Indépendance de variables aléatoires

Dans tout ce chapitre, $(\Omega, \mathcal{T}, P)$ est un espace probabilisé.

I Couple de variables aléatoires discrètes

Dans toute cette partie, X et Y désigneront deux var discrètes définies sur Ω.
On notera $X(\Omega) = \{x_i \in \mathbb{R} \mid i \in I\}$ et $Y(\Omega) = \{y_j \in \mathbb{R} \mid j \in J\}$ où I et J sont des parties de $\mathbb{N}$.

I.1 Loi d'un couple

Définition 1

On appelle **loi de probabilité du couple** de variables aléatoires discrètes (X, Y), la liste $\big((x_i, y_j)\, ,\, p_{i,j} \big)$ où

$$p_{i,j} =$$

Dans le cas simple où $I = [\![1\,,\,m]\!]$ et $J = [\![1\,,\,n]\!]$, on peut présenter la loi de (X, Y) sous forme d'un tableau à double entrée.

Exemple : une urne contient 2 boules bleues, 3 boules blanches et 2 boules rouges. On extrait simultanément 3 boules de l'urne. On note X le nombre de boules bleues parmi ces 3 boules et Y le nombre de boules blanches. Déterminer la loi du couple (X, Y).

On résume les résultats dans un tableau :

X \ Y	$y_1 = 0$	$y_2 = 1$	$y_3 = 2$	$y_4 = 3$	$P([X = x_i])$
$x_1 = 0$	0			$\frac{1}{35}$	
$x_2 = 1$	$\frac{2}{35}$			0	
$x_3 = 2$		$\frac{3}{35}$	0	0	
$P([Y = y_j])$					

I.2 Lois marginales

Soit (X,Y) un couple de var discrètes. La loi de X est appelée la **première loi marginale du couple** (X,Y) et la loi de Y est appelée la **deuxième loi marginale du couple** (X,Y).
Lorsqu'on connaît la loi du couple (X,Y), on peut en déduire la loi de X et la loi de Y grâce à la formule des probabilités totales :

Proposition 1

Soit (X,Y) un couple de var discrètes. Alors on a :

$$\forall i \in I, \quad P([X = x_i]) = \sum_{j \in J} P([X = x_i] \cap [Y = y_j]) = \sum$$

$$\forall j \in J, \quad P([Y = y_j]) = \sum_{i \in I} P([X = x_i] \cap [Y = y_j]) = \sum$$

> **Exemple** : reprenons l'exemple de I.1 et déterminons la deuxième loi marginale du couple (X,Y) c'est-à-dire la loi de Y.

y_j	$y_1 = 0$	$y_2 = 1$	$y_3 = 2$	$y_4 = 3$
$P([Y = y_j])$	$\frac{4}{35}$			

I.3 Lois conditionnelles

Définition 2

Soit (X,Y) un couple de variables aléatoires discrètes.
Soit $y_j \in Y(\Omega)$ tel que $P(Y = y_j) \neq 0$.
On appelle **loi conditionnelle à** $[Y = y_j]$ **de** X la liste des couples

$$\left(x_i \, , \, P_{[Y=y_j]}(X = x_i) \right)_{i \in I}$$

> **Exemple** : reprenons l'exemple de I.1 et déterminons la loi conditionnelle à $[Y = 2]$ de X.

II Indépendance

II.1 Indépendance de deux variables aléatoires

Définition 3

Soit X et Y deux var définies sur un même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{T}, P)$.
On dit que X et Y sont **indépendantes** (pour la probabilité P) ssi pour tous réels x et y,

$$P([X \leqslant x] \cap [Y \leqslant y]) =$$

Proposition 2

Soit $X : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ et $Y : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ deux variables aléatoires discrètes avec

$$X(\Omega) = \{x_i \in \mathbb{R} \mid i \in I\} \quad \text{et} \quad Y(\Omega) = \{y_j \in \mathbb{R} \mid j \in J\}$$

X et Y sont indépendantes si, et seulement si, pour tout $i \in I$ et pour tout $j \in J$, les événements

c.à.d

Exemple : les variables aléatoires X et Y de l'exemple I.1

Proposition 3

Si X et Y sont deux var discrètes indépendantes et si f et g sont deux fonctions réelles définies respectivement sur $X(\Omega)$ et sur $Y(\Omega)$

alors

II.2 Indépendance mutuelle de n variables aléatoires

Définition 4

Soit $X_1, X_2, \dots, X_n$ des variables aléatoires définies sur Ω.
On dit que $X_1, X_2, \dots, X_n$ sont **mutuellement indépendantes** ssi pour tous réels $x_1, x_2, \dots, x_n$,

$$P\big([X_1 \leqslant x_1] \cap [X_2 \leqslant x_2] \cap \cdots \cap [X_n \leqslant x_n] \big) =$$

Proposition 4

Soit $X_1, X_2, \dots, X_n$ des variables aléatoires **discrètes** définies sur Ω.

$X_1, X_2, \dots, X_n$ sont **mutuellement indépendantes**
ssi pour tout $(x_1, x_2, \dots, x_n) \in X_1(\Omega) \times X_2(\Omega) \times \cdots \times X_n(\Omega)$,

II.3 Indépendance mutuelle d'une suite de variables aléatoires

Définition 5

Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de variables aléatoires définies sur Ω.
On dit que $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est **une suite de variables aléatoires mutuellement indépendantes** ssi pour toute partie finie J de $\mathbb{N}$, les variables aléatoires X_j où $j \in J$ sont mutuellement indépendantes.

III Somme de variables aléatoires

III.1 Covariance et variance

Proposition 5

Soit X et Y deux variables aléatoires admettant chacune une espérance.
Si X et Y sont **indépendantes** alors la variable produit XY admet une espérance et

$$E(XY) =$$

Preuve : dans le cas où X et Y sont des des var discrètes finies.

On suppose que $X(\Omega) = \{x_1, x_2, \ldots, x_m\}$ et $Y(\Omega) = \{y_1, y_2, \ldots, y_n\}$

■

Définition 6

Soit X et Y deux variables aléatoires admettant chacune un moment d'ordre 2.
On appelle **covariance** de X et de Y le nombre réel

$$\operatorname{cov}(X,Y) = E\left[\,(X - E(X))\,(Y - E(Y))\,\right]$$

REMARQUES :

(i) Si X et Y admettent un moment d'ordre 2, alors

$$\operatorname{cov}(X,Y) =$$

(ii) $\operatorname{cov}(Y,X) = \operatorname{cov}(X,Y)$ et $\operatorname{cov}(X,X) =$

(iii) Si X et Y sont indépendantes, alors

C'est ce théorème que l'on utilisera le plus souvent pour calculer la covariance.

Théorème 6

Soit X et Y deux var admettant des moments d'ordre 2.

- $V(X+Y) = V(X) + V(Y) +$
- Si X et Y sont indépendantes, alors $V(X+Y) =$

Preuve : $V(X+Y) =$

$\blacksquare$

CONSÉQUENCE :
Si $X_1, , X_2, \ldots, X_n$ sont des variables aléatoires **deux à deux indépendantes** qui admettent toutes un moment d'ordre 2, alors la variable $X_1 + X_2 + \cdots + X_n$ admet une variance et

$$V(X_1 + X_2 + \cdots + X_n) =$$

III.2 Densité de la somme de deux var continues indépendantes

Théorème 7 (admis)

Soit X et Y deux variables aléatoires réelles continues, de densités respectives f et g.
Si X et Y sont indépendantes, alors $Z = X + Y$ est une variables aléatoire continue qui admet pour densité la fonction h définie par

$$\forall\, x \in \mathbb{R}, \quad h(x) = \int_{-\infty}^{+\infty}$$

III.3 Stabilité de lois usuelles pour la somme

III.3.1 Loi binomiale

Proposition 8

• Si X et Y sont deux variables aléatoires **indépendantes** suivant respectivement les lois binomiales $\mathscr{B}(n,p)$ et $\mathscr{B}(m,p)$ alors

$$X + Y \hookrightarrow$$

• Si $X_1, X_2, \ldots, X_k$ sont k variables aléatoires **mutuellement indépendantes** suivant respectivement les lois binomiales $\mathscr{B}(n_1,p)$, $\mathscr{B}(n_2,p)$ $\ldots$, $\mathscr{B}(n_k,p)$ alors

$$X_1 + X_2 + \cdots + X_k \hookrightarrow$$

III.3.2 Loi de Poisson

Proposition 9

• Si X et Y sont deux variables aléatoires **indépendantes** suivant des lois de Poisson de paramètres respectifs λ et μ, alors

$$X + Y \hookrightarrow$$

• Si $X_1, X_2, \dots, X_k$ sont k variables aléatoires **mutuellement indépendantes** suivant des lois de Poisson de paramètres respectifs $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k$ alors

$$X_1 + X_2 + \cdots + X_k \hookrightarrow$$

Preuve : on ne démontre que le premier point. Posons $Z = X + Y$. On a tout d'abord $Z(\Omega) = \mathbb{N}$ et pour tout $k \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned}
P(Z = k) &= \sum_{(i,j)\in\mathbb{N}^2/i+j=k} P([X = i] \cap [Y = j]) \\
&= \sum_{i=0}^{k} P([X = i] \cap [Y = k - i]) \\
&= \sum_{i=0}^{k} P(X = i)P(Y = k - i) \qquad \text{car } X \text{ et } Y \text{ sont indépendantes} \\
&= \sum_{i=0}^{k} \frac{\mathrm{e}^{-\lambda}\lambda^i}{i!} \frac{\mathrm{e}^{-\mu}\mu^{k-i}}{(k-i)!} \\
&= \mathrm{e}^{-(\lambda+\mu)} \sum_{i=0}^{k} \frac{\lambda^i \mu^{k-i}}{i!(k-i)!} \\
&= \frac{\mathrm{e}^{-(\lambda+\mu)}}{k!} \sum_{i=0}^{k} \frac{k!}{i!(k-i)!} \lambda^i \mu^{k-i} \\
&= \frac{\mathrm{e}^{-(\lambda+\mu)}}{k!} \sum_{i=0}^{k} \binom{k}{i} \lambda^i \mu^{k-i} \\
&= \frac{\mathrm{e}^{-(\lambda+\mu)}(\lambda + \mu)^k}{k!} \qquad \text{d'après la formule du binôme}
\end{aligned}$$

Donc Z suit la loi de Poisson de paramètres $\lambda + \mu$. ■

III.3.3 Loi normale

Théorème 10

• Si X et Y sont deux variables aléatoires **indépendantes** suivant respectivement les lois normales $\mathcal{N}(m_1, \sigma_1)$ et $\mathcal{N}(m_2, \sigma_2)$ alors

$$X + Y \hookrightarrow$$

• Si X_1, X_2, ... , X_k sont k variables aléatoires **mutuellement indépendantes** suivant respectivement les lois normales $\mathcal{N}(m_1, \sigma_1)$, $\mathcal{N}(m_2, \sigma_2)$ ... ,$\mathcal{N}(m_k, \sigma_k)$ alors

$$X_1 + X_2 + \cdots + X_k \hookrightarrow$$

Preuve : on prouve d'abord le résultat lorsque $m_1 = m_2 = 0$.

■

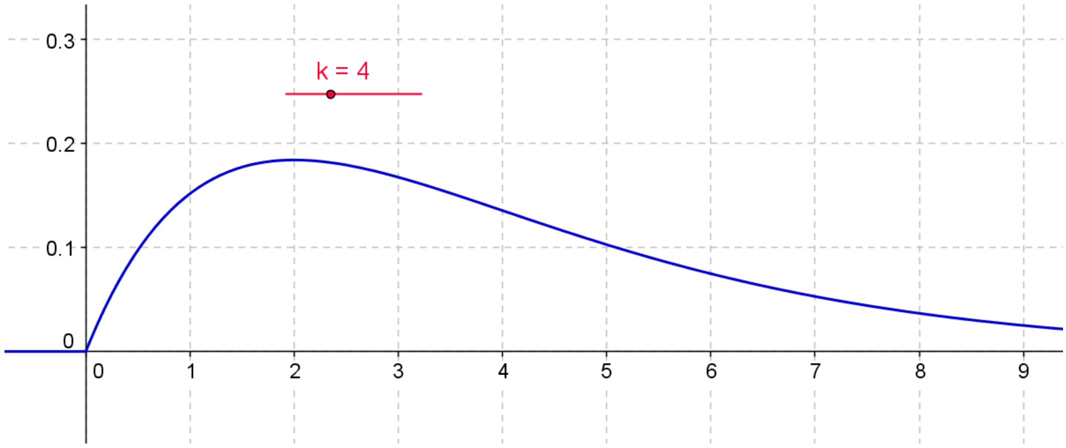
IV Loi du «Khi-deux»

Définition 7

Soit $Y_1,\ Y_2,\ \dots\ Y_k$ des variables aléatoires mutuellement indépendantes suivant toutes la loi normale centrée réduite $\mathcal{N}(0\,;\,1)$.

La variable X définie par $X = \displaystyle\sum_{i=1}^{k} Y_i^2$ suit la loi du χ^2 à k degrés de liberté.

On écrit $X \hookrightarrow \chi_k^2$



Si X suit la loi du «Khi-carré» à k degrés de liberté, alors

$$E(X) = \qquad\qquad \text{et} \qquad V(X) =$$