable aléatoire continue X suit la loi normale de paramètres μ et σ ssi sa densité est la fonction f définie par

$$f(t) = \frac{1}{\sqrt{2\,\pi\,\sigma^2}} \;\ldots$$

On écrit alors $X \hookrightarrow \mathcal{N}(\mu\,,\sigma)$



Proposition 11 (admise)

Soit $\mu \in \mathbb{R}$ et $\sigma > 0$.
Si $X \hookrightarrow \mathcal{N}(\mu\,,\sigma)$ alors X admet une espérance et une variance telles que

$E(X) =$ et $V(X) =$

Proposition 12

Soit a et b deux réels avec $a \neq 0$. Si $X \hookrightarrow \mathcal{N}(\mu\,,\sigma)$ alors la variable aléatoire $Y = aX + b$ suit la loi

Preuve : on note f la densité de X.

■

Théorème 13

Soit X une variable aléatoire continue.

$$X \hookrightarrow \mathcal{N}(m\,,\sigma) \qquad \text{ssi} \qquad X^* = \frac{X-m}{\sigma} \hookrightarrow \ldots$$

Dans les calculs pratiques, si une variable aléatoire continue X suit la loi normale $\mathcal{N}(m\,,\sigma)$, on se ramènera toujours à la variable aléatoire $X^* = \dfrac{X-m}{\sigma}$ qui suit la «*loi normale centrée réduite*» $\mathcal{N}(0\,;1)$.

La fonction de répartition de la loi $\mathcal{N}(0\,;1)$ ne s'exprime pas avec les fonctions usuelles.
Il faudra cependant bien savoir utiliser la propriété ci-dessous et savoir utiliser SCILAB et la calculatrice.

Proposition 14

Soit Φ la fonction de répartition d'une var X suivant la loi $\mathcal{N}(0\,;1)$. Alors Φ vérifie

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad \Phi(-x) =$$

Preuve : tout repose ici sur le fait que la densité est paire :

$$\begin{aligned}
\Phi(-x) &= \int_{-\infty}^{-x} f(t)\,\mathrm{d}t = \lim_{A\to-\infty}\int_{A}^{-x} f(t)\,\mathrm{d}t \\
&= \lim_{A\to-\infty}\int_{-A}^{x} f(-u)\,(-\mathrm{d}u) \qquad \text{changement de variable } u=-t \\
&= \lim_{A\to-\infty}\int_{x}^{-A} f(u)\,\mathrm{d}u = \int_{x}^{+\infty} f(u)\,\mathrm{d}u = 1-\Phi(x)
\end{aligned}$$

■